REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. ROCHE

Étude de la distribution et tests de la durée de vie d'un matériel (deuxième partie)

Revue de statistique appliquée, tome 10, nº 4 (1962), p. 33-54
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1962__10_4_33_0>

ÉTUDE DE LA DISTRIBUTION
ET TESTS DE LA DURÉE DE VIE D'UN MATÉRIEL (deuxième partie)

M[lle] M. ROCHE
Ingénieur à la Société d'Économie et de Mathématique Appliquées

Dans un article précédent, nous avons cité différentes formes de distributions de la variable aléatoire : "durée de vie d'un matériel".

En faisant remarquer le caractère relativement simple et général de la loi exponentielle, nous avons signalé divers tests permettant de s'assurer de la validité de l'hypothèse d'une telle distribution des durées de vie des matériels étudiés.

Admettons que le résultat du test ait été positif. Il nous reste à déterminer le paramètre intervenant dans cette loi, c'est-à-dire ϑ, durée de vie moyenne.

Suivant le but poursuivi dans l'évaluation de ϑ, deux types de tests sont possibles :

- les tests fournissant effectivement une estimation de la durée de vie moyenne ϑ des matériels du lot.

- les tests, du type contrôle de réception, permettant de décider si une certaine valeur de ϑ (soit exigée par l'utilisateur, soit indiquée par le constructeur par exemple) est respectée.

Les paramètres intervenant dans ces divers tests sont les suivants :

n : nombre de matériels testés
r : " " avariés ($r \leqslant n$)
$T(t)$: somme des n durées de vie à l'instant t
$x_{i,n}$: durée de vie du $i^{ème}$ matériel ayant une avarie depuis le début du test.
t^* : durée du test pour un matériel de l'échantillon
T_0 : durée maximum possible

A - TESTS FOURNISSANT UNE ESTIMATION, OU UN INTERVALLE DE CONFIANCE, DE LA DUREE DE VIE MOYENNE ϑ.

1/ On place n matériels sous contrôle. On arrête le test lorsque r d'entre eux sont avariés.

a) On ne remplace pas les matériels avariés.

- Quelques définitions :

Soit $x_{i,n}$ le temps écoulé avant la $i^{\text{ème}}$ avarie

$$x_{i,n} \leqslant x_{2,n} \leqslant x_{3,n} \leqslant \dots \leqslant x_{i,n} \leqslant \dots \leqslant x_{r,n}$$

- La densité de probabilité de $x_{i,n}$ s'écrit :

$$f(x_{i,n}) = \frac{n!}{(i-1)!\,1!\,(n-i)!}\left(1 - e^{-\frac{x_{i,n}}{\theta}}\right)^{i-1} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x_{i,n}}{\theta}} \left(e^{-\frac{x_{i,n}}{\theta}}\right)^{n-i}$$

c'est en effet la probabilité d'avoir $(i - 1)$ avaries avant l'instant $x_{i,n}$ une avarie dans l'intervalle $(x_{i,n}, x_{i,n} + dx_{i,n})$ et $(n - i)$ matériels non avariés à l'instant $x_{i,n} + dx_{i,n}$.

- La densité de probabilité de l'ensemble $(x_{1,n};\ x_{2,n};\ \dots x_{r,n}/\vartheta)$ est de la forme :

$$g(x_{1,n} \dots x_{r,n}, \vartheta) = \frac{n!}{(n-r)!} \frac{1}{\vartheta^r} e^{-\frac{1}{\theta}\left[\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n-r)\, x_{r,n}\right]}$$

c'est en effet la probabilité d'avoir r avaries respectivement aux instants $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots x_{r,n}$ et $(n - r)$ matériels non avariés à l'instant $x_{r,n}$.

α) Estimation et intervalle de confiance de la durée de vie moyenne.

