REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

TADEUSZ STRODKA

Estimateurs et intervalles de confiance d'un certain paramètre dans la distribution gamma généralisée de Maxwell et de Weibull

Revue de statistique appliquée, tome 12, nº 2 (1964), p. 79-83

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1964__12_2_79_0>

ESTIMATEURS ET INTERVALLES DE CONFIANCE D'UN CERTAIN PARAMÈTRE DANS LA DISTRIBUTION GAMMA GÉNÉRALISÉE DE MAXWELL ET DE WEIBULL

Dr. Tadeusz STRODKA
Ecole Polytechnique de Lodz

Dans cette étude on donne l'estimateur τ_k et l'intervalle de confiance du paramètre $Q_k = b^k$ d'une distribution, dont la distribution exponentielle, ainsi que les distributions de Maxwell de, Rayleigh et de Weibull sont des cas particuliers.,

En particulier on donne l'estimateur π_1 et l'intervalle de confiance du paramètre b et l'on démontre que cet estimateur est "le meilleur", c'est-à-dire sans biais et de variance minimum.

En 1961, J. Agard [1] a donné un estimateur du paramètre dans la distribution exponentielle.

Dans le présent travail on va s'occuper des estimateurs et des intervalles de confiance du paramètre b^k (la condition pour k est donnée dans le théorème 1 ci-après) dans la distribution plus générale et notamment :

$$f(x) = \frac{\alpha}{b^{\frac{\beta+1}{\alpha}} \Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)} x^{\beta} \exp\left(-\frac{x^{\alpha}}{b}\right), \quad \alpha > 0, \ \beta > -1, \ 0 < x < \infty \tag{1}$$

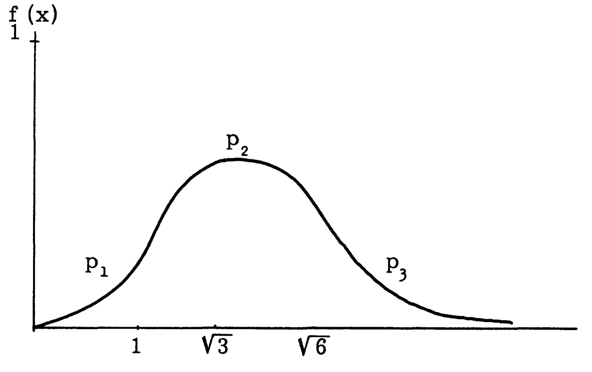
dont les cas particuliers sont les suivants :

1/ Lorsque $\alpha = 1$, $\beta = \rho - 1$ pour $\rho > 0$: distributien gamma - Kendall [2] donne l'estimateur du paramètre b dans cette distributien. Particulièrement lorsque $\beta = 0$ nous obtenons la distribution exponentielle dont s'occupait J. Agard.

2/ Lorsque $\alpha = 2$, $\beta = 2$. distribution de Maxwell.

3/ Lorsque $\alpha = m$, $\beta = m-1$: distribution de Weibull dont la distribution de Rayleigh est un cas particulier lorsque $\alpha = 2$.

La figure (1) présente la courbe de densité dans le cas $\alpha = 2$, $\beta = 3$ et $b = 2$.



Soit R $(X_1, \ldots, X_n)$, un vecteur aléatoire dans un espace des échantillons de n dimensions, et $\{X_i\}$ i = 1, 2, ..., n des variables aléatoires indépendantes de même distribution présentée par la formule (1).

THEOREME 1

$$\text{La statistique (2)} \quad \tau_k = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha k+1}{\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha k} \tag{2}$$

$$k > \frac{-\beta-1}{\alpha} \quad \text{et} \quad k \neq 0,$$

est un estimateur sans biais du paramètre $Q_k = b^k$ pour α et β déterminés.

Démonstration

Etant posée l'indépendance des variables aléatoires considérées, nous obtenons :

$$E(\tau_k) = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha.k+1}{\alpha}\right)} \cdot E(x^{\alpha.k}) = \frac{\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha.k+1}{\alpha}\right)} \int_0^{\infty} x^{\alpha.k} f(x)\, dx, \tag{2a}$$

où f (x) est la fonction donnée par la formule (1). Après la substitution $\frac{x^\alpha}{b} = t$ nous ramenons l'intégrale à la fonction Γ d'Euler et après transformations nous obtenons $E(\tau_k) = b^k = Q_k$ ce qui démontre le théorème.

THEOREME 2

L'écart-type $D(\tau_k)$ de la statistique τ_k s'exprime par la formule :

$$D(\tau_k) = \frac{Q_k}{\sqrt{n}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta + 2\,\alpha.k + 1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\beta + \alpha.k + 1}{\alpha}\right)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration

Etant posée l'indépendance des variables aléatoires considérées, nous obtenons :

$$D^2(\tau_k) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\beta+\alpha.k+1}{\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{n} \cdot D^2(X^{\alpha.k}) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\beta+\alpha.k+1}{\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{n} \left[E\,(X^{2\alpha k}) - E\,(X^{\alpha.k}) \right]$$

Dans la suite nous procédons aux calculs d'une façon analogue à celle dont on a procédé dans (2a).

