

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. P. GIVRY

## Gestion d'un parc à renouvellement aléatoire

*Revue de statistique appliquée*, tome 13, n° 1 (1965), p. 5-38

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1965\\_\\_13\\_1\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1965__13_1_5_0)

© Société française de statistique, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# GESTION D'UN PARC A RENOUVELLEMENT ALÉATOIRE

J. P. GIVRY  
Ingénieur Civil des Mines

## 1 - INTRODUCTION

### 1-1 - LA NOTION DE RENOUVELLEMENT ALÉATOIRE

Les problèmes que nous abordons ici sont ceux que pose l'exploitation d'un parc complexe, constitué d'éléments initialement identiques, quand il s'avère que la durée de ces éléments est une grandeur aléatoire.

Ce type de problème se rencontre dans des domaines aussi différents que la gestion de la main d'oeuvre (assurer un effectif constant au moyen d'une main d'oeuvre mobile) ou l'exploitation industrielle (parc de camions, de machines-outils, etc. dont la vitesse d'usure diffère d'un élément à l'autre).

Le phénomène de vieillissement peut être, en fait, plus ou moins progressif et peut se traduire par une réduction des performances ou par une augmentation des dépenses d'entretien. Nous ne retenons pas ici cet aspect du problème, et nous ne nous intéressons qu'au fait même du remplacement, rendu nécessaire par la défaillance totale, la "mort" de l'élément, cette mort se présentant comme un phénomène brutal, imprévisible et irréversible ; nous excluons ainsi la possibilité de prolonger par une réparation la vie d'un élément défaillant. Nous écartons aussi toute possibilité de renouvellement dirigé, que ce soit le remplacement préventif individuel (l'euthanasie) ou les arrêts systématiques par campagnes.

Dans cette perspective la durée de vie est une grandeur aléatoire, sur laquelle on n'a pas d'autre information que son appartenance à une certaine population, au sens statistique du terme, et les défaillances se présentent comme des événements aléatoires, causes immédiates des renouvellements, nombre pour nombre et au fur et à mesure. Ces renouvellements méritent bien ainsi le qualificatif d'aléatoire.

### 1-2 - INTERET TECHNIQUE ET ECONOMIQUE DE LA PREVISION DES DUREES

Il est d'un grand intérêt économique d'établir des prévisions de renouvellement précises, car elles permettent de fonder une politique d'approvisionnement qui soit rationnelle, c'est-à-dire qui évite les deux excès opposés : un approvisionnement insuffisant, dépassé par des défaillances imprévues, conduit à des pertes de production, alors qu'un approvisionnement pléthorique immobilise inutilement des capitaux dans les stocks. Pour faire des prévisions de renouvellement précises, il faut connaître la loi de probabilité des durées. Or si on peut la connaître pour un type d'équipement en service depuis long-

temps, il faut de toute façon se prémunir contre une modification de la qualité, hétérogénéité ou dérèglement ; un contrôle statistique est donc indispensable. Ce contrôle doit se muer en une véritable méthode d'estimation continue, quand on exploite un type d'équipement nouveau, pour en dégager le plus rapidement possible les caractéristiques et porter un jugement de valeur sur le nouveau lot, avant qu'il ait été épuisé. Les conséquences pratiques sont évidentes quand on songe à des équipements dont la durée est de l'ordre de plusieurs années ; il est précieux de pouvoir juger un lot, quand 30 % seulement de ses éléments sont morts, et ainsi de déceler à temps les conséquences fâcheuses d'une innovation ou de généraliser une modification positive. L'intérêt économique des méthodes que nous allons proposer se double donc d'un intérêt plus spécifiquement technique, car permettant de tirer plus vite la leçon des essais elles contribuent à accélérer le progrès technique.

### 1-3 - ROLE DE LA LOI DE GAUSS DANS LES PROBLEMES DE DUREES ALEATOIRES

Les problèmes de renouvellement aléatoire auxquels nous avons été confronté, comme exploitant, puis comme responsable d'un service technique central, sont ceux des cathodes des cellules d'électrolyse pour la production de l'aluminium. Nous avons été assez surpris au début de découvrir que leurs durées étaient sensiblement gaussiennes alors que nous nous attendions à une loi de probabilité de forme nettement dissymétrique. La figure 1 donne un exemple typique de la validité de la loi de Gauss pour représenter la répartition des durées de ces cathodes. Nous avons testé la normalité sur une quarantaine de lots différents représentant chacun de 20 à 150 cathodes. Les principes développés dans cette étude sont transposables à d'autres lois de probabilité que la loi de Gauss, mais on comprendra le rôle privilégié que nous lui avons donné ici, en particulier dans les exemples qui correspondent tous, disons-le, à des cas concrets. On rencontre d'ailleurs des durées gaussiennes dans bien d'autres domaines de la technique, les ampoules électriques entre autres (CHURCHMAN, GUPTA).

Si sur le plan théorique l'usage de la loi de Gauss pour représenter des durées qui sont des grandeurs essentiellement positives présente quelques difficultés, pour l'exécution pratique des calculs numériques au contraire, c'est une situation favorable que de pouvoir caractériser une population par deux paramètres seulement, la moyenne, et l'écart-type.

### 1-4 - PLAN DE L'ETUDE

Un premier chapitre est consacré au calcul du nombre probable des renouvellements ; il utilise des propriétés mathématiques générales qui sont justifiées dans le détail en annexe.

Le deuxième chapitre montre comment déduire, du nombre probable d'éléments à remplacer sur un certain laps de temps, une politique rationnelle d'approvisionnements.

Le dernier chapitre est relatif au contrôle de la prévision, au fur et à mesure des réalisations ; dans les deux premiers chapitres, en effet, la loi de probabilité des durées est supposée connue et il est indispensable d'être prévenu si cette hypothèse de base est en désaccord avec les faits.

Le redressement d'une hypothèse erronée, c'est-à-dire l'estimation de la durée probable d'un nouveau lot, au fur et à mesure de son utilisation, fera l'objet d'un article ultérieur.

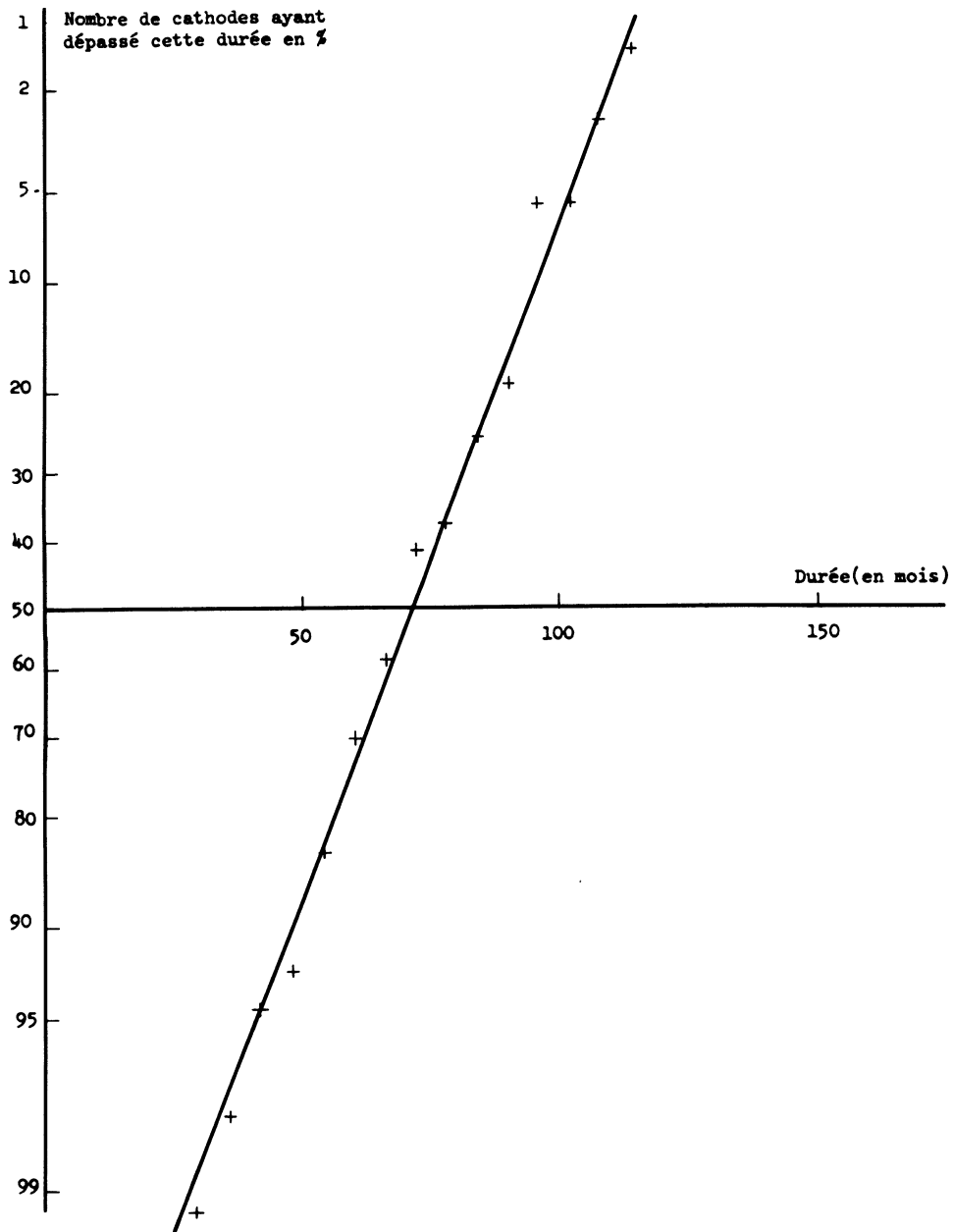


Fig. 1

## 2 - PRÉVISION DES RENOUVELLEMENTS

### 2-1 - PROPRIETES MATHEMATIQUES GENERALES

Un parc d'éléments est constitué à un instant donné,  $t$ , de  $N$  individus d'âges  $x_i$  ( $1 \leq i \leq N$ ). L'effectif total  $N$  est une constante ;  $x$  et  $t$  sont des grandeurs essentiellement positives ou nulles. A l'instant initial,  $t = 0$ , le parc a une répartition connue. Si tout l'effectif est installé à la fois, elle se réduit à une fonction de Dirac. Le parc peut être installé par tranches  $n_1, n_2, n_3, \dots$ . On peut prendre comme origine un instant différent de la date effective de démarrage, par exemple le moment où l'on fait la prévision des renouvellements à venir. En définitive la répartition initiale des éléments par âge peut être quelconque mais elle est toujours une donnée du problème.

Le rythme des renouvellements est représenté par la fonction  $h(t)$ , telle que entre  $t - dx$  et  $t$ ,  $h(t) dx$  éléments sont morts et ont été remplacés par des éléments neufs ;  $h(t)$  est l'inconnue du problème. Nous utiliserons aussi la fonction intégrale  $H(t) = \int_0^t h(t) dt$ . Il faut introduire également la loi de probabilité des durées  $f(x)$ , telle que la probabilité qu'un élément meure à un âge compris entre  $x$  et  $x + dx$  est  $f(x) dx$ . Nous utiliserons également  $F(x) = \int_x^\infty f(x) dx$  ; telle que  $F(0) = 1$ . Cette fonction représente la probabilité qu'un élément soit encore en service à l'âge  $x$ .  $F(x)$  peut être discontinue, auquel cas  $f(x) dx$  doit être remplacé par  $-dF(x)$ . La fonction  $F(x)$  est une donnée du problème ; elle détermine en particulier la durée moyenne,  $m$ , et l'écart type des durées  $s$  ;  $m$  et  $s$  sont tels que :

$$m = - \int_0^\infty x d F(x) = \int_0^\infty F(x) dx$$

$$m^2 + s^2 = - \int_0^\infty x^2 d F(x) = 2 \int_0^\infty x F(x) dx$$

La probabilité de survie à l'instant  $t$  d'un élément qui avait l'âge  $a$  à l'instant  $t = 0$  est  $F(a + t) / F(a)$ . A l'instant  $t$ , le parc est constitué de deux types d'éléments : d'une part ceux qui étaient en service à l'instant  $t = 0$ , qui avaient alors l'âge  $a_i$  et qui ont survécu avec la probabilité  $F(t + a_i) / F(a_i)$ , d'autre part les éléments qui ont été mis en service entre 0 et  $t$ , en remplacement d'éléments détaillants ; ont un âge compris entre  $x$  et  $x + dx$ , à l'instant  $t$ , les éléments mis en service entre l'instant  $t - x - dx$  et l'instant  $t - x$ , soit  $h(t - x) dx$ , dont il ne reste que la fraction  $F(x)$ , donc le nombre

$$h(t - x) F(x) dx \quad (\text{pour } x \leq t)$$

Dans ces conditions la loi de conservation de l'effectif  $N$  du parc s'écrit :

$$N = \int_0^t h(t - x) F(x) dx + \sum_{i=1}^N F(t + a_i) / F(a_i) \quad (1)$$

Cette équation permet de calculer le rythme des renouvellements  $h(t)$  à partir de la répartition initiale du parc et de la loi de répartition des durées  $F(x)$ .

