REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. GIRAULT

# Stratégies de lancement

*Revue de statistique appliquée*, tome 13, nº 4 (1965), p. 61-68

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_4_61_0>

# STRATÉGIES DE LANCEMENT


## M. GIRAULT

Professeur à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris



*La programmation dynamique a donné lieu à d'intéressants travaux au cours des vingt dernières années. Les idées essentielles de cette théorie se dégagent de l'exemple qui suit. Il a été imaginé à partir d'un problème réel de lancement dans une usine fabriquant des tôles pour carrosseries (automobiles et aviation). Ce même problème a déjà été évoqué dans la Revue en 1957 (Vol. V, n°1, page 91) sous le titre "Problème posé par un abonné".*


## 1 - ENONCE DU TYPE DE PROBLEME ETUDIE

Une entreprise reçoit une commande de X pièces identiques d'un type original. Ces pièces sont fabriquées en série par une suite d'opérations à partir d'une certaine quantité de matières premières. Si le chef d'atelier lance une rafale de X pièces exactement, il risque de ne produire qu'un nombre insuffisant de pièces bonnes auquel cas ou bien la demande ne sera pas satisfaite ou bien il faudra lancer une deuxième rafale, ce qui aura généralement pour effet d'augmenter le coût de fabrication (1). Cette remarque suggère de lancer N pièces ($N > X$) ; mais comment choisir N ? là est le problème.

Il est bien clair que l'on risque deux défaillances contradictoires :

1/ Obtenir une production inférieure à X ; ce qui conduit à ne pas honorer la commande, ou à effectuer un lancement supplémentaire.

2/ Obtenir une production supérieure à X ; ce qui a pour effet d'augmenter le coût de fabrication.

Tel est, énoncé dans ses grandes lignes, le problème que nous voudrions étudier ici. Il s'agit en réalité d'un problème de décision séquentielle ; car, quelle que soit la stratégie adoptée (une stratégie est le choix d'une fonction N(x) on risque de devoir effectuer un nombre quelconque de lancements successifs pour réaliser une commande donnée.

Nous pensons que des problèmes de ce type se rencontrent souvent dans les entreprises ; mais avec beaucoup de variantes :

---------------

(1) Si le coût de fabrication d'une rafale de N pièces était proportionnel à N il faudrait lancer X pièces pour en fabriquer X ; mais ce cas est tout à fait exceptionnel. En général, le coût unitaire moyen décroit quant la longueur de la rafale augmente. C'est ce que nous supposons réalisé ici.

- On peut rencontrer diverses <u>fonctions de coût</u> : $P = P(N)$ (P désigne le coût de fabrication d'une rafale de N pièces).

et diverses lois de probabilité de la fabrication : si on lance N pièces on obtient Y pièces bonnes. On suppose évidemment ici que Y peut être considéré comme un nombre aléatoire (compris entre 0 et N) et dont on connaît la loi de probabilité.

- On peut ou non supposer qu'on dispose de délais suffisants pour lancer éventuellement une ou plusieurs rafales supplémentaires.

- D'autre part, on peut envisager le stockage du surplus de fabrication (si on en espère la vente ultérieurement) ; auquel cas il faudra en évuluer le coût et la probabilité d'une vente future.

- Pour des raisons diverses (objets périssables ; manque de place ; demande future improbable...) on peut renoncer délibérément au stockage ; mais diverses solutions peuvent encore être envisagées pour utiliser le surplus (ou s'en défaire) : destruction, récupération, vente à bas prix...

Ces quelques indications, bien que très incomplètes, montrent assez la très grande variété des problèmes du type considéré. La théorie générale en serait très lourde et très pénible. Elle serait de plus bien inutile car si de multiples détails peuvent compliquer la résolution numérique, ils n'apportent pas de difficultés théoriques supplémentaires et la méthode de résolution reste toujours la même dans ses grandes lignes. C'est cette méthode que nous voudrions exposer en traitant un exemple numérique précis.

## 2 - METHODE DE RESOLUTION EXPOSEE SUR UN EXEMPLE

### 2.1 - Enoncé de l'exemple.

Une entreprise reçoit la commande de X pièces. Ces pièces sont produites en rafales. Le lancement d'une rafale de N pièces coûte $P(N) = 3 + 0,5\,N$ et la production est aléatoire : chacune des N pièces ainsi fabriquées est bonne avec la probabilité 0,7 (donc mauvaise avec la probabilité 0,3). Il y a indépendance en probabilité des résultats de chacune des pièces. Ainsi le nombre Y de pièces bonnes obéit à la loi binomiale $B(N\,;\,0,7)$. Enfin, si la commande ne peut pas être réalisée dans les délais voulus, cela constitue un préjudice évalué à 5X. Quelle est dans ces conditions la stratégie optimale ?

