

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

JEAN LESAVRE

Régression linéaire et plans barycentrés dans les dispositifs expérimentaux utilisés en agronomie

Revue de statistique appliquée, tome 13, n° 1 (1965), p. 95-118

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_1_95_0

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉGRESSION LINÉAIRE ET PLANS BARYCENTRÉS DANS LES DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX UTILISÉS EN AGRONOMIE ⁽¹⁾

Jean LESAVRE
Ingénieur à la Direction des Recherches
de la Compagnie de SAINT-GOBAIN

Lorsque l'homme désire connaître quelque secret de la nature, la méthode qu'il lui faut employer est toujours du même type : faire des expériences pour voir, pour savoir. Mais qui dit expériences dit en même temps mesures, et presque toujours répétition de ces mesures : on en arrive fatalement au dépouillement rationnel, le plus efficace possible des résultats, c'est-à-dire à la statistique mathématique.

Cette statistique appliquée apparaît donc au premier abord comme une recette à posteriori pour tirer le meilleur parti des chiffres que l'on a pu glaner dans le vaste champ des possibles. Mais, assez vite, le statisticien qui se penche sur les données numériques obtenues par les agronomes va faire ses remarques, ses objections, et finalement va donner ses conseils, à priori cette fois, sur la façon d'engager une nouvelle expérience.

En effet, remarquant tant les échecs que les réussites de certains types de plans, le statisticien en viendra à préférer les uns et à éliminer les autres. Il peut aussi raisonner dans l'abstrait et chercher le meilleur plan possible concernant une expérimentation que souhaite faire l'agronome. Dans cette recherche théorique il y a lieu de s'épargner tout travail inutile puisqu'il existe toute une littérature sur ces plans d'expériences. Depuis trois ou quatre décennies en effet, à la suite de R. FISHER, s'est développée, dans les pays anglo-saxons surtout, toute une école autour de ces questions de planification à priori des expériences. Nous n'avons pas l'espoir d'ajouter grand'chose à ces savants travaux.

CRITIQUE DE LA METHODE DES BLOCS

Pourtant, devant nos insuccès répétés, peu à peu s'est fait jour une idée qui semble manquer quelque peu d'orthodoxie en la matière. Nous avons à dépouiller de nombreux essais basés sur la méthode des blocs. En général, les agronomes avaient, d'eux mêmes, pris la précaution de tirer au sort la place de chaque traitement à l'intérieur de chaque bloc. On sait en outre qu'il y a autant de répétitions que de blocs, que l'on peut également placer des bordures autour des blocs, etc.

(1) Conférence présentée aux journées d'études et de discussion des anciens stagiaires des Centres de Formation Statistiques - juin 1963

Mais le statisticien, de son côté, prendra bien soin de ne pas perdre de vue l'hypothèse fondamentale sur laquelle repose ce type de plan : les blocs peuvent être de fertilité différente, mais à l'intérieur de chaque bloc, le terrain est homogène. La plupart du temps, cette méthode des blocs, avec répartition au hasard des traitements, nous a conduit à un échec. Bien entendu l'homogénéité du terrain devait être suspectée. C'était quelquefois le cas, mais les hétérogénéités extraordinaires, du type signalé par E.A. MITSCHERLICH [1], sont vraiment rares. Plus souvent les choses n'étaient pas si nettes et il nous semblait que nous avions affaire à une hétérogénéité légère et progressive d'un bout à l'autre du champ d'expérience. Nous doutions donc de la validité de la méthode de la répartition au hasard des traitements sur des parcelles variant de leur côté d'une façon régulière, faible, mais non aléatoire. Maintenant le doute a fait place à la certitude. Voici pourquoi :

Supposons quatre traitements : T, A, B, C - peu importe en effet que T représente un témoin - que l'on va répéter 4 fois, donc en 4 blocs. Représentons un certain profil de fertilité du terrain, compatible avec l'hypothèse de la méthode des blocs, en portant en abscisse une distance repérant la position sur le terrain, et en ordonnée une grandeur mesurant arbitrairement la fertilité.

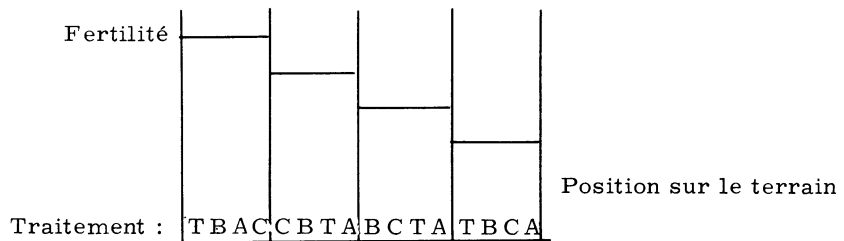


Fig. 1

Il est bien vrai que si le champ a ce profil de fertilité (figure 1), la méthode des blocs et sa méthode corollaire de tirage au sort est parfaite. Mais il faut être un pur "théoricien"⁽¹⁾ pour se figurer que l'agronome pourra rencontrer ne sera-ce qu'une fois dans sa carrière, un champ ayant ce profil en marches d'escalier, ou que le piquetage du champ peut venir justement coïncider avec les discontinuités de la fertilité. Nous savons tous que la nature a horreur du vide (jusqu'à 76 cm de mercure, dira plus précisément Pascal), nous savons qu'elle a, de même manière, horreur des discontinuités - c'est à dessein que nous choisissons un raisonnement analogique aussi peu convaincant, car nous savons bien qu'il y a des discontinuités dans la nature, et, en particulier, en agromonie - mais jamais ces discontinuités n'auront la régularité souhaitable pour pouvoir installer un dispositif basé sur la méthode des blocs.

Revenons sur notre exemple (nous l'avons tiré d'un guide à l'usage des agronomes), et faisons l'hypothèse d'une fertilité régulièrement décroissante de la gauche à la droite.

(1) Traduction libre et un tantinet péjorative de l'allemand "THEORITIKER".

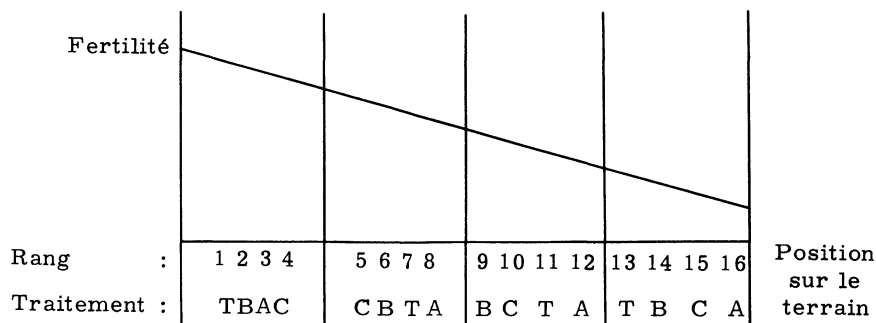


Fig. 2

Cette hypothèse est évidemment critiquable, et nous savons bien qu'elle est imparfaite, mais elle a le mérite d'être vraisemblable, et nous avons au cours de notre brève carrière (environ 4 ans) rencontré pas mal de tels champs où la fertilité varie de façon régulière (ou peu s'en faut).

Que vaut la méthode de la répartition au hasard avec cette hypothèse de régularité du gradient de fertilité ? Il est aisé de montrer sur notre exemple qu'elle conduit à des catastrophes. Supposons que T, A, B, et C soient des traitements identiques, le rendement est fonction linéaire du rang (ici, de 1 à 16). Il importe peu que cette fonction soit croissante ou décroissante, du moment qu'elle est linéaire. Le rendement total pour chaque traitement devient une fonction simple, en fait une somme algébrique, des rangs occupés par le traitement dans le dispositif.

$$T \text{ est fonction de : } 1 + 7 + 11 + 13 = 32$$

$$A \quad " \quad : 3 + 8 + 12 + 16 = 39$$

$$B \quad " \quad : 2 + 6 + 9 + 14 = 31$$

$$C \quad " \quad : 4 + 5 + 10 + 15 = 34$$

$$\text{Le total des nombres de 1 à 16 est : } 136$$

On voit donc ici que, la fonction étant décroissante, on a avantagé B et T, qu'on peut croire le meilleur rendement. De même on a pénalisé lourdement A que l'on peut croire de rendement inférieur. Seul C est estimé à sa juste valeur, parce que 34 est bien $136/4$. On en arrive à la conception de plans que nous appelons "barycentrés". Ici, 34 est en effet une moyenne, un barycentre - ou, mieux, une barysomme des rangs de parcelles. Pour que l'estimation du traitement soit sans biais, il faut et il suffit (dans cette hypothèse linéaire) que le barycentre de chaque traitement soit au centre du terrain : rang = 8,5 qui est bien $34/4$.

EMPLOI DU CARRE LATIN

Le carré latin possède justement cette propriété de barycentrage [2]. On la néglige un peu au profit d'autres propriétés remarquables dans l'ordre de la combinatoire ou de la décomposition en carrés de formes linéaires, mais à nos yeux ce barycentrage total des carrés latins (lignes et colonnes) est fondamental, physiquement et agronomiquement parlant. Cette remarque est bien dans la ligne de S. C. SALMON [3]

qui lui aussi cherche à étendre aux autres essais agronomiques des arrangements systématiques du type carré latin.