- Estimation de ϑ

La méthode du maximum de vraisemblance fournit comme estimateur de ϑ :

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n-r)\, x_{r,n}}{r}$$

- Densité de probabilité de $\hat{\vartheta}_{r,n}$:

Considérons les nouvelles variables $y_{i,n}$ telles que :

$$\begin{cases} y_{1,n} = x_{1,n} \\ y_{i,n} = x_{i,n} - x_{i-1,n} \quad 2 \leqslant i \leqslant r \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n - r)\, x_{r,n}$ peut s'exprimer en fonction des $y_{i,n}$

En effet :

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n - r)\, x_{r,n} = n\, x_{1,n} + (n - 1)(x_{2,n} - x_{1,n}) + \dots$$
$$+ (n - r + 1)(x_{r,n} - x_{r-1,n})$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n - r)\, x_{r,n} = \sum_{i=1}^{r} y_{i,n}\,(n - i + 1)$$

et :

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} (n - i + 1)\, y_{i,n}}{r}$$

Démontrons que les variables $(n - i + 1)\, Y_{i,n}$ suivent indépendamment une loi de densité $\frac{1}{\vartheta} e^{-x/\theta}$; $x \geqslant 0$, $\vartheta > 0$

En effet $g\,(x_{1,n} \ldots\ldots x_{r,n}, \vartheta)$ peut se mettre sous la forme :

$$g\,(y_{1,n} \ldots\ldots y_{r,n}, \vartheta) = \frac{n!}{(n - r)!}\, \frac{1}{\vartheta^r} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{r} (n-i+1)\, y_{i,n}}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$g\,(y_{1,n} \ldots\ldots y_{r,n}, \vartheta) = \prod_{i=1}^{r} \frac{n - i + 1}{\vartheta} e^{-\frac{1}{\theta}(n+i+1)\, y_{i,n}}$$

La fonction caractéristique de $\hat{\vartheta}_{r,n}$ est donc :

$$\varphi_{\hat{\theta}_{r,n}}(s) = \left(1 - \frac{is\vartheta}{r}\right)^{-r}$$

donc $\dfrac{2r\, \hat{\vartheta}_{r,n}}{\vartheta}$ suit une loi du χ^2 à 2 r degrés de liberté.

D'après les propriétés de la loi du χ^2 on obtient directement :

$$E\,(\hat{\vartheta}_{r,n}) = \vartheta$$

$$\text{et } V\,(\hat{\vartheta}_{r,n}) = \frac{\vartheta}{r}$$

$\hat{\vartheta}_{r,n}$ est donc un estimateur sans distorsion et de variance minimum de la durée de vie moyenne ϑ.

Ce changement de variables permet d'avoir également l'espérance mathématique de la durée de vie du matériel subissant la rième avarie : $E\,(X_{r,n})$.

En effet : $x_{r,n} = x_{1,n} + (x_{2,n} - x_{1,n}) + \ldots\ldots + (x_{r,n} - x_{r-1,n})$

$$= \sum_{i=1}^{r} y_{i,n}$$

d'où :

$$E\,(X_{r,n}) = \sum_{i=1}^{r} E(Y_{i,n}) = \vartheta \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n - i + 1}$$

De même :

$$V\,(X_{r,n}) = \vartheta^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(n - i + 1)^2}$$

- Intervalle de confiance à α % pour ϑ.

On a vue que $\frac{2r\,\hat{\vartheta}_{r,n}}{\vartheta}$ suivait une loi du χ^2 à 2 r degrés de liberté.

Soit χ^2 tel que : $\Pr\{\chi^2 > \chi^2_\alpha\} = \alpha$ et T_r le total des durées de vie des n matériel lors de l'arrêt du test.

La limite inférieure pour ϑ est définie par l'inégalité :

$$\frac{2\,T_r}{\vartheta} < \chi^2_\alpha \ (2) \text{ soit } \boxed{\vartheta > \frac{2\,T_r}{\chi^2_\alpha\ (2r)}}$$

L'intervalle de confiance $(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$ tel que

$$\Pr\{\chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \Pr\{\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{\alpha}{2}$$

définit pour ϑ l'intervalle de confiance à α % :

$$\boxed{\frac{2\,T_r}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\ (2r)} < \vartheta < \frac{2\,T_r}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ (2r)}}$$

β) Estimation et intervalle de confiance de x_p défini par :

$\Pr\{X > x_p\} = p$ (probabilité donnée et égale à p d'une durée de vie supérieure à x_p).