Le calcul de  $h(t)$  fait l'objet de l'annexe ; nous n'indiquons ici que les résultats qui seront utilisés dans la suite de cet article et qui sont relatifs

aux deux types extrêmes de prévision : à très long terme - et c'est le cas du parc stationnaire - et à court terme.

L'équation (1) admet une solution particulière stationnaire telle que le rythme des renouvellements est constant, indépendant de t. Si en effet

$$\sum_{i=1}^N F(t + a_i) / F(a_i) = \frac{N}{m} \int_t^{+\infty} F(x) dx = \frac{N}{m} \left[ \int_0^{\infty} F(x) dx - \int_0^t F(x) dx \right] =$$

$$= N - \frac{N}{m} \int_0^t F(x) dx$$

l'équation (1) s'écrit

$$N = \int_0^t h(t - x) F(x) dx + N - \frac{N}{m} \int_0^t F(x) dx$$

Le rythme des renouvellements h(t) est bien constant et égal à N/m.

Le parc stationnaire a ses éléments répartis proportionnellement à la probabilité de dépasser l'âge x : cette répartition est stable, c'est-à-dire que si elle se rencontre une fois elle se prolonge indéfiniment ; nous montrerons plus loin que tout parc évolue vers l'état stationnaire, plus ou moins lentement il est vrai.

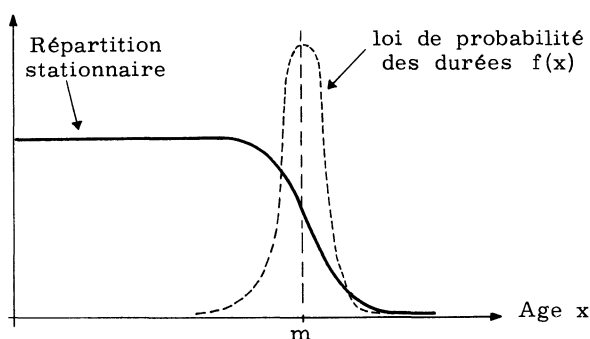


Fig. 2

Dans le cas de prévisions à court terme, on démontre (voir annexe) que le nombre cumulé H (t) des renouvellements à prévoir d'ici le temps t est, pour t petit, donné par :

$$H (t) = \sum_{i=1}^N \frac{F (a_i) - F (t + a_i)}{F (a_i)} \quad (2)$$

## 2-2 - CALCUL DU NOMBRE PROBABLE DE RENOUELEMENTS

Considérons les problèmes qui se posent au responsable de l'exploitation d'un parc constitué par exemple de 91 équipements qui, à un moment donné, se trouvent par le jeu des renouvellements successifs répartis en classes d'âge comme celles de la figure 3.

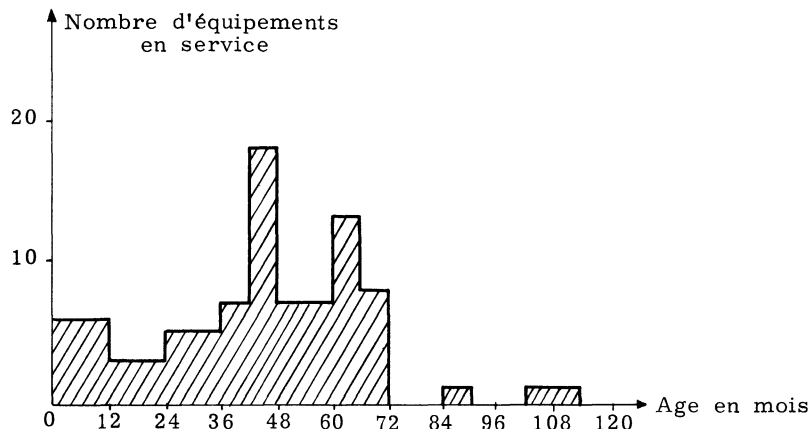


Fig. 3

Les délais d'approvisionnement étant de plusieurs mois, il convient d'établir un programme de commandes aussi rationnel que possible.

Le type d'équipement utilisé est, supposons le, resté inchangé depuis le premier démarrage de l'installation, il y a de cela une vingtaine d'années et l'étude des durées des éléments déjà morts a permis de tracer la droite de Henry de la figure 1 (page 5) qui montre que les durées suivent une loi de Gauss de moyenne 71 mois et d'écart-type 19 mois. Il est normal de faire l'hypothèse que les 91 équipements en service aujourd'hui appartiennent à la même population statistique, ce qui permet en utilisant la formule de prévision indiquée au paragraphe précédent, de calculer le nombre probable d'équipements qui devront être remplacés d'ici  $t$  mois,  $H(t)$ . Il faut noter que d'autres hypothèses peuvent être faites, par exemple en se fondant sur les durées observées sur des équipements analogues dans d'autres circonstances ; ce serait le cas au tout début d'un nouveau type d'équipements. L'important est de garder présent à l'esprit que les résultats du calcul de  $H(t)$  n'ont de sens que dans le cadre d'une certaine hypothèse, chaque hypothèse étant caractérisée par la donnée du couple  $(m, s)$ . Il sera donc prudent de contrôler, en cours de réalisation, si l'hypothèse faite au départ n'est pas en désaccord avec l'observation. Ce contrôle fera l'objet du dernier paragraphe de ce chapitre.

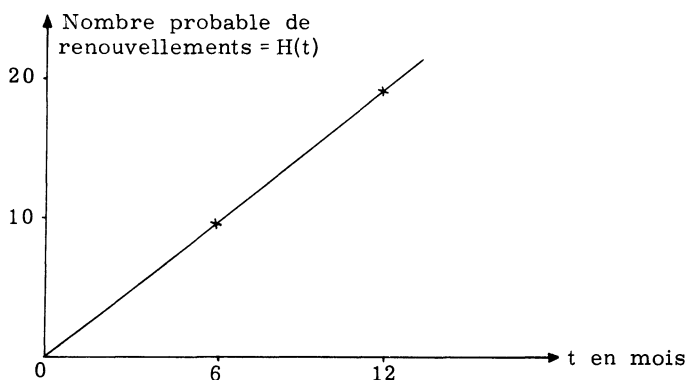


Fig. 4

Pour l'instant voyons comment calculer  $H(t)$ . Comme le délai d'approvisionnement est faible devant la durée moyenne, on est dans le cadre des prévisions à court terme et on applique la formule (2). Le tableau 1 montre comment procéder pratiquement aux calculs. Les probabilités  $F(a)$  sont lues sur la figure 1. On trace ainsi le graphique de la figure 4 qui indique les nombres probables de renouvellements à prévoir dans les prochains mois.

Le rythme des renouvellements est sensiblement uniforme et égal à 1,55 unités par mois, mais on n'est pourtant pas dans le cas d'un parc stationnaire car le rythme serait de  $\frac{N}{m} = \frac{91}{71} = 1,29$  unités par mois.

### 3 - APPROVISIONNEMENTS

#### 3-1 - DEFINITION DE LA POLITIQUE D'APPROVISIONNEMENT

Autant il est raisonnable d'utiliser pour une prévision budgétaire la valeur de  $H(t)$  ainsi calculée, autant la considération de cette valeur probable - qui a donc grosso modo une chance sur deux d'être dépassée - serait dangereuse pour établir un programme d'approvisionnements. Une fois sur deux les matériaux de rechange ne seraient pas livrés au moment où l'équipement cesserait son service, d'où perte de production.

Supposons que les prévisions de renouvellements aient été faites, c'est-à-dire que l'on dispose de la courbe  $H(t)$ . Pour définir les approvisionnements, il faut connaître le délai d'approvisionnement ; appelons-le  $T$ . Si  $T$  est nul en effet, le problème ne se pose pas et on n'a qu'à enregistrer les défaillances successives et à se procurer au fur et à mesure les pièces de rechange qui sont, par définition, disponibles. En général  $T$  n'est pas nul ; la première conséquence en est qu'on est sans action sur ce qui va se passer entre  $t = 0$  et  $t = T$ . Les approvisionnements de cette première période doivent avoir déjà été prévus. De même il est inutile de prévoir les approvisionnements pour  $t > T$ . Au total se dégage la notion d'une programmation dynamique des approvisionnements ; à chaque instant  $t$  on commande les approvisionnements supplémentaires nécessaires pour que la situation soit optimum à l'instant  $t + T$  et ce faisant on tient compte de la totalité de l'information à l'instant  $t$ , c'est-à-dire d'une part des commandes déjà faites, qui seront livrées entre  $t$  et  $t + T$ , et de l'état réel du parc à l'instant  $t$ , celui-ci ayant évolué depuis la dernière mise au point.

Dans ces conditions, pour définir la politique d'approvisionnement optimum, il suffit de considérer ce que va se passer entre 0 et  $T$ , en plaçant l'origine des temps au moment où se pose le problème. Soit  $N$  l'effectif du parc et  $n = H(t)$  le nombre probable de renouvellements. Quel est le nombre  $v$  des équipements qui auront du être approvisionnés d'ici  $T$  ?

Appelons  $A$  le coût du stockage et  $B$  le coût de la défaillance.  $A$  et  $B$  s'expriment en unités identiques, francs par unité d'équipement approvisionné et par unité de temps.  $A$  comprend évidemment l'intérêt de l'argent, le coût du magasinage, etc.





Posons  $P(v)$  la probabilité que  $K$  soit inférieur ou égal à  $v$ .

$$\text{Prob}(K \leq v) = P(v) = \sum_{k=0}^v p(k)$$

On passe alors de  $v_0$  à  $v_0 + 1$  quand

$$A P(v_0) = B[1 - P(v_0)]$$

soit pour  $v_0$  tel que

$$P(v_0) = B/[A + B] \quad (12)$$

Le calcul de  $P(v)$  n'est classique que dans les deux cas extrêmes d'un parc neuf dont tous les éléments ont la même probabilité individuelle de défaillance et d'un parc stationnaire où le rythme des renouvellements est uniforme.

### 3-2 - CAS D'UN PARC STATIONNAIRE

Le rythme des renouvellements est  $N/m$ . Le nombre probable d'équipements à remplacer d'ici  $T$  est  $NT/m$ . La probabilité  $p(K)$  que  $K$  défaillances aient été enregistrées d'ici  $T$  est donnée par la loi de Poisson,

$$p(K) = \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K$$

La probabilité  $P(v)$  est donnée par

$$\sum_{k=0}^v \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K$$

En égalant  $P(v)$  à  $B/A + B$  on définit les valeurs critiques de  $NT/m$  pour lesquelles l'approvisionnement doit passer de  $v$  à  $v + 1$  (figure 6).

On calcule les valeurs de  $\frac{NT}{m}$  en résolvant les équations du type (4) :

$$\sum_{k=0}^v \frac{e^{-NT/m}}{K!} \left(\frac{NT}{m}\right)^K = B/[A + B] \quad (4)$$

Si le nombre escompté,  $\frac{NT}{m}$  est inférieur ou égal à 18 on utilise abaque de la loi de Poisson comme celui de la figure 5. Si  $NT/m$  est supérieur à 18, on utilise la loi de Gauss, limite de la loi de Poisson.