Reprenons notre exemple et essayons de former un carré latin, en portant le 1er bloc sur une ligne, le second sur la ligne du dessous, etc. on obtient :

	Tableau I	Tableau II
1er bloc	T B A C	T B A C
2ème bloc	C B T A	C a b t
3ème bloc	B C T A	a C T b
4ème bloc	T B C A	b t C A

Nous voyons que C est correctement disposé, on n'y touchera pas. Mais si l'on veut respecter la 1ère ligne (1er bloc), on est conduit au tableau II qui est un carré latin - les petites lettres représentent des parcelles qui ont changé d'affectation, les majuscules représentent des parcelles qui ont gardé le même traitement (9 sur 16 tout de même). Il ne reste plus qu'à déployer le carré latin de ce tableau II. Remarquez qu'on peut aussi bien le déployer par lignes ou par colonnes :

1/ par lignes :

T B A C C A B T A C T B B T C A : Traitement
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 : Rang

T est fonction de : $1 + 8 + 11 + 14 = 34$
 A " : $3 + 6 + 9 + 16 = 34$
 B " : $2 + 7 + 12 + 13 = 34$
 C " : $4 + 5 + 10 + 15 = 34$

1/ par colonnes :

T C A B B A C T A B T C C T B A

On pourra s'assurer que ce dispositif jouit de la même propriété de barycentrage que le précédent. On peut aussi le voir simplement : dans les deux. T et A sont inchangés, tandis que B et C permutent.

Ce carré latin déployé selon les lignes et selon les colonnes a en effet une propriété supplémentaire : chaque moitié du dispositif (gauche ou droite) est elle même barycentrée. Avec une telle disposition on peut faire face, comme nous venons de le voir, à un gradient de fertilité constant donnant une variation linéaire systématique d'un bout à l'autre du champ, mais on peut aussi s'accomoder d'un certain gradient pour la partie droite du terrain, et d'un gradient opposé pour la partie gauche. (Voir figure n° 3).

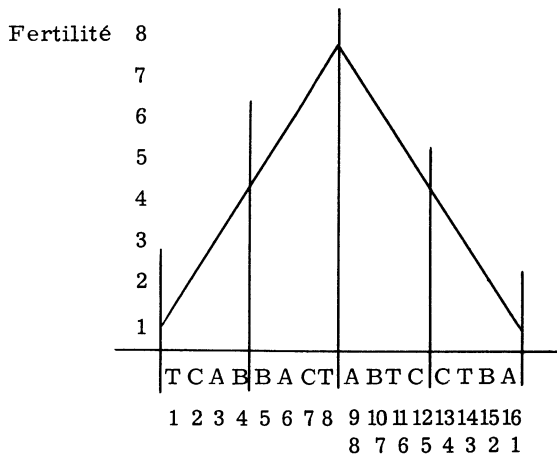


Fig. 3

Si nous supposons une fertilité de 1 à 8, puis de 8 à 1 dans la seconde partie (à droite) :

T est fonction de : $(1 + 8) + (6 + 3) = 2 \times 9 = 18$

A " : $(3 + 6) + (8 + 1) = 2 \times 9 = 18$

B " : $(4 + 5) + (7 + 2) = 2 \times 9 = 18$

C " : $(2 + 7) + (5 + 4) = 2 \times 9 = 18$

La moyenne de fertilité est : $4,5 \times 4 = 18$; bien entendu

Ce dispositif est évidemment précieux puisqu'il peut donner une réponse sans biais systématique à des champs présentant des profils de fertilité bien différents. Il est clair que seuls certains carrés latins - de côté pair - peuvent convenir pour des schémas de fertilité aussi variés.

On peut encore pousser un peu plus loin, en employant la répétition par symétries successives d'un bloc de base pris comme motif. Ici, il n'est plus question de carrés latins. Voir par exemple la figure n° 4.

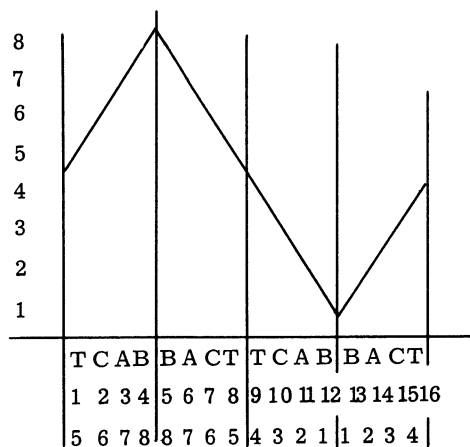


Fig. 4

Ce dispositif de la figure 4 fait lui aussi face à 2 types de schéma de fertilité.

1/ gradient de fertilité constant

où T est fonction de : $(1 + 8) + (9 + 16) = 34$
 A " : $(3 + 6) + (11 + 14) = 34$
 B " : $(4 + 5) + (12 + 13) = 34$
 C " : $(2 + 7) + (10 + 15) = 34 = 8,5 \times 4$

2/ gradient de fertilité présentant le profil de la figure n° 4 :

où T est fonction de : $(5 + 5) + (4 + 4) = 2 \times 9 = 18$
 A " : $(7 + 7) + (2 + 2) = 2 \times 9 = 18$
 B " : $(8 + 8) + (1 + 1) = 2 \times 9 = 18$
 C " : $(6 + 6) + (3 + 3) = 2 \times 9 = 18 = 4,5 \times 4$

On voit clairement qu'il ne faut pas aller trop loin dans la pratique car tout le dispositif repose au fond sur une hypothèse concernant la fertilité. On aura avantage à choisir un dispositif capable de faire face à plusieurs hypothèses, mais le plus simple possible (profils des figures n° 2 et n° 3 par exemple). Le dispositif s'adaptent bien au profil de la figure n° 4 ne doit être adopté qu'au seul cas où des travaux préliminaires ont pu établir que tel est bien le profil de fertilité du champ d'expérience.

Mais ce qui est encore plus remarquable, c'est que ces diverses hypothèses sur la fertilité du terrain ne sont pas exclusives, et toute combinaison linéaire des trois hypothèses possibles peut être acceptée par le dispositif décrit à la figure n° 3 (carré latin déployé, et doublement barycentré). Ces trois hypothèses sont :

1/ schéma de fertilité de la figure 1, c'est-à-dire blocs homogènes et distincts - nous rappelons que nous tenons cette hypothèse pour très improbable.

2/ schéma de fertilité de la figure 2, c'est-à-dire un certain gradient de fertilité d'un bout à l'autre du terrain.

3/ schéma de fertilité de la figure 3, c'est-à-dire deux gradients opposés dans les parties gauche et droite du terrain.

Nous donnons à la figure 5 un exemple d'un schéma de fertilité répondant ensemble à ces trois hypothèses. Cet exemple est ainsi construit :

	T	C	A	B	:	B	A	C	T	:	A	B	T	C	:	C	T	B	A	
Hypothèse 1 :	8	8	8	8	:	6	6	6	6	:	0	0	0	0	:	-2	-2	-2	-2	
Hypothèse 2 :	1	2	3	4	:	5	6	7	8	:	9	10	11	12	:	13	14	15	16	
Hypothèse 3 :	-1	-1,5	-2	-2,5	:	-3	-3,5	-4	-4,5	:	-4,5	-4	-3,5	-3	:	-2,5	-2	-1,5	-1	
Total	:	8	8,5	9	9,5	:	8	8,5	9	9,5	:	4,5	6	7,5	9	:	8,5	10	11,5	13

Dans le plan doublement barycentré :

T	est fonction de :	8	+	9,5	+	7,5	+	10	=	17,5	+	17,5	=	35	
A	"	:	9	+	8,5	+	4,5	+	13	=	17,5	+	17,5	=	35
B	"	:	9,5	+	8	+	6	+	11,5	=	17,5	+	17,5	=	35
C	"	:	8,5	+	9	+	9	+	8,5	=	17,5	+	17,5	=	35

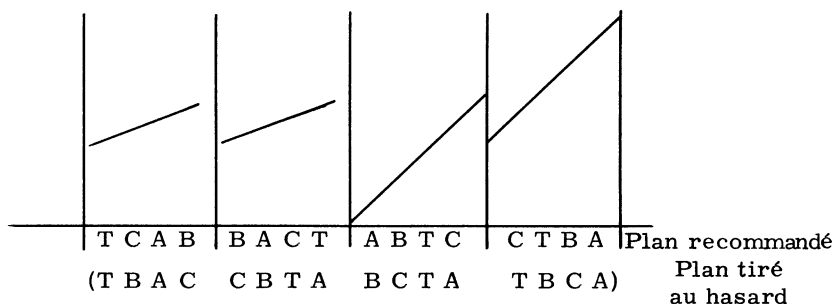


Fig. 5

Dans le plan tiré au hasard (celui de la figure 1) :

T	=	17,0	+	16,0	=	33,0	Affaibli
A	=	18,5	+	22,0	=	40,5	Nettement avantaé
B	=	17,0	+	14,5	=	31,5	Désavantaé
C	=	17,5	+	17,5	=	35,0	Correct

Là encore, le seul traitement C sera estimé correctement.

Tout ceci pourra surprendre, mais nous n'avons absolument rien inventé.

Nous avons du reste retrouvé chez plusieurs auteurs cette idée du barycentrage, et, pour ce faire, l'emploi du carré latin déployé. Cochran et Cox [4] l'emploient précisément en agronomie. Youden l'emploie dans un cas bien différent [5] : il s'agit de déterminer la valeur de 5 lots de munitions sur un unique canon de 16 inches. Etant donné ce qu'il sait de l'usure d'une bouche à feu, Youden préfère à l'arrangement au hasard un ordre de mise à feu systématique. Comme ces auteurs, nous avons fait usage de plans barycentrés, excluant pratiquement les plans randomisés, nous les avons utilisés souvent, et nous avons cherché à en connaître les limites et les possibilités exactes. En fait, à la réflexion, on s'aperçoit qu'on utilise par cette méthode antialéatoire la technique de la régression linéaire combinée à l'analyse de la variance.