### 2.2 - Résolution par itération des lancements.

Une première méthode va fournir la solution du problème à la fois lorsque le nombre de lancements à envisager est borné et au contraire dans le cas où ce nombre peut être arbitrairement grand.

a) *Un seul lancement*

Cherchons d'abord la stratégie optimale lorsqu'on ne peut effectuer qu'un seul lancement. Soit X la commande. On lance une rafale de N pièces. Soit p la probabilité de réaliser $Y < X$. L'espérance mathématique du coût est alors :

$$C(N, X) = \underbrace{3 + 0,5\,N}_{\text{Coût de lancement}} + \underbrace{5\,p\,X}_{\text{Pénalisation}}$$

On cherche pour chaque valeur de X la valeur de N correspondante qui assure le coût minimum. On désigne par $L_1(X)$ la valeur de N retenue et par $C_1(X)$ le coût minimum(1).

*Exemple de calcul :*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| X = 3 | Pour | N = 5 | p = 0,163 | C = 3 + 2,5 + 15(0,16) = 7,94 |
| | - | N = 6 | p = 0,070 | C = 3 + 3 + 15(0,07) = 7,05 |
| | - | N = 7 | p = 0,028 | C = 3 + 3,5 + 15(0,02) = 6,92 |
| | - | N = 8 | p = 0,011 | C = 3 + 4 + 15(0,011) = 7,16 |

Il y a un seul optimum obtenu pour N = 7 ; le coût minimum correspondant est 6,92, d'où :

$$L_1(3) = 7 \qquad C_1(3) = 6,92$$

Les calculs ainsi effectués pour $X \leqslant 5$ donnent les résultats suivants :

Stratégies optimales pour un seul lancement

| Commande X | Lancement $L_1(X)$ | Coût $C_1(X)$ | Prob. de défaillance |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4,45 | 0,09 |
| 2 | 5 | 5,807 | 0,03 |
| 3 | 7 | 6,92 | 0,028 |
| 4 | 9 | 8,00 | 0,025 |
| 5 | 11 | 9,04 | 0,021 |

b) *Possibilité d'effectuer deux lancements.*

Soit X la commande. On lance une première rafale de N pièces et l'on obtient Y pièces bonnes.

Si $Y \geqslant X$ l'opération est terminée.

Si $Y < X$ il manque $X_1 = X - Y$ pièces. On effectue alors un deuxième lancement pour s'efforcer de réaliser $X_1$ pièces.

Ce lancement est alors le dernier ; son effectif optimal est donné par la loi $L_1$ précédente (2-2-a) c'est $N_1(X)$ et le coût de cette deuxième opération est $C_1(X)$. On a ainsi tous les éléments pour calculer l'espérance mathématique du coût de l'opération complète lorsque, pour produire X, on lance une première rafale de N pièces.

*Exemple* : X = 3 N = 5

| Nbrs obtenus Y | Proba. | Manque $X_1$ | Coût 2° lancement $C_1(X_1)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,002 | 3 | 6,92 |
| 1 | 0,028 | 2 | 5,807 |
| 2 | 0,133 | 1 | 4,45 |
| 3 au moins | | | |

(1) Pour abréger, on désignera dans la suite par "coût", l'espérance mathématique du coût considéré.

d'où : Coût de l'opération :

$$C_2(5;3) = \underbrace{3 + 2,5}_{\text{Premier lancement}} + \underbrace{(0,002).(6,92) + (0,028).(5,807) + (0,133).(4,45)}_{\text{Deuxième lancement éventuel}}$$

$$= 6,39$$

On trouve pour :

$N = 6 \qquad C(6\ ;\ 3) = 6,33$

$N = 7 \qquad C(7\ ;\ 3) = 6,63$

D'où la valeur minimale : 6,33 ; on la note $C_2(3) = 6,33$ ; tandis que $L_2(3) = 6$ (effectif optimal du premier lancement pour obtenir 3 objets lorsqu'on peut effectuer 2 lancements successifs).

Le tableau des résultats est le suivant :

Stratégies optimales pour deux Lancements

| Commande X | Lancement $L_2(X)$ | Coût $C_2(X)$ | P |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4,40 | 0,91 |
| 2 | 4 | 5,38 | 0,92 |
| 3 | 6 | 6,33 | 0,93 |
| 4 | 7 | 7,10 | 0,88 |
| 5 | 8 | 7,95 | 0,81 |

$L_2(X)$ est l'effectif du premier lancement ;
P désigne la probabilité de réaliser la commande en un seul lancement.

c) *Possibilité d'effectuer K lancements* ($K > 2$)

Le procédé précédent s'étend de proche en proche à un nombre quelconque de lancements.

