

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. FORESTIER

Vers une solution d'ensemble du problème du tolérancement

Revue de statistique appliquée, tome 13, n° 3 (1965), p. 83-92

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_3_83_0

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VERS UNE SOLUTION D'ENSEMBLE DU PROBLÈME DU TOLÉRANCEMENT

M. FORESTIER

Ingénieur à la Société L.M.T.

1 - INTRODUCTION

Depuis 10 ans le sujet des publications dans ce domaine est basé sur :

1/ des méthodes non scientifiques abordant le problème par son aspect technique (ce qui ne veut pas dire qu'elles ne soient pas intéressantes).

2/ des méthodes scientifiques basées sur la statistique mathématique (c'est-à-dire addition quadratique des variances, mais ne traitant en général que d'une seule chaîne de cote).

Le but de ce papier est d'exposer les grandes lignes d'une méthode qui permette :

1/ de traiter le cas de nombreuses chaînes de cotes entremêlées ; c'est-à-dire qu'un même paramètre intervient en général dans plusieurs chaînes de cotes.

2/ de traiter le problème de la cotation des divers stades d'évolution d'un produit :

- cotation fonctionnelle de l'ensemble terminé ;
- cotation fonctionnelle des sous-ensembles à diverses étapes ;
- cotation fonctionnelle pièce détachée (c'est-à-dire en vue de son usage) ;
- cotation de fabrication d'usinage.

Cette méthode utilise la programmation linéaire.

Nous n'avons malheureusement pas eu l'occasion de l'appliquer du moins telle que nous allons la décrire.

2 - EXEMPLE

Pour plus de commodité, pour partirons d'un exemple (voir fig. 1 et 2).

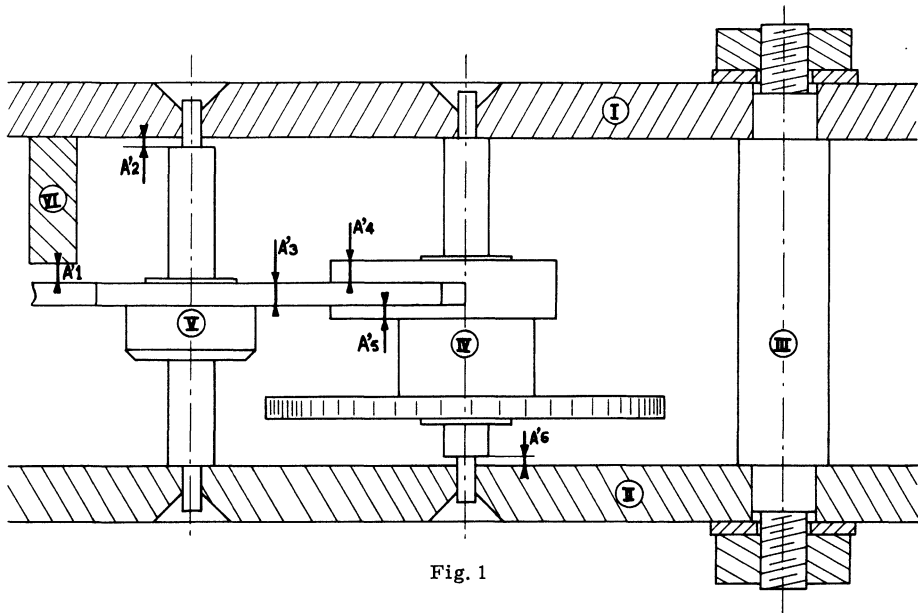


Fig. 1

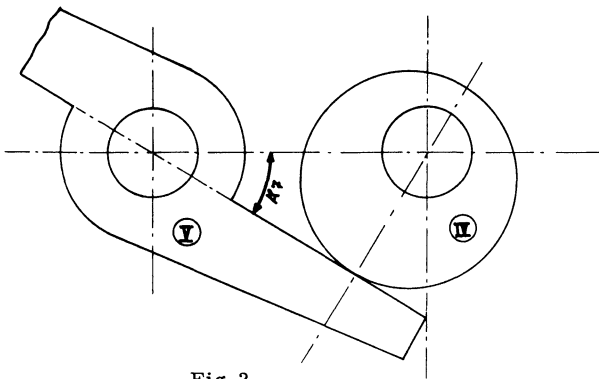


Fig. 2

Un mécanisme est composé de mobiles qui tourbillonnent entre deux platines repérées (I) et (II). Ces platines sont maintenues et positionnées entre elles par des piliers tels que (III). Le mobile (IV) reçoit son mouvement par une roue d'engrenage située à sa partie inférieure, il porte un excentrique qui commande un levier solidaire du mobile (V). La pièce (VI) est une entretoise, qui se trouve en contact avec la platine (I) et dont le rôle n'apparaît pas sur la figure.