Après transformations nous obtenons la formule (3).

THEOREME 3

Si U_k est un certain estimateur sans biais du paramètre $Q_k = b$ de la distribution (1), alors l'écart-type $D(U_k)$ satisfait à l'inégalité :

$$D(U_k) \geqslant k.Q_k \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{n\,(\beta+1)}} \tag{4}$$

Démonstration

De l'inégalité de Rao-Cramer, nous obtenons :

$$D^2(U_k) \geqslant \left[n \int_0^\infty \left[\frac{\partial \ln f\,(X_1 Q_k)}{\partial Q_k} \right]^2 f\,(X_1\,Q_k)\,dX \right]^{-1} =$$

$$= \left[n \int_0^\infty \frac{1}{k^2} \left(\frac{X^\alpha}{Q_k^{\frac{k+1}{k}}} - \frac{\beta+1}{\alpha\,Q_k} \right)^2 \frac{\alpha}{Q_k^{\frac{\beta+1}{k}}\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}\, X^\beta \exp\left(-\frac{X^\alpha}{Q_k^{\frac{1}{k}}}\right) dX \right]^{-1}.$$

En substituant $\frac{X^\alpha}{Q_k^{\frac{1}{k}}} = t$ et en tranformant nous avons :

$$D^2(U_k) > \frac{k^2\,Q_k^2\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{n\left[\Gamma\left(\frac{\beta+2\,\alpha+1}{\alpha}\right) - \frac{2\,(\beta+1)\,\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha+1}{\alpha}\right)}{\alpha} + \frac{(\beta+1)^2\,\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\alpha^2} \right]}$$

Nous servant de la relation connue :

$$\Gamma\,(p+1) = p\,\Gamma\,(p), \quad p > 0$$

nous obtenons le résultat énoncé.

THEOREME 4

Pour n suffisamment grand, nous avons :

$$P\left\{\frac{\tau_k}{1+\frac{t}{\sqrt{n}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2\alpha k+1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\beta+\alpha k+1}{\alpha}\right)}-1\right]^{\frac{1}{2}}}<Q_k<\frac{\tau_k}{1-\frac{t}{\sqrt{n}}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{\beta+2\alpha k+1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{\beta+\alpha k+1}{\alpha}\right)}-1\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$\approx 2\,\Phi(t)-1 \tag{5}$$

où $\Phi(t)$ est la fonction cumulative de la distribution normale N (0,1).

Démonstration

Comme la statistique τ_k est une variable aléatoire de distribution asymptotiquement normale $N(Q_k, D(\tau_k))$, pour n suffisamment grand, nous avons par conséquent :

$$P\left[Q_k - t\,D(\tau_k) < \tau_k < Q_k + t\,D(\tau_k)\right] \approx 2\,\Phi(t) - 1 \tag{6}$$

Il est évident que, à l'aide de la statistique τ_k, la formule (5) donne approximativement, pour n suffisamment grand, l'intervalle de confiance pour le paramètre estimé Q_k au niveau de confiance $2\,\Phi(t) - 1$.

THEOREME 5

La Statistique $\tau_1 = \frac{\alpha}{n(\beta+1)}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha}$ est un estimateur efficient du paramètre $Q_1 = b$ de la distribution (1), dont l'écart-type est

$$D_{min} = Q\sqrt{\frac{\alpha}{n(\beta+1)}}\ .$$

Démonstration

La démonstration du théorème découle de l'égalité $R(\tau_1) = Q_1$ démontrée déjà dans le théorème 1, ainsi que de la relation évidente :

$$D(\tau_1) = Q_1\sqrt{\frac{\alpha}{n(\beta+1)}} = D_{min}$$

obtenue de (3) et (4). De ce que nous venons de dire il résulte déjà que τ_1 est aussi un estimateur suffisant.

Note :

Dans le cas : k = 1 la formule (5) prend la simple forme suivante :

$$P\left(\frac{\tau_1}{1+\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+1}}} < b < \frac{\tau_1}{1-\frac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta+1}}}\right) \approx 2\,\Phi(t) - 1 \tag{7}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. AGARD - "Estimateurs et intervalles de confiance de l'écart-type d'une loi normale et de la moyenne d'une loi exponentielle". Revue de Statistique Appliquée vol. IX, n° 2 - 1961.

[2] M.S. KENDALL - "The advanced theory of statistics" Vol. II - 3ème edition p. 20/21.

[3] M. FISZ - "Calcul des probabilités et statistique mathématique" Warszawa 1958 P.W.N. (En polonais).