Youden, bien entendu, ne manque pas de faire remarquer qu'on peut encore travailler efficacement sur un carré latin incomplet, amputé d'une ligne ou d'une colonne. Dans ce cas le nombre de répétitions est donc inférieur d'une unité au nombre des traitements : ce seraient, par exemple, 5 lots de 4 obus à essayer sur le canon de 16 inches. Au lieu de déployer un carré latin, on pourrait déployer un carré latin incomplet ou un "Youden square". Là le barycentrage n'est plus total,

c'est sans grande importance, étant donné qu'on pourra dépouiller le carré latin incomplet reconstitué selon la méthode habituelle, partant de la remarque combinatoire que toutes les paires de traitements se présentent un même nombre de fois. Par exemple, on pourrait partir du carré latin incomplet suivant :

Tableau III

Colonnes		A	B	C	D	(E)
Blocs	I	1	2	3	4	(5)
	II	2	3	4	5	(1)
	III	3	4	5	1	(2)
	IV	4	5	1	2	(3)
	V	5	1	2	3	(4)

En fait, pratiquement en agronomie, nous n'avons guère planifié de carré latin incomplet : il nous suffit de dépouiller comme tels des carrés latins incomplets que l'on doit amputer d'une ligne ou d'une colonne à la suite de mésaventures diverses : dégâts des oiseaux, ombre d'une haie, etc. De toutes façons, dans notre optique de barycentrage, le carré latin incomplet, n'est pas pleinement valable, pour nous ce n'est donc qu'un pis-aller.

EMPLOI DE CARRÉS LATINS EMMELES

Mais un autre cas où la technique du barycentrage peut apporter plus de certitude dans les résultats est le cas des plans à $2n$ traitements et n répétitions (n supérieur à 2).

La méthode est toujours la même, à base de carré latin déployé. Mais cette fois-ci on utilisera deux carrés latins ($n \times n$) emmêlés, de telle façon que le barycentrage soit correct. Il peut être parfait dans le cas où n est pair, il n'est qu'approché si le nombre n de répétitions est impair. Traitons, à titre d'exemple, le cas où il y a 8 traitements et 4 répétitions. On part d'un carré latin 4×4 . Rien n'empêche de le prendre magique, il n'en sera que plus "symétrique". On dit qu'un carré latin est magique si l'on peut le décomposer en des blocs (comprenant tous les traitements) autres que les lignes et les colonnes. Par exemple, au tableau IV, on peut diviser aussi le carré latin en 4 quadrants comprenant bien les traitements : 1, 2, 3, 4 ou 5, 6, 7, 8

Tableau IV

A		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">1</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">1</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> </table>	1	2	3	4	4	3	2	1	3	4	1	2	2	1	4	3		B		<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">8</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> </table>	5	6	7	8	7	8	5	6	6	5	8	7	8	7	6	5
1	2	3	4																																			
4	3	2	1																																			
3	4	1	2																																			
2	1	4	3																																			
5	6	7	8																																			
7	8	5	6																																			
6	5	8	7																																			
8	7	6	5																																			

Carré latin magique orthogonal au suivant

Carré latin magique orthogonal au précédent

Parmi les deux carrés latins orthogonaux à [A], rien n'empêche de choisir celui qui est également magique, soit : [B]. On dit que deux carrés latins sont mutuellement orthogonaux si, on les superposant, à tout traitement de l'un sont associés tous les traitements de l'autre, une fois et une seule, bien entendu.

On verra que 1 de [A] est effectivement associé à 5, à 6, à 7 et à 8 de [B]. De même, 8 de [B] est associé à 4, à 3, à 1, et à 2 de [A]. On pourra le vérifier pour les autres traitements.

Emmêlons maintenant ces deux carrés latins de façon à conserver un axe de symétrie central. On obtient le tableau V.

Tableau V

I	1 5	6 2	3 7	8 4
II	4 7	8 3	2 5	6 1
III	3 6	5 4	1 8	7 2
IV	2 8	7 1	4 6	5 3

Bien entendu, cette disposition n'est pas unique, ni non plus la façon de développer en une ligne unique. On peut préconiser le développement suivant :

	<u>Bloc A</u>	<u>Bloc B</u>	<u>Bloc C</u>	<u>Bloc D</u>
Traitements :	1 5 4 7 3 6 2 8 :	6 2 8 3 5 4 7 1 :	3 7 2 5 1 8 4 6 :	8 4 6 1 7 2 5 3
Rang :	1 2 3 4 5 6 7 8 :	9 10 11 12 13 14 15 16 :	17 18 19 20 21 22 23 24 :	25 26 27 28 29 30 31 31

On vérifiera que pour les 8 traitements la somme des rangs des 4 blocs est : 66. Et, en effet $66/4 = 16,5 =$ abscisse du barycentre.

Rien ne paraît s'opposer à une extension de la méthode chaque fois que le nombre de traitements sera multiple du nombre des répétitions. Le barycentrage ne pourra pas toujours être parfait, mais il existe toujours un optimum facile à établir par la méthode des carrés latins emmêlés. On aura toujours avantage à choisir des carrés latins orthogonaux, à cause des paires régulièrement formées et éventuellement magiques, car on peut alors retirer de la résiduelle une interaction due au terrain (dans notre exemple : interaction des 4 quadrants, 2 lignes, 2 colonnes, le degré de liberté de cette interaction est $(2 - 1)(2 - 1) = 1$).

En fait, nous n'avons pas employé concrètement cette méthode. Mais on voit ici se préciser une idée sous-jacente à notre travail. Nous cherchons à établir des plans "magiques", c'est-à-dire des plans analysables statistiquement de plusieurs façons différentes. L'un de ces dépouillements donnera sans doute satisfaction à l'agronome, tandis que les autres modes le laisseront dans l'incertitude. A ce moment, l'agronome pourra tout de même conclure, mais sans trop perdre de vue que le type de dépouillement qui lui a donné satisfaction correspond à certaines hypothèses à priori.

Si au contraire on arrivait à des résultats contradictoires (nous ne l'avons jamais constaté dans la pratique) on serait amené au rejet de l'ensemble des données numériques, ou tout au moins à l'amère constatation que l'on obtient n'importe quoi selon les hypothèses à priori, ce qui peut se concevoir, mais en fait, nous ne nous sommes jamais trouvé dans ce cas là.

Reprenons notre exemple du tableau V, et voyons les possibilités d'analyse offertes par ce plan ($8 \times 4 = 32$)

On trouve :

1/ 4 blocs : les lignes I, II, III, et IV

2/ 4 blocs : les 4 groupes de 2 colonnes contigues - c'est du reste ainsi que nous l'avons développé en ligne.

3/ 4 blocs : les 4 quadrants.

4/ enfin et surtout : 2 carrés latins (4×4) qui seront comparables, non pour des raisons de mathématiques, mais à cause de leur emmêlement concret sur le terrain. Et il y a toutes chances que ce soit ce dernier dépourvement en carrés latins qui donne satisfaction.

Il est à peine besoin de souligner, dans cette optique utilisant tous les recoupements et astuces possibles, que les "tireurs au sort" se vouent au contraire à une hypothèse unique, et par dessus le marché à la limite de l'invraisemblance.

Si nous avons bien compris leur mentalité, nous pourrions la résumer ainsi : le plan employé risque de ne pas donner à tous les traitements des chances égales, il faut donc que l'opérateur se garde de fixer lui-même la place des traitements dans le dispositif, car plus ou moins consciemment, d'une part il connaît son champ, d'autre part il souhaite prouver les avantages de tel ou tel traitement. L'opérateur ne se fiant pas à lui-même aura donc recours au hasard, en oubliant bien entendu que le hasard ne se charge d'opérer une équipartition raisonnable que si le nombre de tirages est extrêmement élevé. Tout le monde connaît la loi des grands nombres, mais bien peu savent que la convergence en probabilité est assez lente, il suffit de se rappeler les expériences de Weldon sur le jet de dés : les rétablissements à l'équilibre sont rares. Or, que faisons-nous avec le barycentrage, sinon d'établir cet équilibre dès le départ, à priori pour ainsi dire ?

CAS PARTICULIER DE 7 TRAITEMENTS

En général les agronomes hésitent à utiliser des carrés latins 7×7 , car, à juste titre, ils les trouvent bien onéreux. Youden a découvert des plans plus économiques - "Youden squares" 7×3 , et 7×4 - que nous utilisons. Mais nous avons de notre côté découvert (ou cru découvrir) des plans barycentrés 7×3 et 7×4 qui nous paraissent équivalents sinon supérieurs aux "Youden squares" correspondants. Les tableaux VI et VII donnent deux solutions possibles à ce problème d'économie des répétitions.

La propriété fondamentale des carrés latins incomplets (7×3), chaque couple de traitements ne figure qu'une seule fois - par exemple 1,2 dans le bloc II. Dans le carré latin incomplet (7×4), chaque couple de traitements figure deux fois - par exemple 1,2 dans les blocs III et IV.

On vérifiera que, dans le 7×3 , la somme des rangs est toujours égale à 12 - qu'elle est égale à 16 dans le 7×4 . Rien n'empêche d'emmêler physiquement sur le terrain des 7×3 ou 7×4 "Youden squares" ou barycentrés, on a alors une méthode vraiment économique pour traiter d'un seul coup 14 traitements par exemple

Tableau VI

		Répétitions			Répétitions				
		A	B	C	A	B	C	D	
Bloc	I	7	1	3	3	5	6	7	Carré latin incomplet ou "Youden square"
	II	1	2	4	4	6	7	1	
	III	2	3	5	5	7	1	2	
	IV	3	4	6	6	1	2	3	
	V	4	5	7	7	2	3	4	
	VI	5	6	1	1	3	4	5	
	VII	6	7	2	2	4	5	6	
		7×3			7×4				

Tableau VII

		Répétitions			Répétitions				
		A	B	C	A	B	C	D	
Bloc	I	1	5	6	1	5	4	6	Blocs à traitements barycentrés
	II	2	7	3	2	7	6	3	
(ou	III	3	4	7	3	1	7	2	
rang)	IV	4	1	2	4	2	5	7	
	V	5	6	4	5	3	1	4	
	VI	6	2	5	6	4	3	5	
	VII	7	3	1	7	6	2	1	
		7×3			7×4				

Bien entendu cela ne saute pas aux yeux que les plans du tableau VII sont barycentrés, mais, pour peu qu'on les regarde, leur systématique apparaîtra clairement et ne manquera pas d'horrorifier les partisans du tirage au sort. Nous devons bien avouer que nous allons leur concéder quelque chose.