De façon à simplifier notre exposé, nous n'avons retenu que quelques pièces parmi celles qui composent ce mécanisme.

3 - CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT AU NIVEAU DE L'ENSEMBLE

3.1 - De même nous n'avons pris en considération que quelques unes des conditions de fonctionnement, parmi celles qui sont nécessaires à la coopération correcte des pièces que nous avons retenues.

Ces conditions concernent les paramètres suivants :

$A_1^!$: sécurité entre le levier (V) et l'entretoise (VI) ;
 $A_2^!$: jeu axial du mobile (V) ;
 $A_3^!$: épaisseur du levier (pour des questions d'effort et d'usure);
 $A_4^!$ { Distances des faces du levier à celles de l'excentrique;
 $A_5^!$ { Elles conditionnent le bon contact de ces deux pièces ;
 $A_6^!$: jeu axial du mobile (IV) ;
 $A_7^!$: angle maximum du levier par rapport au plan des axes des deux mobiles.

3.2 - Notations.

i - indice du paramètre auquel on impose une condition.
 $A_i^!$: valeur réelle du paramètre ;
 A_i : valeur nominale du paramètre ;
 a_i : demi tolérance imposée au paramètre ;
 A_i , $A_i^!$ et a_i étant positifs.

3.3 - Condition de fonctionnement au niveau de l'ensemble.

$$A_i - a_i \leq A_i^! \leq A_i + a_i \quad (o)$$

3.4 - Caractère de l'étude technique de ce mécanisme.

Nous supposons que cette étude a pour objet de fixer :

- 1) toutes les cotes nominales (tant au niveau ensemble que sous-ensemble et pièce détachée).
- 2) toutes les conditions de fonctionnement au stade ensemble, telles que (o), à l'exclusion de toute autre caractéristique.

4 - CONDITIONS DE FONCTIONNEMENT AU NIVEAU DES SOUS-ENSEMBLES

Il nous faut maintenant transférer au niveau des sous-ensembles les conditions de fonctionnement mises en évidence au niveau de l'ensemble.

4.1 - Notations.

i : indice de paramètre d'un sous-ensemble auquel on impose une condition ;
 $B_i^!$: valeur réelle de ce paramètre ;
 B_i : valeur nominale de ce paramètre ;
 b_i : *tolérance cherchée sur ce paramètre à partir des relations telles que (o).*

Tous ces paramètres sont positifs.

4.2 - Relation entre les paramètres réels.

Voir figure 3 et 4, les croquis des sous-ensembles sur lesquels ont été portés les paramètres B_i utiles à la satisfaction des conditions (o).

$$A'_1 = B'_2 - B'_1 \quad (1)$$

(V) étant plaqué contre (I)

$$A'_2 = B'_{10} - B'_3 \quad (2)$$

$$A'_3 = B'_4 \quad (3)$$

$$A'_4 = B'_2 - B'_{10} + B'_7 \quad (4)$$

(V) étant plaqué contre (I) et (IV) contre (II).