Par exemple supposons qu'on puisse effectuer 3 lancements successifs. Soit N l'effectif du premier lancement et $Y_1$ le nombre de pièces bonnes issues de cette première rafale :

Si $Y_1 \geqslant X$ l'opération est terminée.

Si $Y_1 \leqslant X$ il faut alors en deux lancements s'efforcer de produire $X_1 = X - Y_1$ ; on en connait la stratégie optimale : à savoir $L_2(X_1)$ au deuxième lancement ; puis $L_1(X_2)$ au dernier, s'il manquait $X_2$ pièces après les deux premières rafales. Le coût de ces stratégies optimales est $C_2(X)$. Ainsi le calcul 2-2-b s'étend progressivement à un nombre quelconque de lancements. Supposons l'étude faite lorsqu'on peut effectuer K rafales successives et soit $C_k(X)$ le coût optimal de fabrication. On veut passer de K à K + 1 et soit N l'effectif du premier lancement. Désignons par $p_n$ la probabilité qu'il manque n pièces après cette première opération ($n = X - Y_1$). Le coût correspondant à cette stratégie (N pour X en K + 1 rafales) est :

$$C = 3 + 0,5\ N + \sum_{n=1}^{X} p_n\ C_k(n)$$

On détermine la valeur de N qui rend ce coût minimum ; cette valeur sera désignée par $L_{k+1}(X)$ et le coût par $C_{k+1}(X)$.

Stratégies optimales pour trois lancements

| Commande X | Lancement $L_3(X)$ | Coût $C_3(X)$ | P |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4,4 | 0,91 |
| 2 | 4 | 5,38 | 0,92 |
| 3 | 5 | 6,24 | 0,84 |
| 4 | 7 | 7,08 | 0,88 |
| 5 | 8 | 7,92 | 0,81 |

$L_3(X)$ est l'effectif du premier lancement.

On devine que, sous des hypothèses très larges, la suite $\{L_k(X)\}_k$ converge ainsi que la suite $\{C_k(X)\}_k$ ; ces suites convergent même très rapidement dans la mesure où les probabilités notées P dans les tableaux précédents sont grandes (ici, toutes supérieures à 0,8). En effet, on usera pratiquement jamais du droit d'effectuer plus de quatre lancements successifs [la probabilité en serait inférieure à $(0,2)^4 = 0,0016$] de sorte que, pouvoir effectuer 5 lancements ; ou 7 ; ou 15 sont, dans l'exemple étudié des situations pratiquement équivalentes ; elles conduisent aux mêmes stratégies L(X) et aux mêmes coûts C(X).

De plus, ces valeurs limites :

$$L(X) = \lim_{k=\infty} L_k(X) \qquad \text{et} \qquad C(X) = \lim_{k=\infty} C_k(X)$$

sont indépendantes des pénalisations (ici 5X) qu'on doit supporter dans le cas où la commande n'est pas réalisée. Il est bien clair en effet que dans le calcul des coûts, ces pénalisations seront affectées de probabilités très faibles lorsque K dépasse quelques unités (la contribution de ces valeurs sera pratiquement nulle pour $K > 4$). On peut donc déterminer ces fonctions sans faire intervenir cette pénalisation : c'est ce que nous allons faire maintenant.

### 2.3 - Recherche directe de la stratégie limite.

Désignons par L(X) la limite pour $K = \infty$ de $L_k(X)$ et par C(X) celle de $C_k(X)$. L(X) est l'effectif qu'il convient de donner à une rafale lorsqu'on a le droit d'effectuer un nombre quelconque de rafales successives. Ces valeurs L(X) et C(X) peuvent se déterminer de proche en proche pour X = 1 puis pour X = 2 ; X = 3, etc...

*Calcul de L(1) et de C(1).*

La stratégie optimale est la même pour tous les lancements successifs (on se retrouve chaque fois dans la même situation face à "l'éternité"). Supposons que l'on adopte la stratégie : lancer 1 pour obtenir 1.

Avec la probabilité 0,7 on obtient 1 pièce
" " " 0,3 il faut recommencer.

Le coût de l'opération est donc :

$$S^1(1) = \underset{\text{Premier lancement}}{3 + 0,5} + \underset{\text{Opérations suivantes}}{0,3\ S^1(1)} \qquad \text{d'où} \qquad S^1(1) = \frac{3,5}{0,7} = 5$$

La stratégie "lancer 2 pour obtenir 1" entraîne le coût $S^2(1)$ tel que:

$$S^2(1) = 3 + 1 + 0,09\ S^2(1) \qquad \text{d'où} \qquad S^2(1) = \frac{4}{0,91} = 4,4$$

(0,9 est la probabilité de ne pas réussir en une seule rafale).