Prenons un exemple. Soit à tracer la courbe des approvisionnements en fonction de  $NT/m$ , pour  $NT/m$ , variant de 0 à 20, alors que le coût,  $B$ , de défaillance est 9 fois plus élevé que le coût  $A$  du stockage. Jusqu'à  $NT/m = 18$ , on utilise l'abaque de la figure 5, coupée par l'ordonnée  $B/A + B = 0,9$ . A partir de  $NT/m = 18$ , on observe que  $K$  suit une loi de Gauss de moyenne  $NT/m$  et d'écart-type  $\sqrt{NT/m}$ ; pour avoir la probabilité  $B/A + B = 90\%$ , il faut que  $K$  soit supérieur à la moyenne de 1,28 écart-type, soit  $v = \frac{NT}{m} + 1,28 \sqrt{NT/m}$ .

La figure 6 montre comment a été tracée la courbe d'approvisionnement dans ce cas.

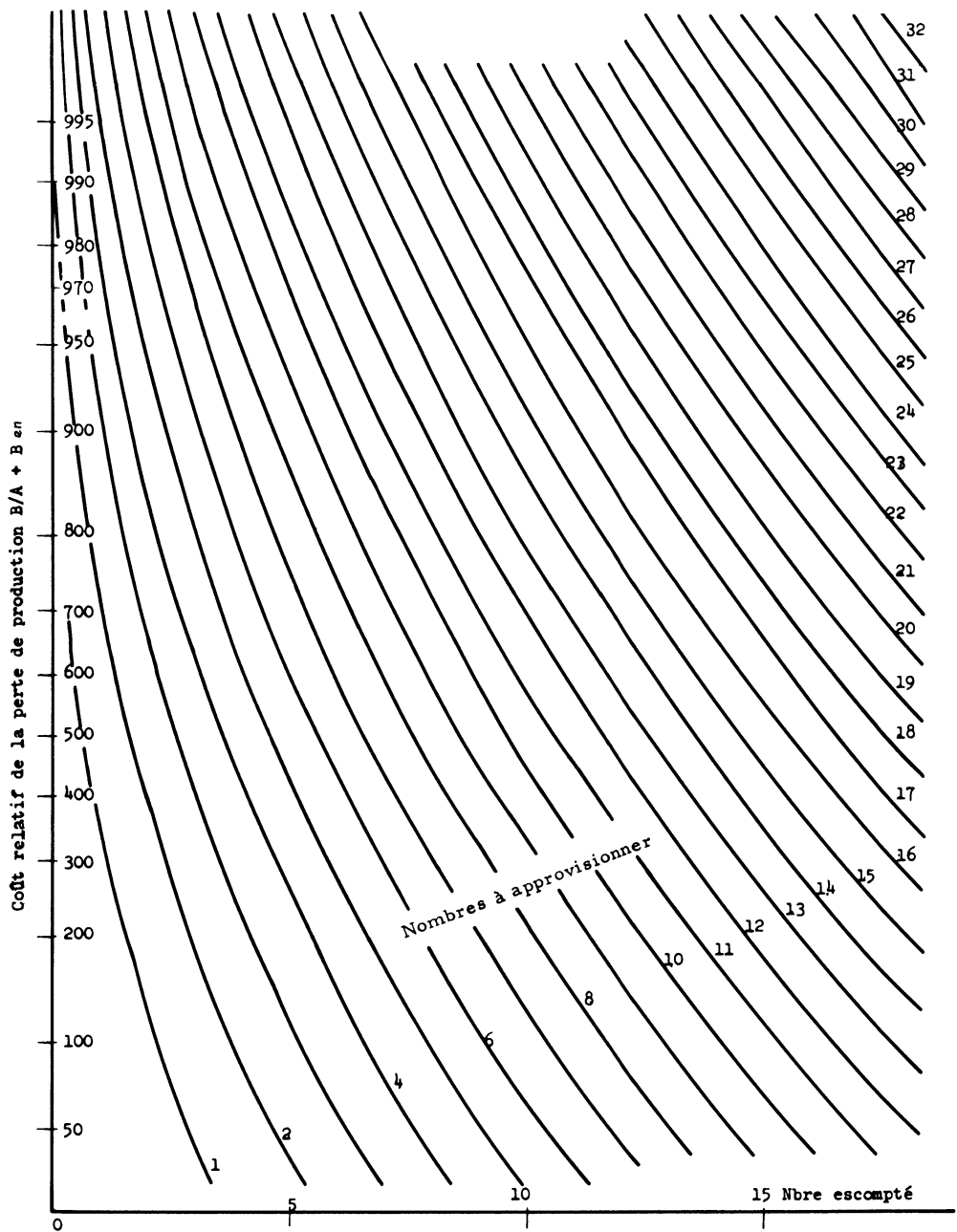


Fig. 5

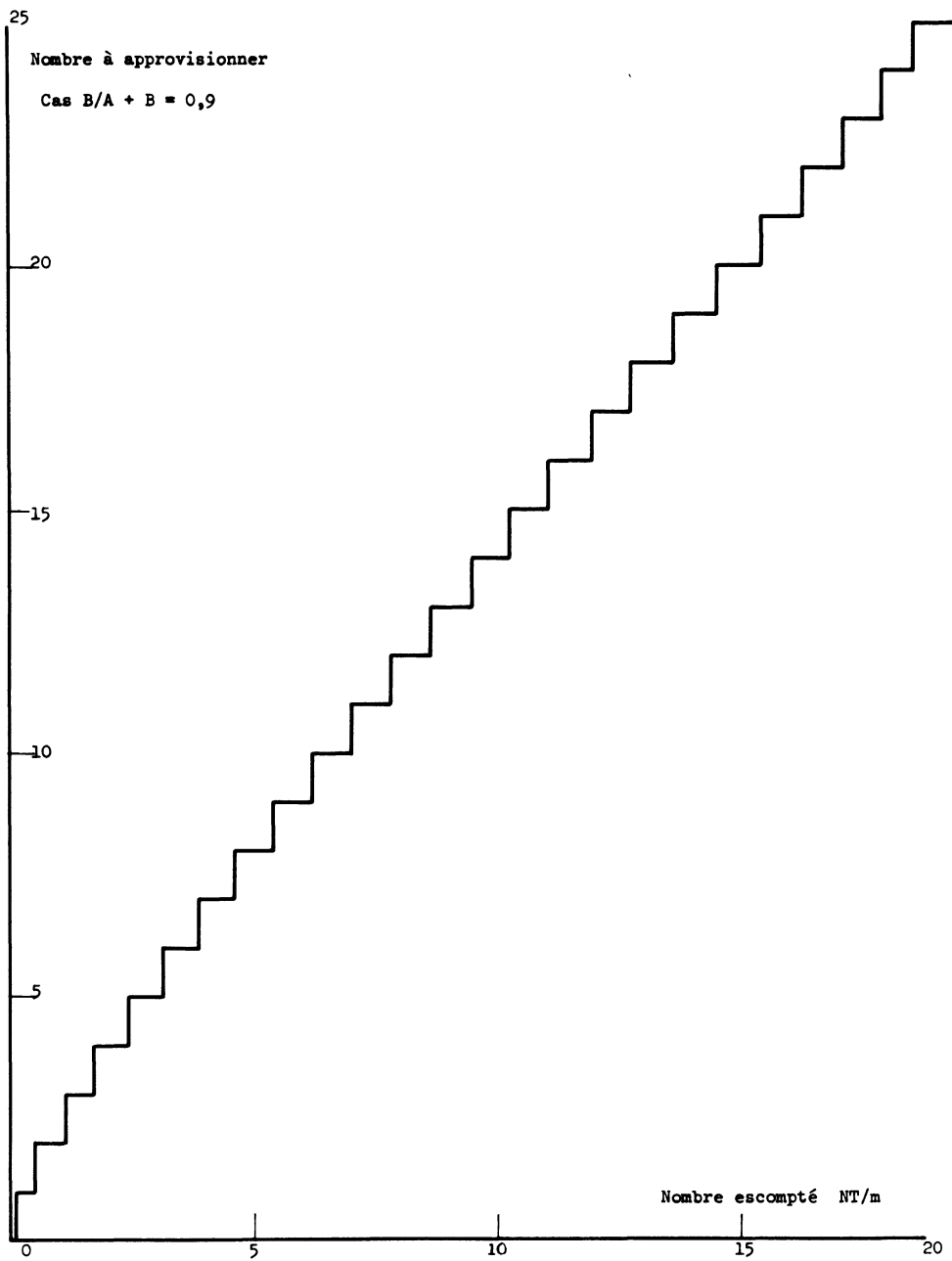


Fig. 6

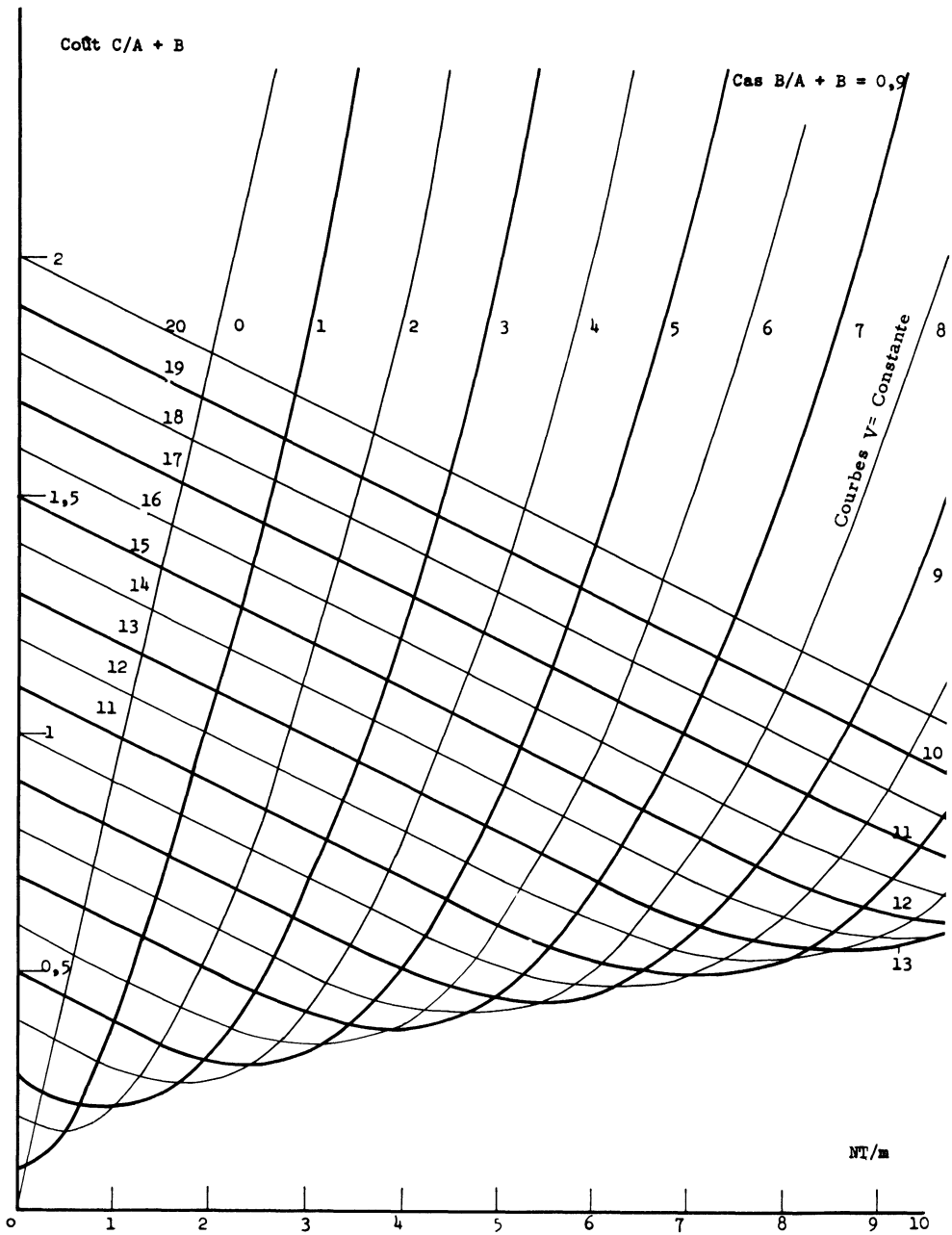


Fig. 7

On y voit comment la courbe des approvisionnements s'écarte de la droite des renouvellements moyens, et ceci d'autant plus que le délai de livraison  $T$  est plus long.