UTILITE DU TIRAGE AU SORT

A nous entendre on pourrait croire que nous devons abandonner tout tirage au sort ? Nous n'avons pourtant jamais professé une opinion aussi extrême. Et, dans la vie courante, il nous arrive de tirer au sort pour prendre une décision, même importante. Cela fait sourire, mais il n'y a pas de quoi. Si vraiment on ne sait pas quoi faire, il n'y a aucune folie à prendre une décision à pile ou face. Dans notre cas, commençons par affecter les traitements aux parcelles de la façon la plus systématique possible, et si nous n'y arrivons pas parfaitement, alors tirons au sort, ou utilisons une table de nombre au hasard.

Prenons justement notre plan 7×4 barycentré. Nous avons fait tout le possible pour donner aux 7 traitements le même barycentre. Mais il reste bien clair que le traitement 1 a une disposition originale qu'on ne retrouve pour aucun autre. Expérience faite nous conseillons de l'employer comme témoin, si témoin il y a - Les traitements 3 et 6 sont disposés symétriquement autour de la ligne médiane, 6 aux extrémités, 3 dans la partie plus centrale sauf sur la ligne centrale - Les traitements 2, 4, 5 et 7, de la ligne centrale, sont disposés de façons analogues. On aura avantage à choisir pour (3) et (6) deux traitements dont on soupçonne l'équivalence, mais l'affectation finale des traitements (3) (6) et surtout (2) (4) (5) (7) ne peut se résoudre que par tirage au sort.

Reprenons l'exemple de nos carrés latins [A] et [B] du tableau IV. Il y a équipartition rigoureuse pour les 4 quadrants, du fait que les carrés [A] et [B] sont magiques.

Il y a plus encore : le carré [A] possède une symétrie de rotation : en effet une rotation d'un quart de tour remplace le traitement 1 par le traitement 2, puis 2 par 3, puis 3 par 4, puis 4 par 1 et ainsi de suite. La symétrie est ici si complète qu'on peut hésiter : un tirage au sort n'est pas vraiment nécessaire. Il peut être utile cependant, car il existe d'autres facteurs que le terrain, par exemple : les vents dominants, l'exposition au soleil, etc.

Par contre, le carré [B] possède une symétrie de rotation qui n'est plus que binaire : en effet un quart de tour autour de centre du carré latin, échange bien 5 et 8, mais n'échange plus 6 et 7. 6 et 7 sont toutefois (comme 5 et 8) symétriques par rapport aux axes et diagonales du carré latin. Bref, on doit distinguer deux types de places : (5 et 8) ou (6 et 7) et l'on peut passer d'un groupe à l'autre par aucune opération géométrique simple. On devra donc ici tirer au sort car ces deux groupes ne jouent pas le même rôle.

Enfin se précise donc le rôle, réel mais mineur, du tirage au sort, c'est un pur rôle d'affectation dans le cas du carré [A], c'est un rôle un peu plus actif dans le cas du carré [B]. Mais c'est à notre avis un tort grave que de vouloir tracer le dispositif à coups de dés - ou de table de nombres au hasard - il nous paraît infiniment plus rationnel et plus habile de bâtir un plan hypercomplexe, barycentré et symétrisé au maximum qu'on pourra dépouiller de multiples façons, c'est-à-dire au fond suivant plusieurs types d'hypothèses.

Ce plan, pour complexe qu'il soit, aura sans doute encore quelques imperfections de détail : on pourra essayer non pas de les pallier, c'est impossible, mais par un tirage au sort, de rendre le biais objectivement aléatoire si l'on craint une tendance (aussi subjective qu'inconsciente) à solliciter les chiffres dans un sens déterminé. On n'a pas manqué de nous objecter que l'utilisation de ces plans magiques était un véritable tour de passe-passe et que notre honnêteté scientifique était plutôt celle du charlatan. Je suis prêt à concéder qu'elle a quelque chose du prestidigitateur. Mais je voudrais souligner en passant deux états d'esprit qui rendent le dialogue bien difficile entre les "tireurs au sort" et les "systématiques", si j'ose dire. Les premiers attendent de l'expérience agronomique une décision : on se met d'accord sur un protocole (comportant tirage au sort ou non), on l'exécute, et l'on dépouille le plan selon des hypothèses et méthodes convenues d'avance. Il n'y a

dans ce cas qu'un résultat possible - par exemple l'engrais A est supérieur à l'engrais B - dans l'absolu - du moins, on le croit. Les seconds sont des chercheurs qui espèrent tirer de l'expérience agronomique un renseignement : ils ne veulent donc perdre aucun élément d'information et faire face à l'avance à toutes sortes d'hypothèses - par exemple, l'engrais A est supérieur à l'engrais B si la fertilité du champ varie régulièrement d'un bord à l'autre - donc connaissance toute relative plus apte à orienter une nouvelle expérience qu'à justifier une décision définitive.

Nous allons essayer de montrer par une voie différente le bien fondé de notre façon de faire : choix d'un plan barycentré, suivi d'un tirage au sort uniquement pour l'affectation des traitements aux divers groupes de parcelles.

EMPLOI DE LA REGRESSION DANS L'ANALYSE DE LA VARIANCE

Nous parlions à l'instant de ne pas perdre d'information dans le dépouillement des résultats. L'analyse de la variance peut être conduite de plusieurs façons. On a généralement l'habitude de conduire le dépouillement des essais agronomiques comme si les facteurs (blocs) étaient simplement qualificatifs. Ceci nous paraît insuffisant et il serait bon de ne pas perdre de vue que les blocs se suivent sur le terrain et qu'ils forment un dispositif continu. Ces niveaux du facteur (lignes ou colonnes) du champ sont donc à traiter comme des niveaux parfaitement quantifiés - on sera évidemment obligé de se contenter d'une approximation discontinue d'une variable au fond continue, qui est l'abscisse ou l'ordonnée du champ. Pour la simplicité des calculs on fera choix d'abscisses et d'ordonnées, en quelque sorte réduites, et les plus simples possibles : 0, 1, 2, etc. Cette distinction fondamentale entre facteurs qualitatifs et quantitatifs est bien connue. On la trouve, par exemple, dans O.L. DAVIES [6] - on la retrouve chez d'autres auteurs, par exemple, Victor CHEW [7], qui applique cette technique à la force requise pour séparer des connexions électriques sous différents angles. Une analyse de variance classique, en considérant les niveaux du facteur angle de traction comme qualitatifs, laisse croire que, jusqu'à 6°, la force moyenne de traction n'est pas significativement influencée par l'angle - ce qui est bien douteux, d'autant plus qu'une analyse de régression de la force sur l'angle indique clairement que cette force croît régulièrement avec l'angle et qu'un ajustement linéaire convient. Dans le cas concret de l'agronomie les variables de position seront équidistantes et on pourra faire un usage constant de la méthode de décomposition en effets linéaires, quadratiques, etc. par les polynômes orthogonaux de Tchebycheff-Fisher. Ces méthodes ne sont guère compliquées, mais nous avons voulu les rendre encore plus simples, si possible. Actuellement dans l'analyse de variance classique on fait l'hypothèse de blocs homogènes, pour ne pas dire d'un terrain homogène. Nous considérons au contraire les résultats agronomiques, portés sur la verticale des centres de chaque parcelle, comme formant un nuage de points. Par cet ensemble de points, nous faisons passer un plan de régression passant au mieux par tous les points, et ce n'est qu'après avoir retiré cet effet linéaire, attribué au champ, que nous faisons une analyse de variance - qui sera généralement bien plus fine et bien plus décisive que l'analyse globale classique.

Mais il y a, pour ce faire, une condition : ce plan de régression doit être bien caractéristique du terrain et ne doit pas dépendre des traitements et de leur disposition. On voit bien que si les traitements donnant un haut rendement sont groupés à un bout du champ, si les traitements à faible rendement sont groupés à l'opposé des premiers - et la répartition au hasard peut conduire à un tel dispositif - le plan de régression n'a aucune signification réelle pour le terrain et laisserait même croire que tous les traitements sont équivalents. Il faut donc répartir judicieusement les traitements sur les parcelles, et il suffit, pour obtenir un plan de régression bien correct, que les traitements soient barycentrés. En effet si tous les traitements ont bien même barycentre, celui du terrain, aucun traitement ne viendra peser sur le plan de régression, et aucun effet linéaire (des lignes ou des colonnes) ne peut provenir des traitements. S'il y en a un, nous sommes donc bien obligés de l'attribuer au terrain. Voilà donc l'essentiel de l'avantage du plan barycentré sur le plan randomisé : on a par cette méthode, séparé un effet terrain (linéaire) des effets d'ordre supérieur qui, eux, peuvent être dus soit aux traitements, soit au terrain. Nous repoussons ainsi un peu plus loin l'incertitude qui plane toujours sur les essais agronomiques où l'on risque souvent de confondre l'effet traitements et l'effet terrain.

Bien sûr on pourra objecter que si l'effet terrain est quadratique, par exemple, au lieu d'être linéaire, le plan barycentré ne pourra que nous induire en erreur, et nous faire attribuer aux traitements ce qui est dû en fait au terrain. C'est un risque à courir, mais le danger d'une lourde erreur est néanmoins très faible. En effet nous saurons que l'effet linéaire est très petit, puisque nous le calculons, et notre attention sera alertée. Mais en fait cela se passe plus simplement, et l'expérience nous a montré que l'effet linéaire était dominant, et c'est même ce qui nous a aiguillé vers ces plans barycentrés, si éloignés des plans randomisés.

On pourrait espérer trouver des plans éliminant les effets linéaires et quadratiques dûs au terrain, en fait nos recherches, assez limitées du reste, nous ont toujours ramené au carré latin, dispositif anti-hasard s'il en fut, mais parfaitement bien admis pour les champs d'expériences agronomiques. Pour finir nous allons donner un exemple détaillé de 7×4 barycentré.