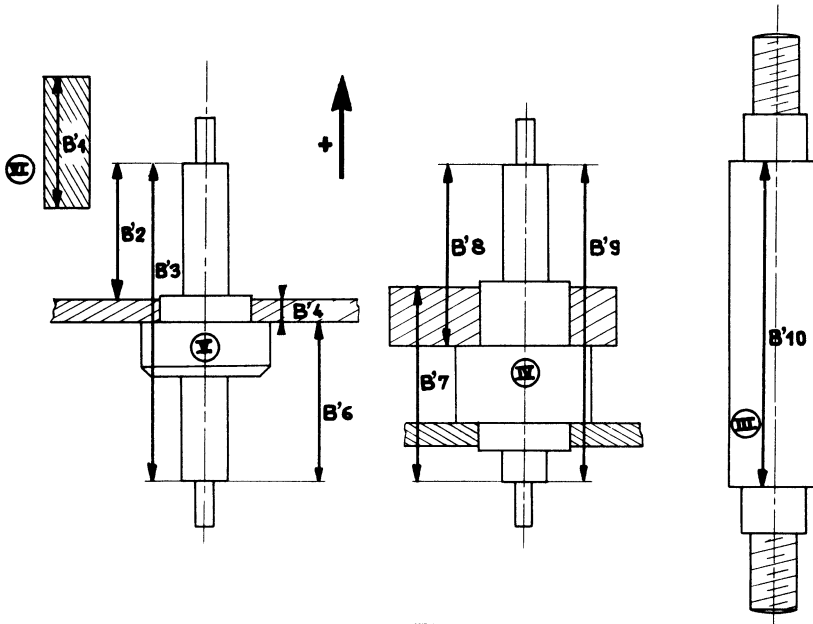


Fig. 3

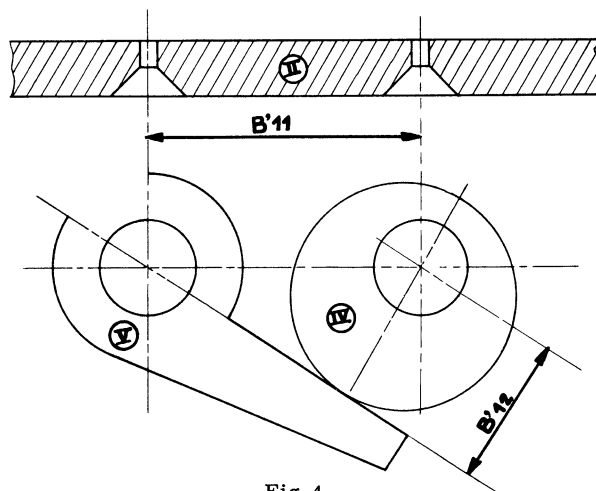


Fig. 4

$$A'_5 = B'_8 - B'_{10} + B'_6 \quad (5)$$

(V) étant plaqué contre (II) et (IV) contre (I) - position représentée sur la figure 1.

$$A'_6 = B'_{10} - B'_9 \quad (6)$$

$$\sin A'_7 = \frac{B'_{12}}{B'_{11}} \quad (7)$$

Pour obtenir ces relations, il suffit de suivre un contour vectoriel en se fixant un sens positif (vers le haut ici).

4.3 - Relation entre les valeurs nominales des paramètres.

Elles sont identiques à celles que nous avons établies entre les paramètres réels.

Exemple pour la relation (4) :

$$A_4 = B_2 - B_{10} + B_7 \quad (8)$$

et pour la relation (7)

$$\sin A_7 = \frac{B_{12}}{B_{11}} \quad (9)$$

4.4 - Notations.

Ecart entre la valeur réelle d'un paramètre et sa valeur nominale :

$$\alpha_i = A'_i - A_i$$

$$\beta_i = B'_i - B_i$$

4.5 - Relation entre les écarts des paramètres par rapport à leur valeur nominale.

Retranchons membre à membre (8) et (4) :

$$\alpha_4 = \beta_2 - \beta_{10} + \beta_7 \quad (10)$$

Nous obtenons une relation linéaire entre les écarts, mais il n'en serait pas de même si nous retranchions membre à membre (9) de (7).

Pour obtenir ces relations linéaire entre α_7 , β_{12} et β_{11} il nous faut *différencier totalement* la relation (9) et considérer que :

$$\text{différentielle de } A_7 = \alpha_7$$

$$\text{" de } B_{12} = \beta_{12}$$

$$\text{" de } B_{11} = \beta_{11}$$

$$\cos A_7 \cdot \alpha_7 = \frac{1}{B_{12}} \beta_{12} - \frac{B_{12}}{B_{11}^2} \beta_{11} \quad (11)$$

De même en différenciant totalement la relation (8), nous aurions obtenu la relation (10), mais dans ce cas, les différentielles sont rigoureusement égales aux écarts.

4.6 - Notations.

Nous supposons que les divers écarts suivent des lois de probabilité de nature quelconque.

Appelons $V\alpha_i$ la variance de α_i et $V\beta_i$ la variance de β_i .

4.7 - Relation entre les variances.

de (10) nous déduisons :

$$V\alpha_4 = V\beta_2 + V\beta_{10} + V\beta_7 \quad (12)$$

de (11) nous déduisons :

$$[\text{Cos } A_7]^2 V\alpha_7 = \left[\frac{1}{B_{11}} \right]^2 V\beta_{12} + \left[\frac{B_{12}}{B_{11}^2} \right]^2 V\beta_{11}$$

ou

$$V\alpha_7 = \left[\frac{1}{B_{11} \cdot \text{Cos } A_7} \right]^2 V\beta_{12} + \left[\frac{B_{12}}{B_{11}^2 \cdot \text{Cos } A_7} \right]^2 V\beta_{11} \quad (13)$$

4.8 - Introduction des conditions (o).