De ce point de vue il est intéressant d'exprimer le coût  $C$  en fonction de  $v$  et de  $NT/m$ . Le calcul conduit à la formule :

$$C = [(A + B) P(v) - B] (v - NT/m) + [(A + B) p(v) - B p(N)] NT/m$$

où  $p(v)$  et  $P(v)$  sont respectivement les probabilités simple et cumulée de loi de Poisson de paramètre  $NT/m$ . Si  $N$  est assez grand,  $p(N)$  est négligeable. On a représenté sur la figure 7 les courbes donnant  $C$  en fonction de  $NT/m$  pour différentes valeurs de  $v$  et pour  $B/[A + B] = 0,9$ . Elles permettent d'apprécier l'intérêt d'une politique d'approvisionnement optimum, en montrant combien le coût augmente vite quand on s'écarte de la valeur optimum  $v = v_0$ .

La figure 7 montre également comment le coût  $C$  augmente quand le délai d'approvisionnement  $T$  croît.

### 3-3 - CAS D'UN PARC NEUF

Si tous les éléments installés ont la même probabilité,  $p$ , de défaillance, le calcul de  $P(v)$  probabilité d'avoir de 0 à  $v$  éléments défaillants s'effectue de façon classique par la loi binomiale :

$$P(v) = \sum_{k=0}^v C_N^k p^k (1 - p)^{N-k}$$

où  $p$  est évidemment égal à  $H(T)/N$ .

Suivant les valeurs de  $N$  et de  $H(T)$  on utilisera soit la loi binomiale elle-même, soit son approximation par la loi de Gauss, soit son approximation par la loi de Poisson. Les domaines d'application respectifs des trois lois sont rappelés sur la figure 8.

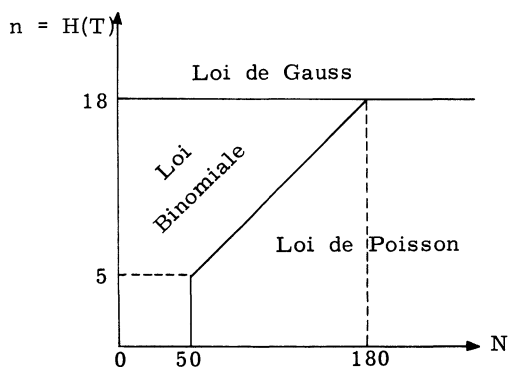


Fig. 8

Comme nous avons déjà rencontré dans le paragraphe 3-2 des exemples d'application de la loi de Gauss et de la loi de Poisson, nous ne donnerons ici qu'un exemple faisant appel à la loi binomiale. Soit à calculer les approvisionnements nécessaires quand le parc est  $N = 20$  et le nombre probable de

renouvellements de 2, et alors que  $B/[A+B] = 0,9$ . La table de la loi binomiale pour  $p = 2/20 = 10\%$  et  $N = 20$  donne pour  $K = 3$  la probabilité cumulée 0,867 et pour  $K = 4$ , 0,9568. Il faut donc approvisionner  $v = 4$  équipements (figure 9).

Insistons sur les rôles différents que joue la loi de Poisson dans ce paragraphe et dans le précédent. Dans le paragraphe 3-2 en effet, le processus est par lui-même poissonnien car l'évènement de base est la survenance d'une défaillance quelconque dans l'intervalle  $t, t + dt$  et cet évènement a une probabilité élémentaire constante, infiniment petite et égale à  $N dt/m$  puisque le rythme des renouvellements est uniforme. Dans le paragraphe 3-3, pour trouver des évènements équiprobables il faut s'intéresser à la défaillance individuelle de l'un ou de l'autre des  $N$  équipements constituant le parc. Entre 0 et  $T$ , la probabilité de défaillance individuelle a une valeur finie et le processus est, dans son principe, binomial ; la loi de Poisson n'est utilisée qu'accidentellement comme une approximation commode pour certains calculs.

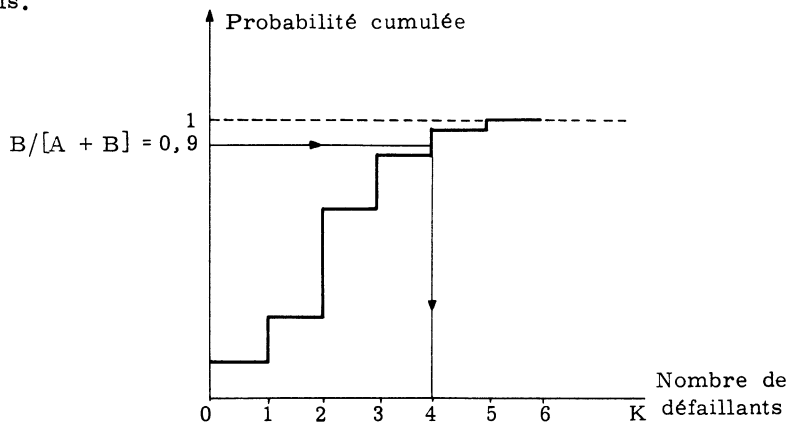


Fig. 9

### 3-4 - CAS D'UN PARC HETEROGENE

Le calcul des approvisionnements dans le cas d'un parc quelconque nécessite en principe l'usage de la loi multinomiale puisque chacun des  $N$  éléments constituant le parc a une probabilité de défaillance individuelle,  $p_i$ , qui lui est propre. Encore que le calcul de la loi multinomiale soit facilité par les calculatrices modernes, on ne s'y résoudra qu'en dernier ressort.

Pratiquement on retombera souvent sur les deux cas typiques déjà rencontrés : rythme des renouvellements uniforme ou parc homogène. Pour les parcs franchement hétérogènes, constitués de  $N$  éléments ayant chacun des probabilités différentes,  $p_i$ , de défaillance, si le nombre  $N$  est assez grand on peut faire l'approximation gaussienne en tablant sur le fait que la moyenne est  $\sum p_i$  et la variance  $\sum p_i(1 - p_i)$ .

Reprenons à titre d'exemple le parc de la figure 3 ; les probabilités individuelles de défaillance entre 0 et 6 mois ont été calculées sur le tableau 1 :

On trouve ainsi :

$$\sum p_i = 9,31 \text{ et } \sum p_i(1 - p_i) = 4,90$$

Si  $B/[A+B] = 0,90$  l'approvisionnement doit être de  $9,31 + 1,28 \sqrt{4,90} = 12,13$ .

En définitive on n'aura à utiliser la loi multinomiale que dans le cas assez spécial d'un parc constitué d'un petit nombre d'éléments, d'âges très différents.

#### 4 - CONTRÔLE DES DÉFAILLANCES

Les développements précédents ont montré comment on pouvait assurer au mieux les approvisionnements nécessaires aux remplacements des équipements défaillants ; mais cette méthode n'est évidemment efficace que si les défaillances se produisent suivant la loi de probabilité des durées qui a servi à calculer les prévisions. Il est donc de saine gestion de contrôler les défaillances pour déceler à temps un dérèglement des durées qui rendrait caducs tous les calculs d'optimisation précédents, soit que les durées diminuant les approvisionnements deviennent insuffisants, soit qu'inversement les durées augmentant les stocks se gonflent inutilement.

Le problème est du domaine du contrôle de qualité classique ; il consiste à définir à l'avance, de part et d'autre de la courbe des défaillances prévues,  $H(t)$ , un domaine de confiance, à 95 % de chances par exemple, puis en cours de réalisation à pointer les défaillances au fur et à mesure qu'elles se produisent. Tant que la courbe empirique reste à l'intérieur du domaine de confiance, on considère que l'hypothèse  $(m, s)$  qui a servi à calculer  $H(t)$  n'est pas contredite par les faits et les approvisionnements qui ont été cal-

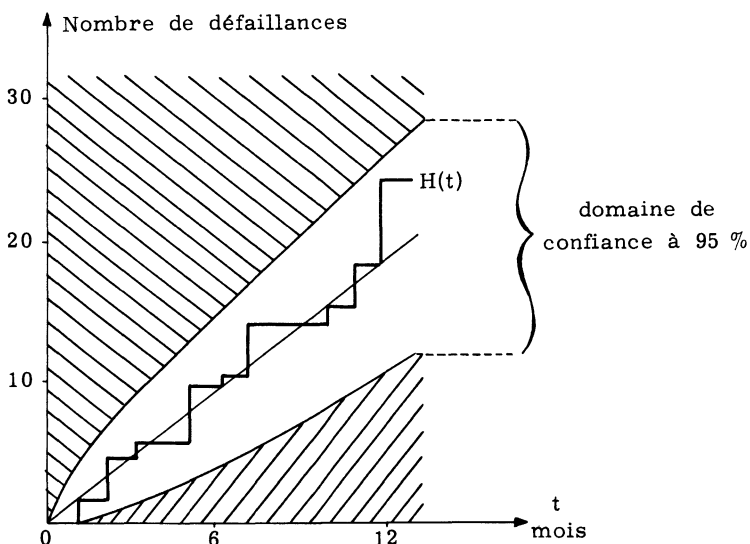


Fig. 10



culés à l'aide de  $H(t)$  restent satisfaisants, aux fluctuations statistiques près, bien entendu. Inversement si la courbe empirique sort du domaine de confiance, on considère que l'hypothèse  $(m, s)$  faite a priori est incorrecte et qu'il faut estimer la vraie moyenne et le vrai écart-type à partir des données empiriques ; cette estimation sera l'objet d'un article ultérieur.

La détermination pratique du domaine de confiance est classique ; l'emploi d'un abaque comme celui de la figure 11 est particulièrement commode. On peut ainsi compléter la courbe des renouvellements prévus,  $H(t)$ , par les deux courbes donnant la limite supérieure et la limite inférieure de contrôle.

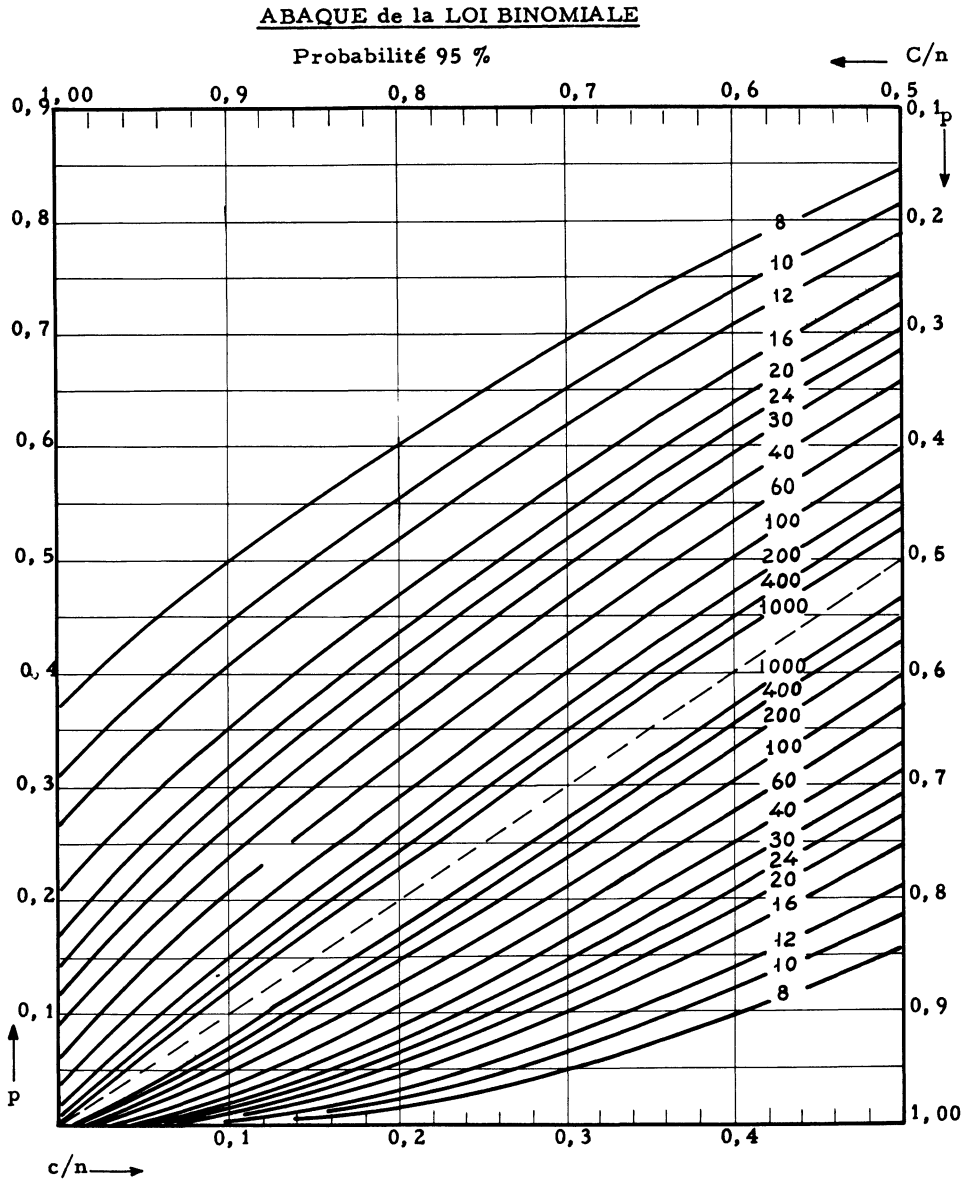


Fig. 11

La figure 10 en donne un exemple, la courbe  $H(t)$  étant celle de la figure 4 .  
 Ainsi pour  $t = 6$  mois,  $H(t) = 9,31$  pour  $n = 91$  ; le pourcentage de défectueux est donc de  $p = 10,2 \%$ , auquel correspondent sur les courbes  $n = 90$  les deux valeurs de  $c/n = 4 \%$  et  $c/n = 17 \%$  ; la limite inférieure est donc 3,6 et la limite supérieure 15,4.