EXEMPLE

Plan 7×4 barycentré et son dépouillement statistique. Il s'agit du plan dont le schéma est donné au tableau VII.

Les résultats sont les suivants :

Tableau VIII

	T	+N	NPK	+P	37,24	55,72	40,04	44,80	
	NP	+K	+P	NK	39,48	45,08	49,28	47,04	
	NK	T	+K	NP	44,24	38,64	49,84	48,72	
(A)	NPK	NP	+N	+K	49,00	50,68	56,28	55,16	(B)
	+N	NK	T	NPK	52,36	52,36	42,84	52,92	
	+P	NPK	NK	+N	51,80	47,88	51,52	55,44	
	+K	+P	NP	T	47,32	52,92	52,92	44,80	

Il s'agit d'une culture d'orge - la parcelle est de 2,16 ares - les résultats sont en kg - une légère modification des chiffres originaux nous a permis de les rendre tous multiples de 0,28 (pure simplification de calcul).

	DdL
La somme des carrés générale est : 791,0560	27
Le carré de l'effet linéaire des lignes est : 152,3168	1
Le carré de l'effet linéaire des colonnes est : 47,7478	1
La somme des carrés restante est : 589,9914	25

L'ajustement linéaire pour les lignes est le suivant :

Valeurs expérimentales : 44,45 - 45,22 - 45,36 - 52,78 - 50,12 - 51,66 - 49,49
 Valeurs ajustées : 44,93 - 46,10 - 47,27 - 48,44 - 49,61 - 50,78 - 51,95

Pour les colonnes l'ajustement linéaire est le suivant :

Valeurs expérimentales : 45,92 - 49,04 - 48,96 - 49,84
 Valeurs ajustées : 46,688 - 47,856 - 49,024 - 50,192

On peut établir facilement le tableau de l'ajustement linéaire sachant que la valeur la plus faible (en haut et à gauche) est : 43,178. Le saut par ligne est : + 1,170 et le saut par colonnes est : + 1,168.

On obtient le tableau IX.

Tableau IX

(A) Valeurs théoriques du plan de régression	(B) Valeurs réelles rapportées au plan de régression
43,178	-5,938
44,346	+11,374
45,514	-5,474
46,682	-1,882
44,348	-4,868
45,516	-0,436
46,684	+2,596
47,852	-0,812
45,518	-1,278
46,686	-8,046
47,854	+1,986
49,022	-0,302
46,688	+2,312
47,856	+2,824
49,024	+7,256
50,192	+4,968
47,858	+4,502
49,026	+3,334
50,194	-7,354
51,362	+1,558
49,028	+2,772
50,196	-2,316
51,364	+0,156
52,532	+2,908
50,198	-2,878
51,366	+1,554
52,534	+0,386
53,702	-8,902

On pourra vérifier que la somme des carrés des valeurs du tableau IX (B) est bien : 589,9914 pour DdL = 25.

On procède alors à la transposition habituelle à la méthode des blocs, ou l'on fait apparaître les traitements et où l'on conserve les colonnes. On obtient le tableau X.

On remarquera, et ceci est bien normal, que les colonnes moyennes des traitements : tableaux X (A) et (B) sont rigoureusement équivalentes, à une translation de 48,44 près c'est justement la moyenne générale. Ces deux tableaux ont donc la même somme de carrés en ce qui regarde les traitements. Il est donc parfaitement inutile de faire tous ces calculs et d'établir tous ces tableaux : seuls sont utiles les 2 tableaux qu'on considère habituellement : tableau VIII (B) et tableau transposé X (A).

Nous ne les avons faits ici qu'à titre d'exemple et de justification concrète de la méthode.

Tableau X

T	37,24	38,64	42,84	44,80	40,88	-5,938	-8,046	-7,354	-8,902	-7,56
NP	39,48	50,68	52,92	48,72	47,95	-4,868	+2,824	+0,386	-0,302	-0,49
NK	44,24	52,36	51,52	47,04	48,79	-1,278	+3,334	+0,156	-0,812	+0,35
NPK	49,00	47,88	40,04	52,92	47,46	+2,312	-2,316	-5,474	+1,558	-0,98
+N	52,36	55,72	56,28	55,44	54,95	+4,502	+11,374	+7,256	+2,908	+6,51
+P	51,80	52,92	49,28	44,80	49,70	+2,772	+1,554	+2,596	-1,882	+1,26
+K	47,32	45,08	49,84	55,16	49,35	-2,878	-0,436	+1,986	+4,968	+0,91

(A) Valeurs réelles transposées du tableau VIII (B)

(B) Valeurs rapportées au plan de régression transposées du tableau IX (B)

De plus on remarquera donc que les sommes ou moyennes par traitements sont en quelque sorte "ajustées" ou "corrigées" dès le départ, et qu'aucune modification n'interviendra, en particulier au moment du classement final. Or l'agriculteur connaît bien ses chiffres, et il a bien de la peine à admettre qu'une raison mathématique (Cas du carré latin incomplet) peut bouleverser l'ordre de ses résultats. On aboutit ainsi à l'analyse de variance finale : Tableau XI.

S.C.G.	791,0560	27					
S.C.E.L. lignes	153,3168	1	153,3168	16,08	4,45	SIGN.	
S.C.E.L. colonnes	47,7478	1	47,7478	5,01	4,45	SIGN.	
S.C. traitements	413,0896	6	68,8583	7,22	2,70	SIGN.	
S.C. colonnes	14,8378	2	7,4189	0,78	3,59		
Résiduelle	162,0640	17	9,5332				
	S.C.	DdL	Variance	F	F 5%		

L'analyse de variance classique conduit à une variance résiduelle de 18,00 environ pour DdL = 18. Les traitements sont significativement différents : $F = 3,94$ pour 2,66 - en effet ils diffèrent du témoin. Par notre analyse on obtient un C.V. de 6,38 % et une différence significative de 4,60 permet de distinguer :

- 1/ le meilleur : + N = 54,95
- 2/ les autres : + P, + K, NK, NPK
- 3/ enfin le Témoin : T = 40,88

CONCLUSION

Une inclination personnelle et une remarque technique nous ont conduit à établir et à utiliser ces plans barycentrés. En effet, d'une part nous préférons en toutes choses symétrie et équilibre à hasard et désordre, d'autre part nous avons remarqué, en agronomie, que le carré de l'effet linéaire était presque toujours prédominant. Et c'est ainsi que, suivant notre pente fatale, nous en sommes arrivés à ces plans barycentrés, où l'effet linéaire peut être séparé des autres effets. Pour des commodités pratiques de calcul, pour la satisfaisante beauté des résultats, nous en sommes restés là.

Mais il nous paraît bien certain que cette méthode qui emploie la technique de la régression linéaire dans l'analyse de la variance est susceptible d'aplanir toutes difficultés entre les tenants du hasard et ceux de la symétrie. En effet - pour peu que le nombre de répétitions soit au moins égal à 3 - on peut toujours, quel que soit le dispositif calculer un plan de régression par traitement. On pourra tester si ces plans peuvent se fondre en un plan moyen, et, dans ce cas, entreprendre une analyse de variance beaucoup plus décisive que par la méthode classique des blocs. Les partisans du tirage au sort pour la construction du dispositif auront toutefois un gros handicap sur leurs confrères partisans du barycentrage : la lourdeur de leurs calculs, il est vrai que cela ne compte plus guère à l'ère du calculateur électronique. Finalement, tout bien pesé, nous croyons pouvoir renvoyer dos à dos les partisans de l'arrangement systématique et ceux de l'arrangement au hasard, mais peut-être n'avons nous que déplacé le problème et qu'une polémique acharnée va s'élever entre les partisans de l'analyse de variance et ceux de la régression multiple. Et l'on retrouvera pratiquement les mêmes clans en présence : ceux-ci partisans du continu et ceux-là partisans du discontinu, ceux-ci voulant ajuster, lisser et relier les résultats, et ceux-là voulant croire que les résultats sortent d'une urne. Insensiblement nous avons quitté le domaine de la science...

RECHERCHE DE PLANS RECTANGULAIRES BARYCENTRES

Il est bien entendu que si l'on désire avoir des plans carrés et barycentrés la solution est immédiate : il suffit d'utiliser les très classiques carrés latins. Mais que faire si l'on veut barycentrer des rectangles ? Existe-t-il d'abord des rectangles barycentrés ?

Pendant de longs mois, nous nous sommes contenté des rectangles (7×3 et 7×4 , 7 traitements, 3 ou 4 répétitions).

Nous ignorions si ce résultat, était unique ou susceptible de quelque généralisation. La méthode que nous avons employée pour découvrir des rectangles barycentrés est trop peu rigoureuse pour être décrite en détail. D'ailleurs l'essentiel pour nous était l'établissement de quelques rectangles barycentrés à proposer aux agronomes utilisateurs.

APERCU DE LA METHODE UTILISEE

Les rectangles sont toujours disposés de la même façon : le petit côté est horizontal, ce sont les lignes qui forment des blocs incomplets ne contenant pas tous les traitements - le grand côté du rectangle est

vertical, ce sont les colonnes qui forment les blocs complets contenant tous les traitements. Nous avons donc des rectangles : $t \times r$ (t traitements et r répétitions, avec $r < t$). En effet il nous a paru inutile d'étudier le cas où le nombre des répétitions serait supérieur au nombre des traitements : nous travaillons dans une optique de stricte économie de moyens.

Nous pouvons tout de suite éliminer deux cas, qui conduisent à une impossibilité évidente.

Cas (t, 1) et (t, t - 1)

Si'il n'y a pas de répétition, le barycentre de chaque traitement est celui de la parcelle contenant le traitement, il est clair que deux parcelles ou plus ne peuvent être confondues.

Si'il y a (t - 1) répétitions, le cas est un peu moins évident, mais il est en quelque sorte complémentaire du précédent.