On obtient ensuite :

$$S^3(1) = \frac{4,5}{1 - 0,027} = 4,6$$

La stratégie optimale est donc :

$$\underline{L(1) = 2} \qquad \text{qui donne} \qquad \underline{C(1) = 4,4}$$

*Calcul de L(2) et de C(2).*

On étudie ensuite les diverses stratégies pour obtenir 2. En cas d'échec : ou bien il faut à nouveau chercher à produire 2 et le coût sera S(2) inconnu ; ou bien chercher à produire 1, dont le coût est connu : C(1) = 4,4.

Exemple de calcul : on veut réaliser 2 ; on lance 4.

| Eventualités nombres obtenus | Proba. | Reste à produire |
|---|---|---|
| 0 | 0,008 | 2 |
| 1 | 0,076 | 1 |
| 2 ou plus | 0,916 | 0 |

coût :

$$S^4(2) = 3 + 2 + 0,008\ S^4(2) + 0,076\ C(1)$$
$$= 5 + 0,008\ S^4(2) + 0,3344$$

d'où

$$S^3(2) = \frac{5,3344}{1 - 0,008} = 5,37$$

on obtient :

$$S^3(2) = 5,48 \qquad \text{et} \qquad S^5(2) = 5,63$$

d'où finalement :

$$\underline{L(2) = 4} \qquad \text{et} \qquad \underline{C(2) = 5,37}$$

On calcule ensuite L(3) et C(3) à partir des valeurs précédentes ; puis L(4) et C(4) etc...

Les résultats sont donnés par le tableau suivant :

| Commande X | Lancement L(X) | Coût C(X) |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 4,4 |
| 2 | 4 | 5,37 |
| 3 | 5 | 6,24 |
| 4 | 7 | 7,08 |
| 5 | 8 | 7,92 |

Si l'on applique cette stratégie pour produire X ; les nombres d'objets qu'on cherche à produire dans les rafales successives sont : X ; $X_1$ ; $X_2$ ; $X_3$ ; ...

Ces nombres forment une suite de Markov homogène dans le temps. La matrice des probabilités de passage est la suivante :

Valeurs de $X_n$

| Valeurs de $X_{n+1}$ | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0,91 | 0,916 | 0,837 | 0,8740 | 0,80590 |
| | 1 | 0,09 | 0,076 | 0,133 | 0,0972 | 0,13613 |
| | 2 | | 0,08 | 0,028 | 0,0250 | 0,04668 |
| | 3 | | | 0,002 | 0,0036 | 0,0100 |
| | 4 | | | | 0,0002 | 0,00122 |
| | 5 | | | | | 0,00007 |

Cette suite de markov admet 0 comme seul état final. On atteint cet état au bout d'un temps fini avec une probabilité égale à 1. Les durées moyennes d'atteinte sont les suivantes :

$\bar{a}_{1.0} = 1,09$ $\bar{a}_{2.0} = 1,16$ $\bar{a}_{3.0} = 1,177$ $\bar{a}_{4.0} = 1,14$ $\bar{a}_{5.0} = 1,21$

Ainsi $a_{3.0} = 1,17$ est la durée moyenne pour passer de l'état 3 à l'état 0 ; c'est donc l'espérance mathématique du nombre de rafales nécessaires pour réaliser la commande X = 3 et cela en appliquant la stratégie optimale précédente.

Remarque : On a supposé ici que chaque lancement avait la même fonction de coût P(N) = 3 + 0,5 N. On peut au contraire considérer deux fonctions : l'une pour les rafales prévues (la première rafale de fabrication d'une commande entre dans cette classe) et un coût plus élevé pour les rafales supplémentaires, car celles-ci viennent perturber le plan de fabrication. Ce détail, de même que tous ceux qui ont été mentionnés au début, n'apportent aucun changement fondamental aux méthodes de résolution ; seules sont modifiées les règles de calcul des coûts.

Disons pour terminer un mot des difficultés pratiques qu'on rencontre pour traiter ce type de problème.

Ce n'est ni la méthode (finalement très simple), ni la longueur des calculs (ils sont à la portée d'une petite machine de bureau) qui présentent de réelles difficultés ; mais la collecte de données ; nous voulons dire :

- la loi de probabilité de la fabrication ;
- la fonction de coût.

Il faut pouvoir disposer de statistiques assez complètes pour estimer les fonctions précédentes.