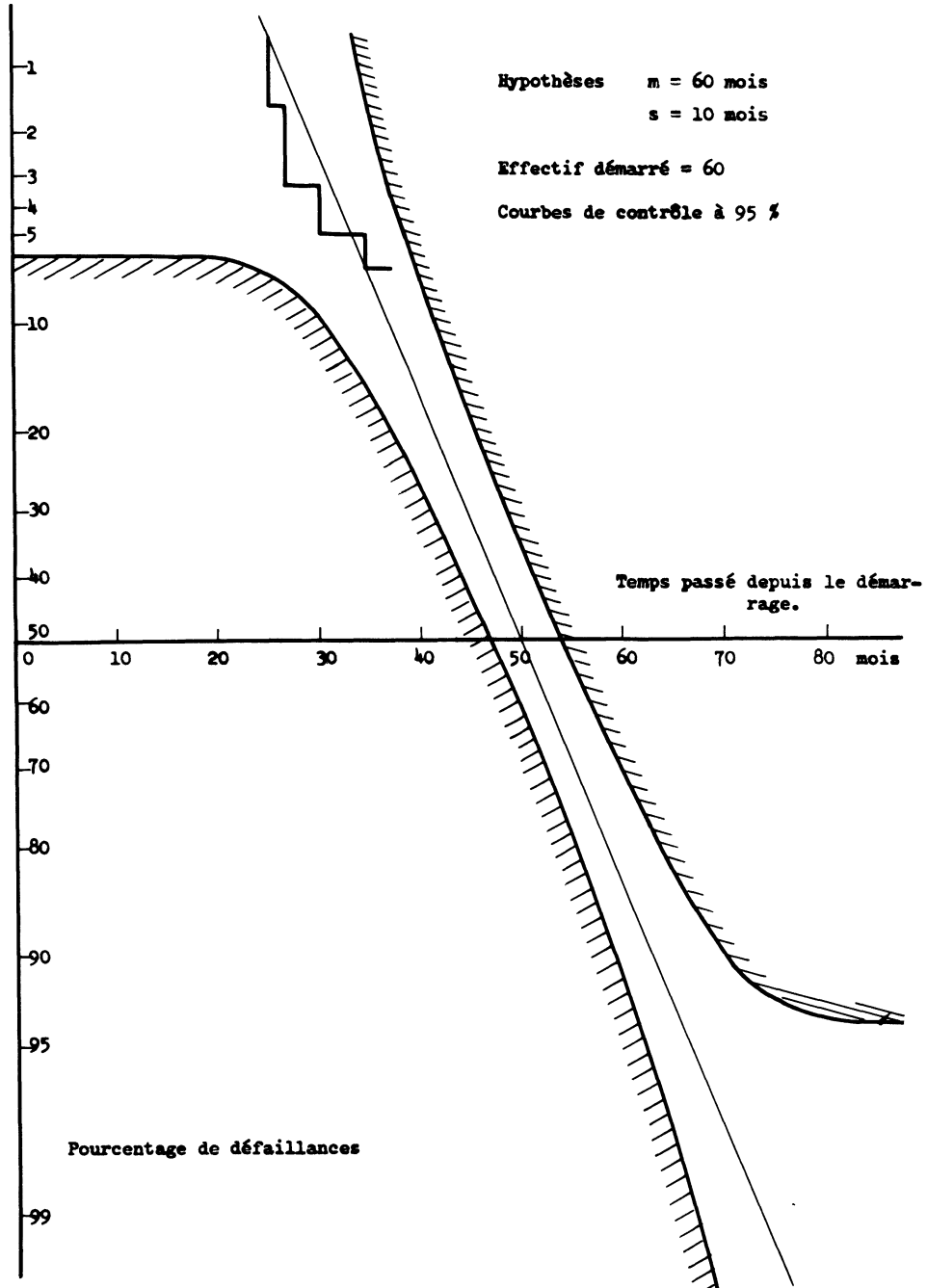


Fig. 12

Dans le cas d'un parc neuf, dont tous les éléments ont démarré en même temps, il est indiqué de contrôler les défaillances sur un graphique de Henry, comme celui de la figure 12. On y pointe les pourcentages cumulés de défaillances observées depuis le démarrage.

## 5 - CONCLUSION

Les méthodes de calcul que nous venons de présenter répondent à trois des préoccupations que nous avons exposées en tête de cet article. Le calcul du nombre probable de défaillances est utile à l'exploitant pour prévoir la capacité de production dont il disposera et pour établir le budget des renouvellements. Si en outre un délai est nécessaire pour approvisionner certains éléments entrant dans la constitution des équipements à renouveler, nous avons montré comment utiliser la courbe des renouvellements probables pour définir la politique d'approvisionnement optimum. Nous avons montré enfin comment le contrôle des défaillances permettait de savoir si l'hypothèse faite à l'instant initial sur la loi de probabilité des durées n'était pas en désaccord avec les réalisations. Il reste, et ce sera l'objet d'un article ultérieur, à estimer la loi de probabilité des durées à partir des réalisations quand il s'est avéré que l'hypothèse de départ était erronée.

## BIBLIOGRAPHIE

- 1 M. FRECHET - Leçons de statistique mathématique - 4<sup>e</sup> cahier.
- 2 A. K. GUPTA - Estimation of the mean and standard deviation of a normal population from a censored sample.
- 3 M. DENIS-PAPIN et A. KAUFMANN - Cours de Calcul opérationnel.
- 4 C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF et E. L. ARNOFF - Eléments de recherche opérationnelle (le chapitre XVII "les modèles de remplacement" contient les références de textes d'EPSTEIN et de LOTKA).

## ANNEXE

### MATHÉMATIQUES DU RENOUVELLEMENT

On se propose de déterminer le rythme probable des renouvellements,  $h(t)$ , connaissant la loi de répartition des durées,  $F(x)$ , et la distribution initiale du parc, à savoir les âges  $a_i$  des  $N$  éléments en service au temps  $t = 0$ .  $h(t)$  doit vérifier l'équation intégrale (1)

$$N = \int_0^t h(t-x) F(x) dx + \sum_{i=1}^n F(t+a_i)/F(a_i) \quad (1)$$

#### 1 - RESOLUTION DE L'EQUATION INTEGRALE

Pour résoudre l'équation (1) nous allons utiliser la transformation de Laplace et introduire les deux fonctions suivantes :

$$K(p) = \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

image de la loi de probabilité des durées  $f(x)$ .

$$g(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} h(t) dt$$

image du rythme, inconnu, des renouvellements  $h(t)$ .

La transformée de  $F(x)$  est  $1/p - K(p)/p$  et celle de l'intégrale  $\int_0^t h(t-x) F(x) dx$ , se calcule facilement comme étant égale à  $g(p)/p [1 - K(p)]$ .

La transformée de  $F(t+a_i)/F(a_i)$  n'a une expression simple que pour un élément neuf pour  $t = 0$ .

Si  $a = 0$  en effet,  $F(t+a)/F(a)$  est égal à  $F(t)$  et sa transformée est  $1/p - K(p)/p$ .

Si donc tous les éléments sont neufs à  $t = 0$ , ce qui est le cas le plus fréquent, l'équation intégrale s'écrit :

$$N/p = g(p)/p [1 - K(p)] + N/p [1 - K(p)]$$

On en déduit :

$$g(p) = \frac{N K(p)}{1 - K(p)} \quad (2)$$

Le problème est dans ce cas théoriquement résolu, puisqu'à partir de la donnée de la loi de probabilité des durées  $f(x)$ , dont se déduisent  $F(x)$  et  $K(p)$ , on sait calculer  $g(p)$  par l'équation (2). Il n'y a plus qu'à inverser  $g(p)$  pour connaître  $h(t)$  et en déduire toutes les autres fonctions intéressantes : nombre cumulé d'unités à renouveler entre 0 et  $t$ , état probable du parc à l'instant  $t$ , âge moyen du parc à l'instant  $t$ , durée moyenne des unités mourant à l'instant  $t$ , etc.

La transformée de  $F(t + a) / F(a)$  n'est malheureusement pas aussi simple quand l'âge à l'origine  $a$  n'est pas nul. Ecrivons  $F(t + a) / F(a)$  sous la forme  $1 - [F(a) - F(t + a)] / F(a)$  et considérons la transformée de  $[F(a) - F(t + a)] / F(a)$

$$r(p, a) = \int_0^{\infty} e^{-pt} [F(a) - F(t + a)] / F(a) dt$$

L'équation intégrale s'écrit donc :

$$N/p = g(p)/p [1 - K(p)] + \sum_{i=1}^N [1/p - r(p, a_i)]$$

d'où se déduit

$$g(p) = \frac{p \sum_{i=1}^N r(p, a_i)}{1 - K(p)} \quad (3)$$

Pour  $a = 0$  on retrouve évidemment la formule (2), car  $r(p, 0) = K(p)/p$ .

La formule (3) s'applique en particulier au cas où les durées sont certaines. Si  $s = 0$ ,  $f(x)$  se réduit à une distribution de Dirac et  $F(x)$  vaut 1 pour  $x < m$  et 0 ailleurs (figure 13).

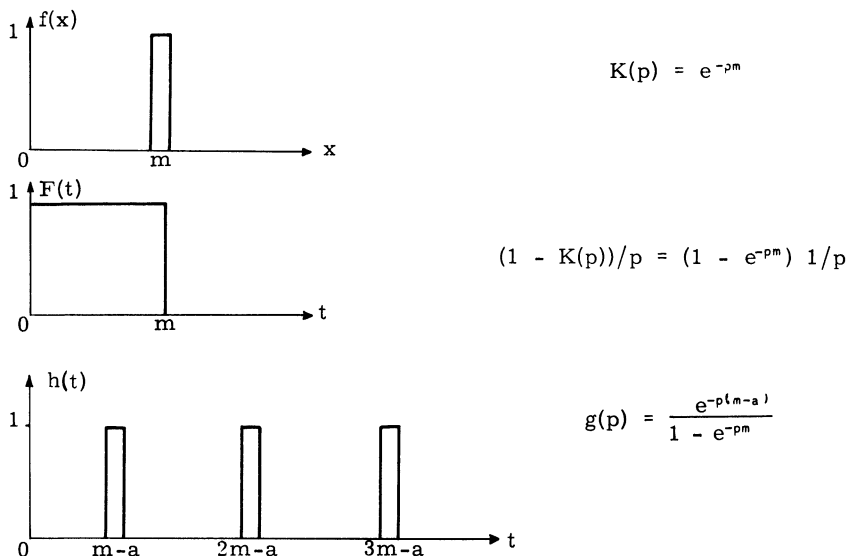


Fig. 13

La transformée de  $f(x)$  est

$$K(p) = e^{-pm}$$

On en déduit

$$g(p) = \frac{\sum_{i=1}^n e^{-p(m-a_i)}}{1 - e^{-pm}}$$

On vérifie facilement que  $g(p) = \frac{e^{-p(m-a)}}{1 - e^{-pm}}$  est bien la transformée de la fonction impulsion  $h(t)$  non nulle pour  $t = m-a, 2 m-a, 3 m-a$ , (figure 13).