4.8.1 - Elles peuvent encore s'écrire :

$$-a_i \leq A_i - A_i \leq +a_i$$

ou encore :

$$-a_i \leq \alpha_i \leq +a_i$$

ou encore :

$$\alpha_i^2 \leq a_i^2 \quad (14)$$

4.8.2 - Or, on sait qu'une borne supérieure de α_i est, à un risque connu près : $K_i \sqrt{V\alpha_i}$

$$-K_i \sqrt{V\alpha_i} \leq \alpha_i \leq +K_i \sqrt{V\alpha_i} \quad \alpha_i^2 \leq K_i^2 \cdot V\alpha_i \quad (15)$$

où K_i est un coefficient :

- de la loi normale pour les cas où α_i suit une loi normale (soit que les paramètres β_i qui les composent suivent des relations telles que (10) et (11) suivent des lois normales, soit que leur nombre est important).

- tiré de l'inégalité de Camp-Meidell si α_i suit une loi dont on sait seulement qu'elle est convexe.

- tiré de l'inégalité de Bienaymé Tchébicheff, si α_i suit une loi tout à fait quelconque.

4.8.3 - A la condition (14) nous pouvons donc substituer compte tenu de (15), la condition suivante :

$$K_i^2 \cdot V\alpha_i \leq a_i^2$$

ou

$$V\alpha_i \leq \left(\frac{a_i}{K_i} \right)^2 \quad (16)$$

4.8.4 - Appliquons la condition (16) à la relation (12), nous obtenons :

$$V\beta_2 + V\beta_{10} + V\beta_7 \leq \left(\frac{a_4}{K_4}\right)^2$$

et à la relation (13)

$$\left[\frac{1}{B_{11} \cdot \cos A_7}\right]^2 V\beta_{12} + \left[\frac{B_{12}}{B_{11}^2 \cdot \cos A_7}\right]^2 V\beta_{11} \leq \left(\frac{a_7}{K_7}\right)^2$$

4.9 - Condition de fonctionnement au niveau des sous-ensembles.

L'application de la condition (o) aux relations (1) à (7) donne respectivement les conditions (21) à (27) cherchées :

$$V\beta_2 + V\beta_1 \leq \left(\frac{a_1}{K_1}\right)^2 \quad (21)$$

$$V\beta_{10} + V\beta_3 \leq \left(\frac{a_2}{K_2}\right)^2 \quad (22)$$

$$V\beta_4 \leq \left(\frac{a_3}{K_3}\right)^2 \quad (23)$$

$$V\beta_2 + V\beta_{10} + V\beta_7 \leq \left(\frac{a_4}{K_4}\right)^2 \quad (24)$$

$$V\beta_8 + V\beta_{10} + V\beta_6 \leq \left(\frac{a_5}{K_5}\right)^2 \quad (25)$$

$$V\beta_{10} + V\beta_9 \leq \left(\frac{a_6}{K_6}\right)^2 \quad (26)$$

$$\left[\frac{1}{B_{11} \cdot \cos A_7}\right]^2 V\beta_{12} + \left[\frac{B_{12}}{B_{11}^2 \cdot \cos A_7}\right]^2 V\beta_{11} \leq \left(\frac{a_7}{K_7}\right)^2 \quad (27)$$

5 - CES CONDITIONS SE RAMENENT FACILEMENT A UNE PROGRAMMATION LINEAIRE

5.1 - Il s'agit de trouver un ensemble de variances $V\beta_i$ qui satisfassent aux inégalités (21) à (27) tout en étant "aussi grandes que possible".

Les inégalités (21) à (27) constituent les *contraintes fonctionnelles* d'une programmation linéaire.

Les *contraintes de non négativité* $V\beta_i \geq 0$ sont respectées puisqu'il s'agit de variances.

Il reste à nous fixer un *objectif* tel que :

$$[m_1 V\beta_1 + m_2 V\beta_2 + \dots + m_{12} V\beta_{12}]_{\text{maximum}} \quad (28)$$

5. 2 - Remarques.

5. 2. 1 - Quel poids donner aux coefficients m_i .

Il s'agit d'éviter qu'aucun des $V\beta_i$ ne soit nul ou trop petit.

Appelons $S\beta_i$ la variance que l'on prévoit pour β_i , étant donné les conditions d'exécution.

Il est vraisemblable qu'associés aux coefficients m_i les plus grands, on trouvera les variances $V\beta_i$ les plus grandes.

On pourrait donc choisir des m_i égaux ou proportionnels aux $S\beta_i$.

5. 2. 2 - De plus, il sera pratiquement indispensable de poser d'autres contraintes fonctionnelles.