Le carré latin (t, t) existe toujours. Si on lui retranche une colonne unique (non barycentrable) il est bien clair que le résidu ne peut pas l'être non plus, puisque le total des deux, le carré latin, est barycentré. Par ailleurs le cas (t, t - 1) a reçu une solution définitive, basée sur la combinatoire des paires de traitements : c'est le "Youden square", ou carré latin incomplet.

Cas (t, 2) et (t, t - 2)

Le cas (t, 2) est très simple : il suffit d'écrire dans la 1ère colonne les traitements dans un certain ordre et dans la 2ème les traitements dans l'ordre inverse. Mais là on est amené à distinguer deux cas :

1/ t est pair - le barycentrage est rigoureux, et il n'y a pas de répétition d'un même traitement dans une ligne.

2/ t est impair - le barycentrage reste rigoureux, mais il y a obligatoirement répétition du même traitement dans la ligne du milieu. Ceci pourra choquer les utilisateurs, mais non les mathématiciens habitués à la régression linéaire ou utilisant les décompositions en polynômes orthogonaux.

Le cas (t, t - 2) paraît complémentaire du précédent. On a un barycentrage rigoureux et sans répétition si t est pair, et un barycentrage rigoureux avec des répétitions si t est impair. Dans ce cas, les répétitions ne sont pas limitées à la ligne centrale, et il y en a nécessairement plus d'une.

Cas (t, 3)

A partir de 3 répétitions inclus, nous arrivons au cas général. Numérotions les lignes de 1 à t, en commençant par le haut. On est amené à distinguer deux cas :

1/ t est impair, donc de la forme : $2k + 1$.

Les colonnes comportant tous les $2k + 1$ traitements sont automatiquement barycentrées, il suffit de barycentrer les lignes.

Le barycentre est dans la ligne médiane, à $k + 1$; comme on a 3 colonnes - 3 répétitions - la barysomme des rangs d'un traitement sera : $3(k + 1)$. C'est un nombre entier que l'on peut obtenir par l'addition de 3 termes qui sont les rangs des lignes donc compris de 1 à $2k + 1$, et ceci sans répétition. Par exemple pour $t = 7$, $k = 3$, $k + 1 = 4$, $3(k + 1) = 12$. On trouve 5 solutions qui sont :

$$1 + 4 + 7 = 12 \quad 2 + 4 + 6 = 12 \quad 3 + 4 + 5 = 12 \quad 1 + 5 + 6 = 12 \quad 2 + 3 + 7 = 12$$

A priori pour que le problème de disposer 7 traitements soit soluble il faudrait au moins 7 solutions. Nous n'en avons que 5, mais on peut répéter les solutions $1 + 5 + 6 = 12$ $2 + 3 + 7 = 12$.

On remarque alors que ces 7 solutions contiennent 3 fois tous les chiffres compris entre 1 et 7. Il ne reste alors qu'un problème annexe de disposition des traitements sur le terrain, puisqu'on sait, par exemple, que le traitement 1 est à placer aux lignes 1, 4 et 7, que le traitement 2 est à placer aux lignes 2, 4 et 6, que le traitement 3 est à placer aux lignes 2, 3 et 7, etc.

Nous n'avons pas rencontré de difficultés réelles pour cette disposition finale, bien que nous n'ayons jamais pu procéder autrement que par tâtonnements.

Pour le cas de $t = 9$, on a une excellente solution en emmêlant des carrés latins 3×3 .

Pour le cas de $t = 11$, il s'agit d'abord de réaliser 18 en 3 coups de 1 à 11, ce qui donne 13 solutions ; on trouve vite les 2 solutions à éliminer, il en reste alors 11, qui permettent d'établir le rectangle barycentré (11,3).

Pour le cas $t = 13$, il s'agit de réaliser 21 en 3 coups de 1 à 13, ce qui donner 18 solutions, on trouve au moins une solution en éliminant 5 solutions, ce qui ramène à 13 solutions et permet de construire le rectangle (13,3).

2/ t est pair, donc de la forme : $2k$

Le barycentre est entre les 2 lignes médianes à $k + \frac{1}{2}$; et comme on a 3 colonnes la barysomme des rangs d'un traitement sera : $3(k + \frac{1}{2})$, qui n'est pas un nombre entier. Il n'y a donc pas de rectangle barycentré $(2k, 3)$: le barycentrage ne peut être qu'approximatif, et non plus rigoureux.

Ainsi pour le (4,3) 2 lignes auront 8 pour barysomme et 2 autres lignes automatiquement n'auront que 7, puisque la barysomme exacte serait : $3(2 + \frac{1}{2}) = 7,5$.

Pour le (6,3) on aura avantage à emmêler 2 carrés latins 3×3 , ce qui donnera 10 ou 11 pour une valeur exacte de : $3(3 + \frac{1}{2}) = 10,5$.

Nous donnons également le (8,3) et le (10,3) - Quant au (12,3) on l'obtient en emmêlant 4 carrés latins (3×3) .

Cas (t, 4)

On peut employer la méthode générale en commençant par établir les diverses solutions donnant la barysomme des rangs des traitements, en les répétant s'il n'y en a pas assez, puis en disposant les traitements sur le terrain, puisqu'à ce moment on sait quels traitements doivent rentrer dans chaque ligne, mais sans connaître encore leur place exacte.

Que t soit pair ou impair, le problème est toujours résoluble, rigoureusement.

Pour le (5, 4), plusieurs solutions sont possibles, mais elles nécessitent toutes des répétitions des traitements dans les lignes.

Pour les (6, 4) (7, 4), on doit consentir à des répétitions inégales de paires de traitements.

Pour le (8, 4), la solution qui s'impose est l'emmêlement de 2 carrés latins (4 x 4).

Nous donnons un exemple des (9, 4) (10, 4) (11, 4) (13, 4) (14, 4).

Pour le (12, 4), on emmêlera 3 carrés latins (4 x 4).

Cas (t, 5) et supérieurs

Nous n'en n'avons étudié que de rares cas, 5 répétitions et plus pour 6 traitements et plus nous paraissant des cas pratiques bien rares, parce que trop onéreux généralement.

Cas complémentaires du type (t, t - r)

Le plus gros du travail a déjà été fait lors de l'établissement du cas (t, r) - puisqu'on sait, par différence, les traitements qui doivent apparaître dans chaque ligne et que le travail de disposition finale est sans difficulté majeure.

Si l'on rapproche les deux rectangles (t, r) et (t, t - r) on obtient un carré latin, à supposer qu'on ait pu éviter les répétitions dans les lignes. On obtient ainsi un carré latin (txt) qui jouit de la propriété originale de pouvoir se fractionner en deux rectangles, eux-mêmes barycentrés comme le sont les carrés latins. Ces rectangles barycentrés conservent-ils quelque autre propriété des carrés latins, c'est la question qu'on peut se poser.

Dans les plans donnés on pourra toujours permuter les colonnes à volonté, voire les tirer au sort.

RECTANGLES BARYCENTRES

4 x 2	5 x 2	5 x 3	5 x 4	6 x 2	et	6 x 4																																																																																									
<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr></table>	1	4	2	3	3	2	4	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	4	2	1	5	3	3	5	1	2	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	1	5	4	3	2	3	2	1	5	4	4	2	5	3	1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	5	3	2	2	4	4	1	3	3	5	5	4	2	1	4	5	1	2	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td></tr></table>	1	6	2	5	3	4	4	3	5	2	6	1		<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table>	2	3	4	5	3	1	6	4	1	2	5	6	6	5	2	1	4	6	1	3	5	4	3	2
1	4																																																																																														
2	3																																																																																														
3	2																																																																																														
4	1																																																																																														
4	2																																																																																														
1	5																																																																																														
3	3																																																																																														
5	1																																																																																														
2	4																																																																																														
1	5	4																																																																																													
3	2	3																																																																																													
2	1	5																																																																																													
4	4	2																																																																																													
5	3	1																																																																																													
1	5	3	2																																																																																												
2	4	4	1																																																																																												
3	3	5	5																																																																																												
4	2	1	4																																																																																												
5	1	2	3																																																																																												
1	6																																																																																														
2	5																																																																																														
3	4																																																																																														
4	3																																																																																														
5	2																																																																																														
6	1																																																																																														
2	3	4	5																																																																																												
3	1	6	4																																																																																												
1	2	5	6																																																																																												
6	5	2	1																																																																																												
4	6	1	3																																																																																												
5	4	3	2																																																																																												

7×3	et	7×4	7×2	7×5	(8×4)																																																																																																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr> </table>	3	2	7	1	4	5	5	6	4	6	3	1	2	7	6	7	1	2	4	5	3		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	1	5	4	6	2	7	6	3	3	1	7	2	4	2	5	7	5	3	1	4	6	4	3	5	7	6	2	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td></tr> </table>	1	7	2	6	3	5	4	4	5	3	6	2	7	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>2</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	2	1	4	6	3	1	2	7	3	5	6	3	5	7	4	7	5	1	2	7	4	4	6	5	6	5	6	2	4	1	3	7	3	1	2	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	7	8	5	6	4	3	2	1	6	5	8	7	3	4	1	2	2	1	4	3	8	7	6	5
3	2	7																																																																																																																																					
1	4	5																																																																																																																																					
5	6	4																																																																																																																																					
6	3	1																																																																																																																																					
2	7	6																																																																																																																																					
7	1	2																																																																																																																																					
4	5	3																																																																																																																																					
1	5	4	6																																																																																																																																				
2	7	6	3																																																																																																																																				
3	1	7	2																																																																																																																																				
4	2	5	7																																																																																																																																				
5	3	1	4																																																																																																																																				
6	4	3	5																																																																																																																																				
7	6	2	1																																																																																																																																				
1	7																																																																																																																																						
2	6																																																																																																																																						
3	5																																																																																																																																						
4	4																																																																																																																																						
5	3																																																																																																																																						
6	2																																																																																																																																						
7	1																																																																																																																																						
2	1	4	6	3																																																																																																																																			
1	2	7	3	5																																																																																																																																			
6	3	5	7	4																																																																																																																																			
7	5	1	2	7																																																																																																																																			
4	4	6	5	6																																																																																																																																			
5	6	2	4	1																																																																																																																																			
3	7	3	1	2																																																																																																																																			
1	2	3	4																																																																																																																																				
5	6	7	8																																																																																																																																				
7	8	5	6																																																																																																																																				
4	3	2	1																																																																																																																																				
6	5	8	7																																																																																																																																				
3	4	1	2																																																																																																																																				
2	1	4	3																																																																																																																																				
8	7	6	5																																																																																																																																				