## 2 - COMPORTEMENT A COURT TERME

Considérons d'abord les faibles valeurs de  $t$  ; on sait que  $h(t)$  pour  $t$  tendant vers zéro se déduit de  $g(p)$  pour  $p$  tendant vers l'infini.

Considérons les développements limités en  $1/p$  de  $r(p, a)$  et  $K(p)$ . Il se déduisent des développements limités en  $t$  de  $[F(a) - F(t + a)] / F(a)$  et en  $x$  de  $f(x)$  ; en faisant ensuite la transformation de Laplace, il vient :

$$\frac{F(a) - F(t + a)}{F(a)} = \frac{f(a) t + f'(a) t^2/2 + \dots}{F(a)}$$

$$r(p, a) = \frac{f(a) 1/p^2 + f'(a) 1/p^3 + \dots}{F(a)}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0) x + f''(0) x^2/2 + \dots$$

$$K(p) = f(0) 1/p + f'(0) 1/p^2 + f''(0) 1/p^3 + \dots$$

On en déduit

$$g(p) = \sum_{i=1}^n \frac{f(a_i) 1/p + f'(a_i) 1/p^2 + \dots}{F(a_i) [1 - f(0)/p + \dots]}$$

Ceci confirme l'intuition que  $h(t) \sim \sum_{i=1}^n f(a_i) / F(a_i)$  pour  $t$  petit.

On en conclut que le nombre cumulé,  $H(t)$ , des renouvellements à prévoir d'ici le temps  $t$  est, pour  $t$  petit, donné par la formule (4) :

$$H(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F(a_i) - F(t + a_i)}{F(a_i)} \quad (4)$$

## 3 - INVERSION PAR LA METHODE DES RESIDUS

On inverse  $g(p)$  et  $g(p)/p$  par la méthode des résidus pour obtenir  $h(t)$  et  $H(t)$ .

$$h(t) = \sum \text{Res } e^{pt} g(p)$$

$$H(t) = \sum \text{Res } e^{pt} g(p)/p$$

Considérons un seul élément d'âge  $a$  :

$$g(p) = \frac{p r(p, a)}{1 - K(p)} \quad \text{d'après (3)}$$

$$H(t) = \sum \text{Res } \frac{e^{pt} r(p, a)}{1 - K(p)}$$

Soit  $\alpha$  un pôle de

$$\Phi(p) = \frac{e^{pt} r(p, a)}{1 - K(p)}$$

On sait que :

$$\text{Res}_{p=\alpha} [\Phi(p)] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}} [(p-\alpha)^m \Phi(p)]_{p=\alpha}$$

où  $m$  est l'ordre de multiplicité du pôle  $\alpha$ .

Exprimons  $K(p)$  en fonction des moments de la répartition  $f(x)$ .

$$K(p) = 1 - p m_1 + p^2 \frac{m_2}{2!} + \dots + (-1)^i p^i \frac{m_i}{i!}$$

$$\text{où } m_i = \int_0^\infty x^i f(x) dx$$

$$m_1 = m$$

$$m_2 = m^2 + s^2$$

etc.

Nous pouvons également exprimer  $r(p, a)$  sous une forme analogue en remarquant que c'est la transformée de l'intégrale de la fonction de répartition des probabilités de survie =  $f(t+a) / F(a)$ .

$$p r(p, a)$$

est donc une fonction caractéristique

$$p r(p, a) = 1 - p m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!} + \dots$$

où les  $m_i(a)$  sont les moments de la répartition  $f(t+a) / F(a)$

$$m_i(a) = \int_0^\infty t^i f(t+a) / F(a) dt$$

pour  $a = 0$ , on a  $m_i(0) = m_i$  et  $r(p, 0) = K(p)/p$

Retenons que

$$r(p, a) = \frac{1}{p} \left[ 1 - p m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!} + \dots + (-1)^i p^i \frac{m_i(a)}{i!} \right]$$

Finalement  $\Phi(p)$  s'écrit :

$$\Phi(p) = \frac{e^{pt} \left[ 1 - p m_1(a) + p^2 \frac{m_2(a)}{2!} + \dots \right]}{p^2 \left[ m_1 - p \frac{m_2}{2!} + \dots \right]}$$

$\Phi(p)$  a donc deux sortes de pôles :

1/ le pôle double  $p = 0$

2/ les pôles imaginaires  $p = \alpha$  tels que  $K(\alpha) = 1$

Considérons d'abord le pôle  $p = 0$

La formule des résidus donne pour  $H(t)$  le terme suivant :

$$H_1(t) = \frac{d}{d p} \left[ \frac{p^2 e^{pt} [1 - p m_1(a) + p^2 m_2(a)/2! + \dots]}{p^2 [m_1 - p m_2/2! + \dots]} \right]_{p=0} = \frac{t - m_1(a) + \frac{m_2}{2 m_1}}{m_1}$$

soit encore

$$H_1(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2 m m(a)}{2 m^2}$$

C'est l'équation d'une droite de pente  $1/m$ . Son ordonnée à l'origine est, pour  $a = 0$ ,  $-\frac{m^2 - s^2}{2 m^2}$  qui est voisin de  $-1/2$ , et pour  $a$  infini,  $\frac{m^2 + s^2}{2 m^2}$ , voisin de  $+1/2$ ; en effet  $m(0) = m$  et  $m(\infty) = 0$  (figure 14)

Pour un nombre  $N$  d'éléments d'âges  $a_i$  on trouverait évidemment :

$$H_1(t) = \frac{N t}{m} + N \frac{m^2 + s^2}{2 m^2} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m(a_i) \quad (5)$$

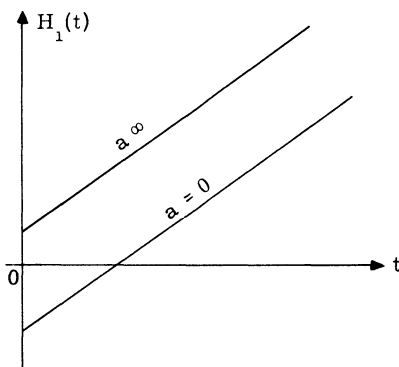


Fig. 14

Considérons maintenant les pôles imaginaires.

Ils sont tels, nous l'avons vu, que  $K(\alpha) = 1$  c'est-à-dire que

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = 1$$

Les  $\alpha$  qui sont solutions de cette équation sont caractéristiques de la loi de probabilité des durées  $f(x)$ . Chacun engendre un terme de  $H(t)$ ; l'expression générale de ces termes est la suivante

$$\left. \frac{e^{pt} r(p, a) (p - \alpha)}{1 - K(p)} \right|_{p=\alpha} = \frac{-e^{\alpha t} r(\alpha, a)}{K'(\alpha)}$$

Ceci suppose que  $K'(\alpha)$  ne soit pas nul, sinon le pôle  $\alpha$  serait double. Nous n'insisterons pas sur la démonstration du fait que  $K'(\alpha)$  n'est jamais nul, nous réservant de le faire remarquer dans chacun des exemples rencontrés.

Pour  $a = 0$ , on trouve ainsi

$$H_2(t) = -N \sum_{\alpha} e^{\alpha t} / K'(\alpha)$$



la sommation étant étendue à tous les pôles imaginaires  $\alpha$ .

Pour  $a$  quelconque on trouve ainsi  $H(t) = H_1(t) + H_2(t)$ .

$$H(t) = \frac{N t}{m} + \frac{N(m^2 + s^2) - 2 m \sum_{i=1}^N m(a_i)}{2 m^2} - \sum_{\alpha} \frac{e^{\alpha t}}{K'(\alpha)} \sum_{i=1}^N r(\alpha, a_i) \quad (6)$$

$$h(t) = \frac{N}{m} - \sum_{\alpha} \frac{\alpha e^{\alpha t}}{K'(\alpha)} \sum_{i=1}^N r(\alpha, a_i) \quad (7)$$

Les formules (6) et (7) donnent la solution complète du problème posé. On reconnaît dans  $H_1(t)$  et  $h_1(t)$  les termes correspondant au régime stationnaire, asymptotique, et dans  $H_2(t)$  et  $h_2(t)$  des termes exponentiels, pseudo périodiques, tendant vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini, comme nous allons le montrer.

#### 4 - CONVERGENCE VERS LE REGIME STATIONNAIRE

Considérons le pôle imaginaire  $\alpha$  et posons  $\alpha = c + j \omega$ . Nous allons montrer que  $c$  est négatif, au sens strict.

En effet si  $K(\alpha) = 1$ , c'est que

$$K(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} f(x) dx = 1$$

autrement dit que  $c$  et  $\omega$  sont tels que les 2 équations ci-dessous soient vérifiées simultanément

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx = 1$$

et

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \sin \omega x f(x) dx = 0$$

Nous éliminons la solution  $\alpha = 0$  ( $c = 0$ ,  $\omega = 0$ ) qui correspond au pôle réel.

Rappelons que  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$  puisque  $f(x)$  est une fonction de répartition.

On peut écrire :

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx < \int_0^{\infty} e^{-cx} f(x) dx$$

quand  $\omega$  est différent de 0. Si  $c$  était positif, ou nul, cette intégrale serait inférieure à  $\int_0^{\infty} f(x) dx = 1$ . Il faut donc bien que  $c$  soit négatif. Ce n'est que si les durées étaient certaines et que  $dF(x) = 1$  en face de chaque  $x = m$ , que  $c$  pourrait être nul. On aurait alors en effet :

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \cos \omega x f(x) dx = e^{-cm} \cos \omega m = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-cx} \sin \omega x f(x) dx = e^{-cm} \sin \omega m = 0$$

dont la solution est  $c = 0$ ,  $\omega = 2 n \pi/m$ . (fonction impulsion)

On peut donc affirmer que dès qu'il y a une dispersion des durées,  $c$  est négatif et  $H_2(t)$  contient un terme exponentiel qui tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

$H_2(t)$  est une somme de termes tels que :

$$- \frac{e^{c(t+a)} \cos \omega(t+a) + j \sin \omega(t+a)}{K'(c + j \omega)}$$

La comparaison des deux équations définissant  $c$  et  $\omega$  montre d'ailleurs que si  $\alpha = c + j \omega$  est solution,  $\alpha = c - j \omega$  l'est aussi. En associant les deux pôles conjugués, on fait disparaître les termes imaginaires de  $H(t)$ . Notant  $c_n$  et  $\omega_n$  les parties réelles et imaginaires pures des différents pôles imaginaires, nous pouvons écrire :

$$H_2(t) = \sum_n e^{c_n(t+a)} [\gamma_n \cos \omega_n(t+a) + \delta_n \sin \omega_n(t+a)]$$

où tous les  $c_n$  sont négatifs.

Ceci démontre bien la convergence vers l'état stationnaire, qui est générale hormis le cas où la dispersion des durées est nulle (durées certaines).

## 5 - ETUDE DE QUELQUES LOIS DE PROBABILITE

### 1/ Loi de Poisson

$$f(x) = \frac{e^{-x/m}}{m}$$

$$F(x) = e^{-x/m}$$

$$m_2 = m^2 + s^2 = 2 m^2$$

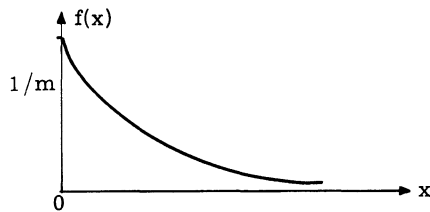


Fig. 15

$$m(a) = \int_0^\infty t \frac{f(t+a)}{F(a)} dt = m$$

L'espérance de survie est constante, indépendante de l'âge.

$$K(p) = 1/[1 + m p]$$

$K(p) = 1$  pour  $p = 0$  seulement ; il n'y a pas de pôles imaginaires.

$H(t)$  se limite donc au terme asymptotique.

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2 m m(a)}{2 m^2} = \frac{t}{m}$$

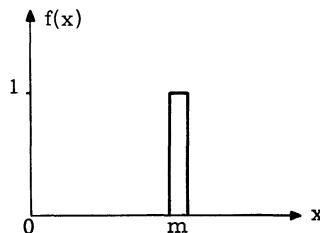


Fig. 16

Le rythme des renouvellements est uniforme  $h(t) = 1/m$ .