Par exemple : $V\beta_i \geq S\beta_i$

5. 2. 3 - On peut encore se fixer que les rapports

$$\frac{V\beta_1}{S\beta_1}, \frac{V\beta_2}{S\beta_2}, \dots, \frac{V\beta_i}{S\beta_i}$$

ne soient pas trop différents les uns des autres.

Cela peut s'exprimer en disant qu'un rapport tel que $\frac{V\beta_1}{V\beta_2}$ ne doit pas être trop différent de $\frac{S\beta_1}{S\beta_2}$, ou que

$$h_1 \leq \frac{V\beta_1}{V\beta_2} \leq h_2,$$

h_1 et h_2 étant deux constantes positives ; d'où :

$$V\beta_1 \leq h_2 V\beta_2$$

$$V\beta_1 \geq h_1 V\beta_2$$

et

$$V\beta_1 - h_2 V\beta_2 \leq 0$$

$$V\beta_1 - h_1 V\beta_2 \geq 0$$

On fait ainsi apparaître un certain nombre de contraintes fonctionnelles supplémentaires.

5. 2. 4 - Tolérance sur β_i . Elle est donnée par :

$$b_i = +k_i \sqrt{V\beta_i}, \quad b_i' = -k_i' \sqrt{V\beta_i}$$

b_i b_i' k_i k_i' étant positifs.

Le choix de k_i et k_i' est soumis à des considérations de risque, et de nature de la loi de probabilité de l'écart β_i (comme exposé précédemment à propos de α_i (voir § 482).

En général k_i sera égal à k_i' et la tolérance sera répartie symétriquement de part et d'autre de la cote nominale.

6 - POURSUITE DU TRAVAIL

6.1 - Passage des conditions de fonctionnement au niveau des sous-ensembles, aux conditions de fonctionnement au niveau des pièces détachées.

On procède exactement de la même façon.

6.2 - Passage des conditions de fonctionnement du niveau pièces détachées aux tolérances d'exécution.

Les cotes nominales d'exécution sont fournies par le Bureau de Méthodes suivant des considérations qui restent en dehors de notre étude. Ceci étant, le calcul est le même que celui que nous venons de décrire.

7 - REMARQUES DIVERSES

7.1 - Nous avons supposé dans tout ce qui précède que les moyennes des lois de distribution étaient confondues avec les cotes nominales. Ceci suppose une surveillance adéquate de la fabrication.

7.2 - Nous avons établi des relations entre les écarts des cotes par rapport à leur valeur nominale, en différentiant totalement les relations existantes entre cotes nominales.

Lorsque ces dernières relations ne sont pas linéaires, il en résulte une erreur dont il convient de vérifier après coup qu'elle est négligeable. Pour cela il suffit de porter dans ces relations, telles que (9), les cotes extrêmes autorisées par les tolérances trouvées.

7.3 - L'addition des variances des écarts β_i (différence entre les cotes réelles B_i' et les cotes nominales B_i) suppose que ces écarts soient des variables indépendantes.

On est certain de l'obtenir en n'utilisant qu'une seule cote par sous-ensemble ou pièce, dans une même chaîne de cote telle que (4).

7.4 - Dans le système d'inéquation (21) à (27) nous avons plus d'inconnues que d'inéquations. En le complétant par des relations de bon sens telles que :

$$V\alpha_2 = V\alpha_6$$

$$V\alpha_4 = V\alpha_5$$

et compte tenu du fait que ces inéquations sont à la limite des équations nous pouvons aboutir à un système linéaire de "n" équations à "n" inconnues.

Ce genre de système se résout en général assez bien, chaque équation ne comportant en général qu'un petit nombre d'inconnues.

7.5 - Une autre méthode de résolution de notre problème peut être la méthode itérative suivante :

Ecrivons :

$$V\beta_1 = x_1' S \beta_1$$

$$V\beta_2 = x_1' S \beta_2$$

(21) devient :

$$x_1' [S\beta_1 + S\beta_2] \leq \left(\frac{a_1}{K_1}\right)^2$$

$$(x_1')_{\text{maximum}} = x_1 = \frac{1}{S\beta_1 + S\beta_2} \left(\frac{a_1}{K_1}\right)^2$$

On obtient un coefficient x_j pour chaque inéquation.

On retient le plus petit et on l'applique à toutes les inconnues de l'inéquation correspondante, dont on trouve ainsi la solution.

On utilise les valeurs ainsi trouvées dans les autres inéquations, ce qui permet de mettre en évidence un nouveau facteur x_j pour chaque inéquation.

On retient le plus petit, et on recommence de la même façon.

Références :

R. CAVE - Le point de vue Statistique de l'interchangeabilité et la détermination rationnelle des tolérances.

Mécanique Industrielle - Décembre 1954.