9×2	9×4	et	9×5	8×2	et	8×6																																																																																																																																																																			
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td></tr> </table>	1	9	2	8	3	7	4	6	5	5	6	4	7	3	8	2	9	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>8</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>9</td><td>5</td></tr> </table>	5	4	7	8	2	6	3	9	6	9	5	1	3	1	8	7	4	2	1	3	9	8	2	4	7	5	6	2	1	7	4	6	8	3	9	5		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>8</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>9</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>9</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>4</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	9	6	4	1	5	7	8	2	3	8	4	7	9	5	2	6	4	5	6	7	8	9	6	7	1	3	5	8	9	4	1	3	3	8	9	5	2	7	4	6	2	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td></tr> <tr><td>3</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>8</td><td>1</td></tr> </table>	1	8	2	7	3	6	4	5	5	4	6	3	7	2	8	1		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>8</td><td>7</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>7</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	3	4	5	6	7	1	4	3	6	5	8	4	1	2	7	8	5	3	2	1	8	7	6	6	7	8	1	2	3	5	8	7	2	1	4	8	5	6	3	4	1	7	6	5	4	3	2
1	9																																																																																																																																																																								
2	8																																																																																																																																																																								
3	7																																																																																																																																																																								
4	6																																																																																																																																																																								
5	5																																																																																																																																																																								
6	4																																																																																																																																																																								
7	3																																																																																																																																																																								
8	2																																																																																																																																																																								
9	1																																																																																																																																																																								
5	4	7	8																																																																																																																																																																						
2	6	3	9																																																																																																																																																																						
6	9	5	1																																																																																																																																																																						
3	1	8	7																																																																																																																																																																						
4	2	1	3																																																																																																																																																																						
9	8	2	4																																																																																																																																																																						
7	5	6	2																																																																																																																																																																						
1	7	4	6																																																																																																																																																																						
8	3	9	5																																																																																																																																																																						
1	2	3	9	6																																																																																																																																																																					
4	1	5	7	8																																																																																																																																																																					
2	3	8	4	7																																																																																																																																																																					
9	5	2	6	4																																																																																																																																																																					
5	6	7	8	9																																																																																																																																																																					
6	7	1	3	5																																																																																																																																																																					
8	9	4	1	3																																																																																																																																																																					
3	8	9	5	2																																																																																																																																																																					
7	4	6	2	1																																																																																																																																																																					
1	8																																																																																																																																																																								
2	7																																																																																																																																																																								
3	6																																																																																																																																																																								
4	5																																																																																																																																																																								
5	4																																																																																																																																																																								
6	3																																																																																																																																																																								
7	2																																																																																																																																																																								
8	1																																																																																																																																																																								
2	3	4	5	6	7																																																																																																																																																																				
1	4	3	6	5	8																																																																																																																																																																				
4	1	2	7	8	5																																																																																																																																																																				
3	2	1	8	7	6																																																																																																																																																																				
6	7	8	1	2	3																																																																																																																																																																				
5	8	7	2	1	4																																																																																																																																																																				
8	5	6	3	4	1																																																																																																																																																																				
7	6	5	4	3	2																																																																																																																																																																				

(9×3)	et	(9×6)	10×4	11×3																																																																																																																																																										
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr> </table>	4	5	6	7	8	9	1	2	3	9	7	8	3	1	2	6	4	5	2	3	1	5	6	4	8	9	7		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>9</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	7	8	9	4	5	6	1	2	3	7	8	9	4	5	6	6	4	5	3	1	2	9	7	8	6	4	5	3	1	2	9	7	8	8	9	7	5	6	4	2	3	1	8	9	7	5	6	4	2	3	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>3</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>7</td><td>9</td><td>5</td></tr> <tr><td>8</td><td>10</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>10</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>9</td><td>2</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	4	6	5	8	10	3	9	1	3	7	2	7	9	5	8	10	7	4	6	5	8	9	3	4	6	10	10	6	1	2	4	9	2	8	7	3	5	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>5</td><td>11</td><td>7</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>11</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>1</td></tr> </table>	6	1	8	7	2	10	11	9	4	3	5	9	5	11	7	1	3	2	4	10	6	8	4	3	10	8	5	2	6	11	9	7	1
4	5	6																																																																																																																																																												
7	8	9																																																																																																																																																												
1	2	3																																																																																																																																																												
9	7	8																																																																																																																																																												
3	1	2																																																																																																																																																												
6	4	5																																																																																																																																																												
2	3	1																																																																																																																																																												
5	6	4																																																																																																																																																												
8	9	7																																																																																																																																																												
1	2	3	7	8	9																																																																																																																																																									
4	5	6	1	2	3																																																																																																																																																									
7	8	9	4	5	6																																																																																																																																																									
6	4	5	3	1	2																																																																																																																																																									
9	7	8	6	4	5																																																																																																																																																									
3	1	2	9	7	8																																																																																																																																																									
8	9	7	5	6	4																																																																																																																																																									
2	3	1	8	9	7																																																																																																																																																									
5	6	4	2	3	1																																																																																																																																																									
1	2	4	6																																																																																																																																																											
5	8	10	3																																																																																																																																																											
9	1	3	7																																																																																																																																																											
2	7	9	5																																																																																																																																																											
8	10	7	4																																																																																																																																																											
6	5	8	9																																																																																																																																																											
3	4	6	10																																																																																																																																																											
10	6	1	2																																																																																																																																																											
4	9	2	8																																																																																																																																																											
7	3	5	1																																																																																																																																																											
6	1	8																																																																																																																																																												
7	2	10																																																																																																																																																												
11	9	4																																																																																																																																																												
3	5	9																																																																																																																																																												
5	11	7																																																																																																																																																												
1	3	2																																																																																																																																																												
4	10	6																																																																																																																																																												
8	4	3																																																																																																																																																												
10	8	5																																																																																																																																																												
2	6	11																																																																																																																																																												
9	7	1																																																																																																																																																												

11×4	(15×3)	14×4	13×4																																																																																																																																																																																																					
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>5</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>10</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>11</td><td>6</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td>11</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>10</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr> </table>	1	3	4	6	8	7	5	1	2	5	11	9	9	4	10	2	3	10	7	8	10	11	6	7	11	6	9	3	5	2	8	11	4	8	2	10	6	9	1	4	7	1	3	5	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>14</td><td>15</td><td>13</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>12</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>9</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>10</td></tr> <tr><td>15</td><td>13</td><td>14</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	14	15	13	6	4	5	12	10	11	2	3	1	8	9	7	9	7	8	11	12	10	15	13	14	3	1	2	5	6	4	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>14</td><td>11</td><td>10</td></tr> <tr><td>2</td><td>13</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>12</td><td>13</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td>14</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>10</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>11</td><td>4</td><td>7</td><td>14</td></tr> <tr><td>12</td><td>3</td><td>8</td><td>13</td></tr> <tr><td>13</td><td>2</td><td>9</td><td>12</td></tr> <tr><td>14</td><td>1</td><td>10</td><td>11</td></tr> </table>	1	14	11	10	2	13	12	9	3	12	13	8	4	11	14	7	5	10	1	6	6	9	2	5	7	8	3	4	8	7	4	3	9	6	5	2	10	5	6	1	11	4	7	14	12	3	8	13	13	2	9	12	14	1	10	11	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>7</td><td>11</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>13</td><td>7</td></tr> <tr><td>8</td><td>13</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>11</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>11</td><td>10</td><td>12</td><td>13</td></tr> <tr><td>10</td><td>7</td><td>5</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>12</td><td>9</td><td>3</td></tr> <tr><td>12</td><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>13</td><td>4</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	4	6	5	8	10	12	3	9	7	11	9	1	13	7	8	13	3	5	2	11	6	4	11	10	12	13	10	7	5	2	4	12	9	3	12	6	1	8	6	3	8	10	13	4	11	9	7	5	2	1
1	3	4	6																																																																																																																																																																																																					
8	7	5	1																																																																																																																																																																																																					
2	5	11	9																																																																																																																																																																																																					
9	4	10	2																																																																																																																																																																																																					
3	10	7	8																																																																																																																																																																																																					
10	11	6	7																																																																																																																																																																																																					
11	6	9	3																																																																																																																																																																																																					
5	2	8	11																																																																																																																																																																																																					
4	8	2	10																																																																																																																																																																																																					
6	9	1	4																																																																																																																																																																																																					
7	1	3	5																																																																																																																																																																																																					
1	2	3																																																																																																																																																																																																						
4	5	6																																																																																																																																																																																																						
7	8	9																																																																																																																																																																																																						
10	11	12																																																																																																																																																																																																						
13	14	15																																																																																																																																																																																																						
14	15	13																																																																																																																																																																																																						
6	4	5																																																																																																																																																																																																						
12	10	11																																																																																																																																																																																																						
2	3	1																																																																																																																																																																																																						
8	9	7																																																																																																																																																																																																						
9	7	8																																																																																																																																																																																																						
11	12	10																																																																																																																																																																																																						
15	13	14																																																																																																																																																																																																						
3	1	2																																																																																																																																																																																																						
5	6	4																																																																																																																																																																																																						
1	14	11	10																																																																																																																																																																																																					
2	13	12	9																																																																																																																																																																																																					
3	12	13	8																																																																																																																																																																																																					
4	11	14	7																																																																																																																																																																																																					
5	10	1	6																																																																																																																																																																																																					
6	9	2	5																																																																																																																																																																																																					
7	8	3	4																																																																																																																																																																																																					
8	7	4	3																																																																																																																																																																																																					
9	6	5	2																																																																																																																																																																																																					
10	5	6	1																																																																																																																																																																																																					
11	4	7	14																																																																																																																																																																																																					
12	3	8	13																																																																																																																																																																																																					
13	2	9	12																																																																																																																																																																																																					
14	1	10	11																																																																																																																																																																																																					
1	2	4	6																																																																																																																																																																																																					
5	8	10	12																																																																																																																																																																																																					
3	9	7	11																																																																																																																																																																																																					
9	1	13	7																																																																																																																																																																																																					
8	13	3	5																																																																																																																																																																																																					
2	11	6	4																																																																																																																																																																																																					
11	10	12	13																																																																																																																																																																																																					
10	7	5	2																																																																																																																																																																																																					
4	12	9	3																																																																																																																																																																																																					
12	6	1	8																																																																																																																																																																																																					
6	3	8	10																																																																																																																																																																																																					
13	4	11	9																																																																																																																																																																																																					
7	5	2	1																																																																																																																																																																																																					
	13×3	(12×4)																																																																																																																																																																																																						
	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>4</td><td>6</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>12</td><td>2</td><td>11</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>11</td><td>7</td><td>13</td></tr> <tr><td>9</td><td>13</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>12</td><td>4</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>10</td><td>6</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>10</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>4</td><td>11</td><td>9</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	4	6	5	8	10	3	9	7	12	2	11	11	7	13	9	13	5	2	1	3	8	12	4	10	6	12	13	10	2	6	3	8	4	11	9	7	5	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>8</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	7	8	5	6	4	3	2	1	10	9	12	11	12	11	10	9	3	4	1	2	6	5	8	7	11	12	9	10	8	7	6	5	2	1	4	3																																																																																																															
1	4	6																																																																																																																																																																																																						
5	8	10																																																																																																																																																																																																						
3	9	7																																																																																																																																																																																																						
12	2	11																																																																																																																																																																																																						
11	7	13																																																																																																																																																																																																						
9	13	5																																																																																																																																																																																																						
2	1	3																																																																																																																																																																																																						
8	12	4																																																																																																																																																																																																						
10	6	12																																																																																																																																																																																																						
13	10	2																																																																																																																																																																																																						
6	3	8																																																																																																																																																																																																						
4	11	9																																																																																																																																																																																																						
7	5	1																																																																																																																																																																																																						
1	2	3	4																																																																																																																																																																																																					
5	6	7	8																																																																																																																																																																																																					
9	10	11	12																																																																																																																																																																																																					
7	8	5	6																																																																																																																																																																																																					
4	3	2	1																																																																																																																																																																																																					
10	9	12	11																																																																																																																																																																																																					
12	11	10	9																																																																																																																																																																																																					
3	4	1	2																																																																																																																																																																																																					
6	5	8	7																																																																																																																																																																																																					
11	12	9	10																																																																																																																																																																																																					
8	7	6	5																																																																																																																																																																																																					
2	1	4	3																																																																																																																																																																																																					