2/ Durées certaines

Nous connaissons déjà la solution de ce cas (voir 2-2 et figure 13). Nous allons la retrouver par la méthode des résidus ; cet exercice servira de préparation à la résolution du cas suivant (durées gaussiennes).

On a ici :

$$K(p) = e^{-pm}$$

$$r(p, a) = e^{-p(m-a)}/p$$

$$m_1(a) = m - a$$

On en déduit le terme asymptotique :

$$H_1(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 - 2m(m-a)}{2m^2} = \frac{t+a}{m} - 1/2$$

Considérons maintenant les termes périodiques.

Les pôles sont tels que  $K(\alpha) = 1$ , c'est-à-dire  $e^{-\alpha m} = 1$ ,  $\alpha$  vaut donc  $\alpha = 2\pi n j/m$  ( $c = 0$  et  $\omega = 2\pi n/m$ ).

Le terme de base est :

$$\frac{-e^{\alpha t} r(\alpha, a)}{K'(\alpha)} = \frac{-e^{\alpha t} e^{-\alpha(m-a)}}{e^{-\alpha m} (-\alpha m)}$$

qui s'écrit,

$$e^{\alpha(t+a)} / \alpha m$$

Associé avec le terme conjugué,

$$e^{-\alpha(t+a)} / -\alpha m$$

on trouve :

$$\frac{e^{\alpha(t+a)} - e^{-\alpha(t+a)}}{\alpha m} = \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n \left( \frac{t+a}{m} \right)$$

d'où

$$H_2(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2\pi n \left( \frac{t+a}{m} \right)$$

C'est une somme de fonctions périodiques de période  $m$ , non amorties. Etudions la entre  $qm - a$  et  $qm + m - a$  en posant  $t = qm - a + um$  ;  $u$  est compris entre 0 et 1.

$H_2(t)$  devient

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi n u = \frac{1}{2} - u = \frac{1}{2} - \frac{t - qm + a}{m} = q + \frac{1}{2} - \frac{t+a}{m}$$

Au total  $H(t) = H_1(t) + H_2(t) = q$

C'est bien la fonction en escalier (figure 17).

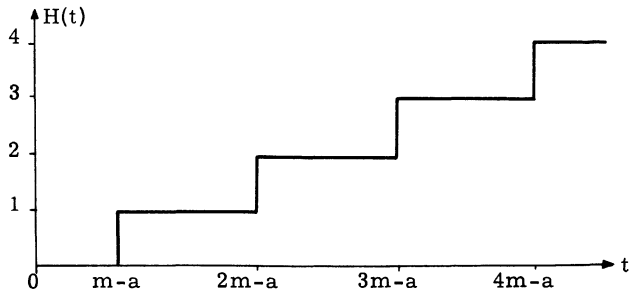


Fig. 17

### 3/ Durées gaussiennes

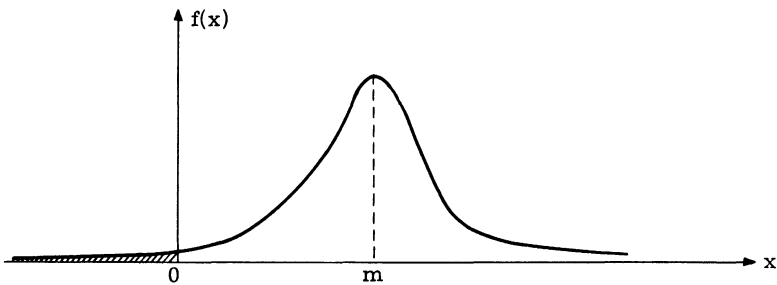


Fig. 18

Les durées négatives n'ayant pas de sens, il faut en principe utiliser la loi de Gauss tronquée :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2s^2}}{\sqrt{2\pi} s G(-m/s)}$$

où  $G(y)$  représente l'intégrale de Galton

$$\int_y^\infty \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Comme  $G$  tend très rapidement vers 1 quand  $y$  tend vers  $-\infty$ , en limitant notre propos aux valeurs de la dispersion  $s/m$  assez petites, nous pouvons négliger le terme  $1 - G(-m/s)$  et utiliser pratiquement la formule de la loi de Gauss complète.

Dans ces conditions :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-m)^2/2s^2}}{\sqrt{2\pi} s}$$

$$K(p) = e^{-mp + s^2 p^2/2}$$

Les pôles sont tels que

$$-m\alpha + s^2 \alpha^2/2 = 2\pi n j$$

ce qui, au 3<sup>e</sup> ordre près en  $s$ , donne

$$\alpha = \frac{-2\pi^2 s^2 n^2}{m^3} - \frac{2\pi n j}{m}$$

Tous calculs faits et pour un élément d'âge  $a = 0$ , on trouve :

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{s^2}{2m^2} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 t}{m^3}} \left[ \frac{1}{\pi n} \sin \left( 2\pi \frac{nt}{m} \right) + \frac{s^2}{m^2} \cos \left( 2\pi \frac{nt}{m} \right) \right] \quad (8)$$

$$h(t) = \frac{1}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 t}{m^3}} \left[ \frac{2}{m} \cos \left( 2\pi \frac{nt}{m} \right) - \frac{4\pi s^2 n}{m^3} \sin \left( 2\pi \frac{nt}{m} \right) \right] \quad (9)$$

Pour  $s = 0$  on retrouve évidemment pour  $H(t)$  la fonction en escalier du deuxième exemple et pour  $h(t)$  la fonction impulsion. Par contre dès que  $s$  est différent de 0, le terme exponentiel intervient pour produire la convergence. Elle est d'autant plus rapide que  $s$  est plus grand. On peut noter que les termes périodiques ont pour période  $m$ .

Pour  $a$  différent de zéro, on obtient de même

$$H(t) = \frac{t}{m} + \frac{m^2 + s^2 - 2m m(a)}{2m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-2\pi^2 s^2 n^2 (t+a)}{m^3}}}{F(a)} \left[ \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n \frac{(t+a)}{m} + \frac{s^2}{m^2} \cos 2\pi n \frac{(t+a)}{m} \right] \quad (10)$$

D'un point de vue général, on attribuera un intérêt particulier aux formules (8) et (9) qui montrent comment s'effectue le passage des mathématiques discontinues de la certitude ( $s = 0$ ) aux mathématiques continues.

## 6 - IDENTIFICATION DES GENERATIONS SUCCESSIVES

Nous nous limiterons dans ce paragraphe à l'étude des parcs dont toutes les unités ont été démarrées simultanément, c'est-à-dire dont tous les  $a_i$  sont nuls.

Reprenons la formule (2) et remplaçons  $\frac{1}{1 - K(p)}$  par son développement en série  $1 + K(p) + [K(p)]^2 + \dots$

Il vient :

$$g(p) = N \sum_{n=1}^{\infty} [K(p)]^n$$

Considérons les termes tels que  $[K(p)]^n$ . Nous avons déjà vu que  $K(p)$  s'exprime simplement en fonction des moments  $m_j$  de la distribution des durées. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
[K(p)]^n &= \left[ 1 - p m_1 + p^2 \frac{m^2}{2!} + \dots \right]^n = \\
&= \left[ 1 - p (n m_1) + \frac{p^2}{2!} [n m_2 + n(n-1) m_1^2] + \dots \right] \\
[K(p)]^n &= \left[ 1 - p(n m) + \frac{p^2}{2} (n^2 m^2 + n s^2) + \dots \right]
\end{aligned}$$

ce qui est la transformée d'une distribution de moyenne  $n m$  et d'écart-type  $s \sqrt{n}$ .

Au facteur  $N$  près,  $h(t)$  apparaît ainsi comme la somme de distributions de probabilité correspondant aux générations successives;  $n = 1$  représente les éléments initiaux,  $n = 2$  ceux qui assurent la première vague des renouvellements,  $n = 3$  la deuxième, etc..

Ce résultat peut être l'objet d'une démonstration plus intuitive et plus directe. Raisonons sur une seule unité installée ;  $N = 1$ .

Par définition la fonction  $h(t)$  dt n'est pas autre chose que la somme des probabilités élémentaires que meure entre  $t$  et  $t + dt$  l'élément initial, ou l'élément de la deuxième, ou de la troisième génération, etc. Le moment où meurt l'élément initial est une grandeur aléatoire de moyenne  $m$  et d'écart-type  $s$  ; soit  $t_1$  ce moment, il est égal à la durée  $d_1$  de l'élément.

Le moment  $t_2$  où meurt l'élément de la deuxième génération est la somme de deux durées aléatoires  $d_1$  et  $d_2$ , qui sont chacune des aléatoires de moyenne  $m$  et d'écart-type  $s$ .  $t_2 = d_1 + d_2$  a pour moyenne  $2 m$  et pour écart-type  $s \sqrt{2}$ .

Le raisonnement se généralise et le moment  $t_n$  où meurt l'élément de la  $n^e$  génération est un aléatoire de moyenne  $n m$  et d'écart-type  $s \sqrt{n}$ .

Appelons  $f_n(t)$  dt la probabilité que l'élément de la  $n^e$  génération meure entre  $t$  et  $t + dt$ .  $h(t)$  qui est par définition, le nombre probable d'élément qui mourront entre  $t$  et  $t + dt$  parmi la descendance de l'unique élément initial, est donc égal à :

$$h(t) = \sum_n f_n(t)$$

La figure 19 montre schématiquement comment les choses se passent.

Si nous admettons que  $f(x)$  est une distribution de Gauss, nous pouvons donner l'expression exacte de  $h(t)$  sous la forme de l'équation (11).

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(t-nm)^2/2ns^2}}{s \sqrt{2 \pi n}} \quad (11)$$

De même

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 1 - G\left(\frac{t - n m}{s \sqrt{n}}\right) \right]$$

On doit remarquer que même si les durées individuelles ne sont pas gaussiennes, le fait que pour obtenir l'instant de la mort des éléments de la  $n^e$  génération il ait fallu additionner  $n$  durées élémentaires, garantit, en vertu du théorème de LIAPOUNOFF, que l'instant  $t_n$  de cette mort tend à suivre une loi de Gauss quand  $n$  tend vers l'infini.

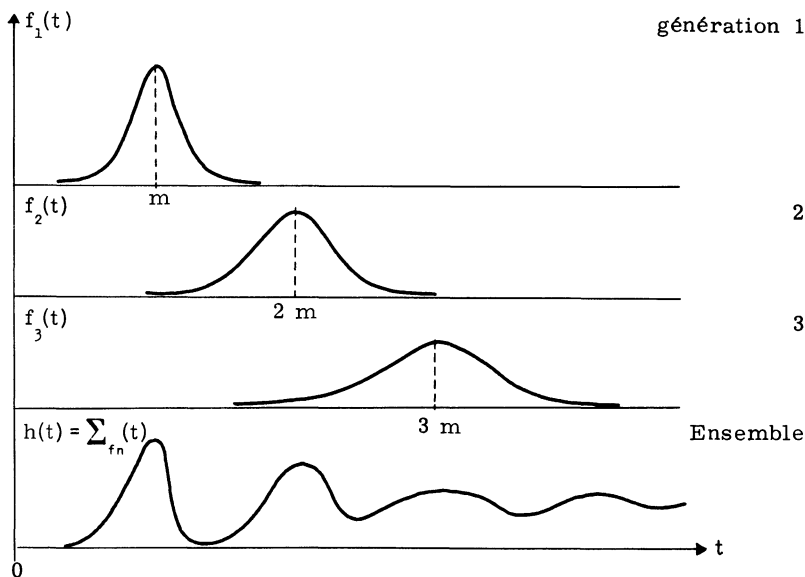


Fig. 19

Nous avons pu faire calculer par un ordinateur électronique les valeurs de la fonction  $h(t)$  exprimée en coordonnées réduites.

Les figures 20 et 21 illustrent la plus ou moins grande rapidité de l'amortissement des oscillations de  $h(t)$  autour de la valeur stationnaire  $1/m$ . Pour une dispersion  $s/m = 0,05$  les oscillations ne s'amortissent qu'avec une très grande lenteur ; par contre pour  $s/m = 0,25$  il suffit de deux ou trois générations pour les rendre négligeables.

Cette présentation graphique rend visuellement sensible le passage des mathématiques du discontinu aux mathématiques des probabilités. Si tous les éléments avaient la même durée  $m$ ,  $h(t)$  se réduirait à une série d'impulsions de hauteur 1 en face de chacun des instant  $t = m, 2m$  etc. comme sur la figure 13. Quand la durée devient aléatoire, un foisonnement se produit qui va aboutir à une permanence statistique. Le passage d'un mode à l'autre de pensée est peut être plus apparent sur le graphique 22 où sont présentées les courbes de  $H(t)$ .

## 7 - COMPARAISON DES DIFFERENTES FORMULES DE PREVISION

A la lumière de ce qui précède, on distinguera trois cas-types :

### 1/ Prévisions à court terme

$$H(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F(a_i) - F(t + a_i)}{F(a_i)} \quad \text{formule (4)}$$

### 2/ Prévisions à long terme

$$H(t) = \frac{Nt}{m} + N \frac{m^2 + s^2}{2m^2} - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m(a_i) \quad \text{formule (5)}$$

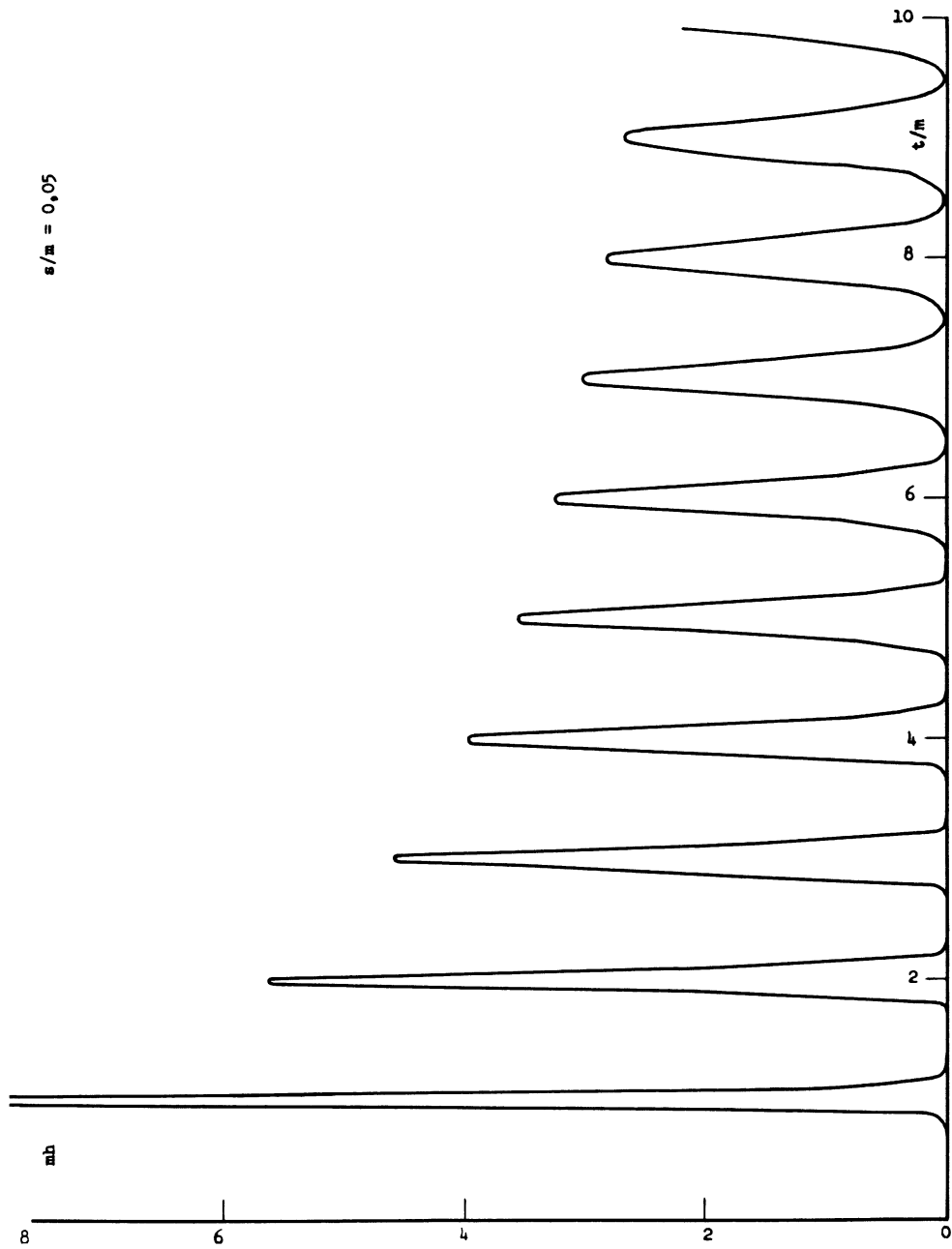


Fig. 20



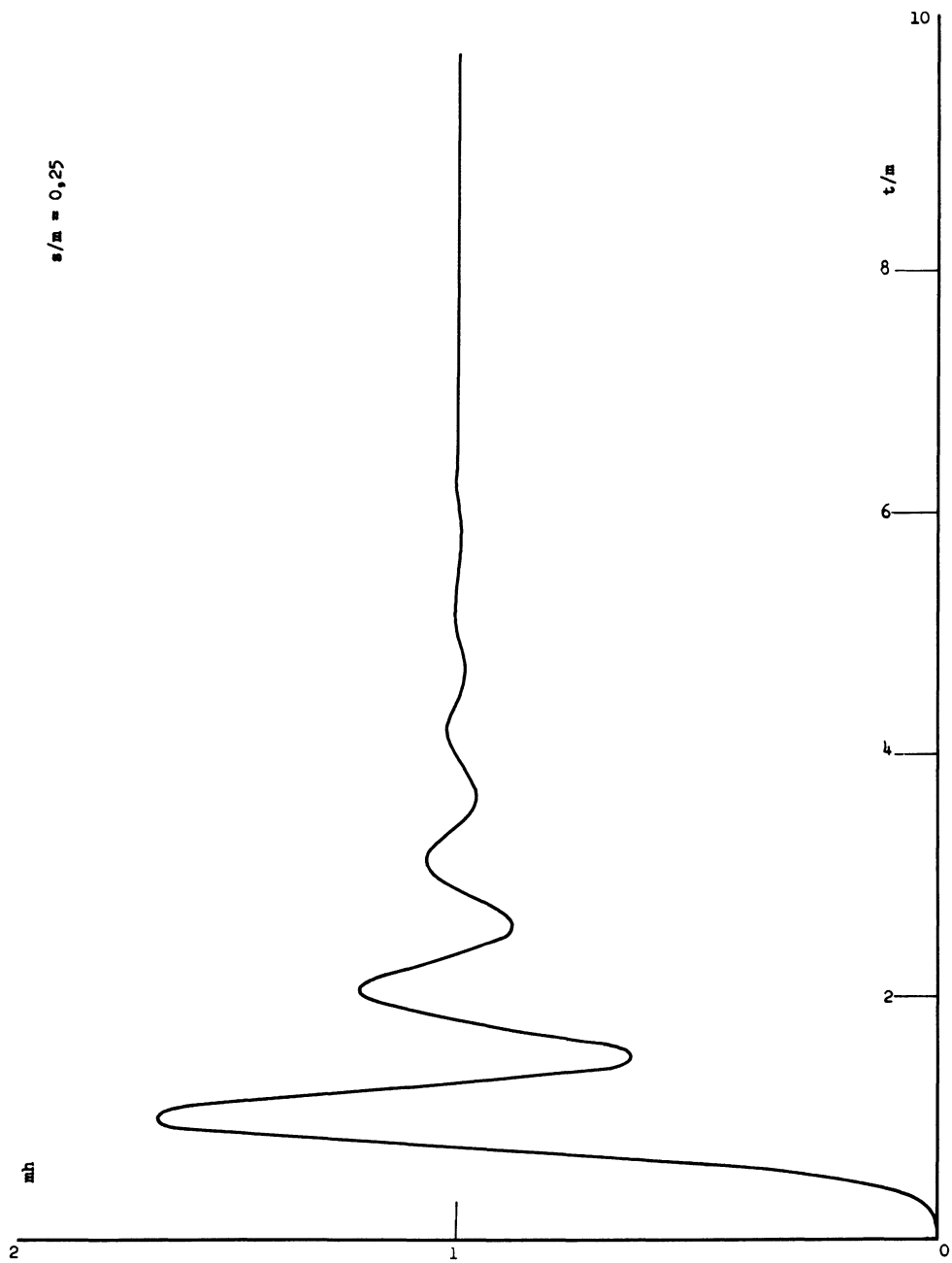


Fig. 21

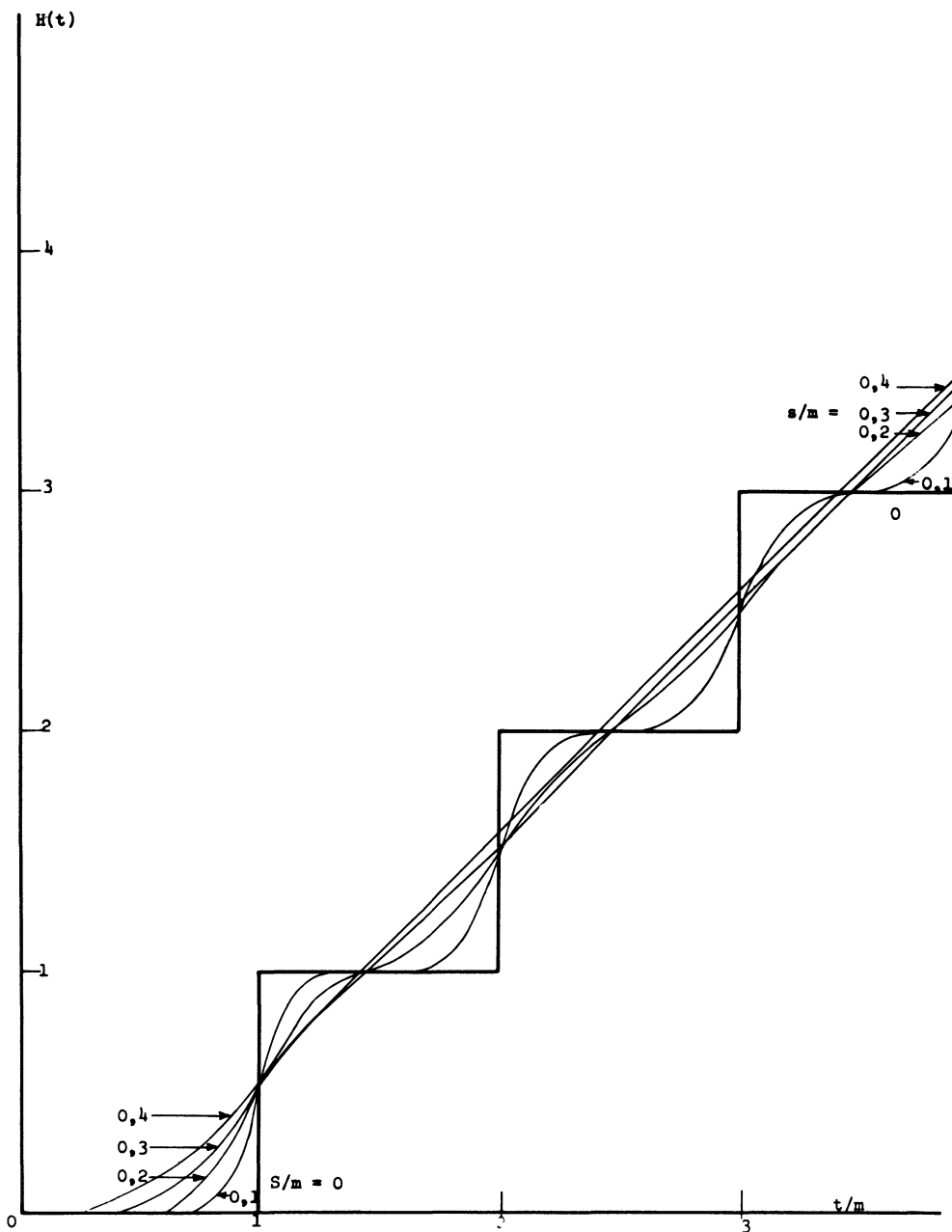


Fig. 22

### 3/ Prévisions à moyen terme

Deux méthodes de calcul, soit par la méthode des résidus (formule (8))  
soit par sommation des générations successives (formule (11)).