Les rectangles soulignés comportent des répétitions du même traitement dans les lignes.

Les rectangles entre parenthèses sont formés par emmêlement de plusieurs carrés latins.

Les rectangles barycentrés reliés entre eux sont complémentaires et leur réunion forme un carré latin.

RECTANGLES QUASI-BARYCENTRES

<u>4 × 3</u>	(6 × 3)	8 × 3	10 × 3	(12 × 3)																																																																																																																																												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	4	3	3	2	4	4	1	2	1	3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	6	4	5	2	3	1	5	6	4	3	1	2	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>4</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	5	6	7	8	3	4	7	5	8	3	4	1	6	2	6	4	8	3	2	7	5	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>3</td><td>10</td></tr> <tr><td>3</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>9</td><td>2</td></tr> </table>	2	6	8	9	1	3	4	5	7	7	10	9	10	4	1	5	2	6	8	3	10	3	8	5	6	7	4	1	9	2	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>6</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>12</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>10</td></tr> <tr><td>9</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>4</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	6	4	5	12	10	11	8	9	7	2	3	1	11	12	10	9	7	8	3	1	2	5	6	4																				
1	2	4																																																																																																																																														
3	3	2																																																																																																																																														
4	4	1																																																																																																																																														
2	1	3																																																																																																																																														
1	2	3																																																																																																																																														
4	5	6																																																																																																																																														
6	4	5																																																																																																																																														
2	3	1																																																																																																																																														
5	6	4																																																																																																																																														
3	1	2																																																																																																																																														
1	2	5																																																																																																																																														
6	7	8																																																																																																																																														
3	4	7																																																																																																																																														
5	8	3																																																																																																																																														
4	1	6																																																																																																																																														
2	6	4																																																																																																																																														
8	3	2																																																																																																																																														
7	5	1																																																																																																																																														
2	6	8																																																																																																																																														
9	1	3																																																																																																																																														
4	5	7																																																																																																																																														
7	10	9																																																																																																																																														
10	4	1																																																																																																																																														
5	2	6																																																																																																																																														
8	3	10																																																																																																																																														
3	8	5																																																																																																																																														
6	7	4																																																																																																																																														
1	9	2																																																																																																																																														
1	2	3																																																																																																																																														
4	5	6																																																																																																																																														
7	8	9																																																																																																																																														
10	11	12																																																																																																																																														
6	4	5																																																																																																																																														
12	10	11																																																																																																																																														
8	9	7																																																																																																																																														
2	3	1																																																																																																																																														
11	12	10																																																																																																																																														
9	7	8																																																																																																																																														
3	1	2																																																																																																																																														
5	6	4																																																																																																																																														
(10 × 5)	ou	10 × 5	8 × 5																																																																																																																																													
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>10</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	5	1	2	3	4	7	8	9	10	6	8	9	10	6	7	4	5	1	2	3	9	10	6	7	8	3	4	5	1	2	10	6	7	8	9	2	3	4	5	1		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>10</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>2</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>6</td></tr> <tr><td>1</td><td>7</td><td>10</td><td>9</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>10</td><td>4</td><td>1</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>4</td><td>8</td><td>3</td><td>10</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td><td>8</td><td>5</td><td>9</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>7</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>9</td><td>2</td><td>10</td></tr> </table>	10	2	6	8	5	2	9	1	3	8	9	4	5	7	6	1	7	10	9	4	3	10	4	1	7	7	5	2	6	3	4	8	3	10	1	6	3	8	5	9	8	6	7	4	2	5	1	9	2	10	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>7</td><td>1</td><td>8</td><td>3</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>2</td><td>8</td><td>3</td><td>6</td><td>4</td></tr> </table>	3	4	6	7	8	1	2	4	5	3	8	6	5	2	1	6	7	1	4	2	5	3	2	8	7	7	1	8	3	5	4	5	7	1	6	2	8	3	6	4	
1	2	3	4	5																																																																																																																																												
6	7	8	9	10																																																																																																																																												
5	1	2	3	4																																																																																																																																												
7	8	9	10	6																																																																																																																																												
8	9	10	6	7																																																																																																																																												
4	5	1	2	3																																																																																																																																												
9	10	6	7	8																																																																																																																																												
3	4	5	1	2																																																																																																																																												
10	6	7	8	9																																																																																																																																												
2	3	4	5	1																																																																																																																																												
10	2	6	8	5																																																																																																																																												
2	9	1	3	8																																																																																																																																												
9	4	5	7	6																																																																																																																																												
1	7	10	9	4																																																																																																																																												
3	10	4	1	7																																																																																																																																												
7	5	2	6	3																																																																																																																																												
4	8	3	10	1																																																																																																																																												
6	3	8	5	9																																																																																																																																												
8	6	7	4	2																																																																																																																																												
5	1	9	2	10																																																																																																																																												
3	4	6	7	8																																																																																																																																												
1	2	4	5	3																																																																																																																																												
8	6	5	2	1																																																																																																																																												
6	7	1	4	2																																																																																																																																												
5	3	2	8	7																																																																																																																																												
7	1	8	3	5																																																																																																																																												
4	5	7	1	6																																																																																																																																												
2	8	3	6	4																																																																																																																																												

Ces rectangles ne sont pas parfaitement barycentrés, mais il est raisonnable d'en faire le dépouillement statistique comme s'ils étaient barycentrés.

Nous avons suggéré quelques découpages intéressants, faisant apparaître de nouveaux blocs, contenant tous les traitements, et qui renseignent immédiatement sur l'opportunité de prendre en considération un effet linéaire suivant les lignes.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] E.A. MITSCHERLICH - Grundlegendes zur Ausschaltung der Ungleichartigkeit des Bodens bei Feldversuchen Z.f. Pflanzenz. Bd 34 Heft 2, 1955, pp. 209-212.
- [2] A. VESSEREAU - Méthodes statistiques en Biologie et en Agronomie, 1960 Baillièere et fils, éditeurs - Paris - page 230 et passim.
- [3] S.G. SALMON - Random versus Systematic Arrangement of Field Plots, octobre 1953 Agronomy Journal V. 45 n° 10 pages 459-462.
- [4] S.G. SALMON - Random versus Systematic Arrangements in Non-Latin Square Field Experiments - July 1955 - Agronomy Journal V. 47 n° 7 pages 289-294.
- [5] W.G. COCHRAN and G.M. COX - Experimental Designs - 1957 - John Wiley and Sons - pp. 117-118.
- [6] W.J. YOUDEN - Statistical Design - 1954-1959 - reprinted from Industrial and Engineering Chemistry - August 1955 - Vol. 47, n° 8, pp. 103 A et 104 A , October 1955 - Vol. 47, n° 10, pp.99A et 100A.
- [7] O.L. DAVIS - The design and Analysis of Industrial Experiments published for Imp. Chem. Indus. Limit. by Oliver and Boyd - 1954 - Chapitre 8 et appendices.
- [8] Victor CHEW - Regression Techniques in the Analysis of Variance - dans Industrial Quality Control, 18, 12, juin 1962, pages 13 et 14.