On a : $$e^{-\frac{x_p}{\theta}} = p$$

d'où : $$x_p = \vartheta \operatorname{Log} \frac{1}{p}$$

- La méthode du maximum de vraisemblance fournit comme estimateur de x_p, $\hat{x}_p$ tel que :

$$\hat{x}_p = \hat{\vartheta}_{r,n} \operatorname{Log} \frac{1}{p}$$

- Intervalle de confiance à α % :

La limite inférieure pour x_p est définie par :

$$\boxed{x_p > \frac{2\,T_r \operatorname{Log} \frac{1}{p}}{\chi^2_\alpha\ (2r)}}$$

et son intervalle de confiance par

$$\boxed{\frac{2\,T_r \operatorname{Log} \frac{1}{p}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\ (2r)} < x_p < \frac{2\,T_r \operatorname{Log} \frac{1}{p}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\ (2r)}}$$

où χ^2_α, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ et $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ ont la même définition que précédemment.

Ceci peut s'interpréter comme suit :

l'intervalle de tolérance ainsi défini est tel qu'il conduira à faire accepter une proportion de matériels, de durée de vie supérieure ou égale à τ :

avec : $$\tau = \frac{2\, T_r \, \mathrm{Log}\, \frac{1}{p}}{\chi^2_{\alpha} \quad (2r)} \; ,$$

supérieure ou égale à p avec un risque d'erreur égal à α (risque de rejeter des matériels satisfaisants c'est-à-dire de durée de vie $\geqslant \tau$).

γ) Limite inférieure de p_{t*} défini par :

$$p_{t*} = \Pr \{X > t^*\}$$

$$= e^{-\frac{t^*}{\theta}}$$

D'après α) $$\boxed{p_{t*} > \exp \left[-\chi^2_{\alpha} \quad (2r) \; t^*/2 \; T_r \right]}$$

δ) Limite inférieure T_r tel que $p_{t*} \geqslant \gamma$

Cette inégalité peut encore s'écrire :

$$\exp \left[-\chi^2_{\alpha} \quad (2r) \; t^*/2 \; T_r \right] \geqslant \gamma$$

ou $$\boxed{T_r \geqslant \chi^2_{\alpha} \quad (2r) \; t^*/2 \; \mathrm{Log}\, \frac{1}{\gamma}}$$

ce qui s'interprète comme précédemment, à condition de remplacer τ par t^* et p par γ .

b) On remplace les matériels avariés

- Estimation de ϑ .

La densité de probabilité de l'ensemble ($x_{1,n}$; $x_{2,n}$; ....., $x_{r,n}$; ϑ) est alors :

$$g(x_{1,n} \ldots \; x_{r,n} \; ; \vartheta) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \; \frac{1}{\vartheta^r} \; \left(e^{-\frac{x_r}{\theta}}\right)^2 \left(e^{-\frac{x_r}{\theta}}\right)^{n-r}$$

La méthode du maximum de vraisemblance fournit comme estimateur de la vie moyenne ϑ , $\hat{\vartheta}_{r,n}$, défini par :

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{n \; x_{r,n}}{r}$$

Le même changement de variables qu'en a) entraîne $n \; x_{r,n} = n \sum_{i=1}^{r} y_{i,n}$ et montre que $\frac{2r \; \hat{\vartheta}_{r,n}}{\vartheta}$ est également dans ce cas, distribué suivant une loi de χ^2 à 2r degrés de liberté.

Remarque :

On peut montrer qu'il y a intérêt à observer les r premières avaries d'un échantillon de taille $n(>r)$ plutôt que les r avaries d'un échantillon de taille r.

$$\alpha_{r,n} = \frac{E(X_{r,n})}{E(X_{r,r})} \quad \text{mesure le gain de temps}$$

avec $\qquad E(X_{r,n}) = \vartheta \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n-i+1}$ pour a)

et $\qquad E(X_{r,n}) = \frac{r\vartheta}{n}$ pour b)

2/ <u>On place n matériels sous contrôle. On arrête le test lorsque la somme des n durées de vie atteint une valeur T donnée.</u>

a) <u>Cas de non remplacement des matériels avariés</u>.

On a alors :

$$T = \sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n-r)\, x_{r,n} \qquad r \text{ aléatoire}$$

b) <u>Cas de remplacement des matériels avariés</u>

On a alors :

$$T = n\, x_{r,n} \qquad r \text{ aléatoire}$$

Dans les deux cas, et toujours dans l'hypothèse d'une loi de survie exponentielle,

$$\Pr\{k = r \text{ pendant } (0,T)\} = \frac{\left(\frac{T}{\vartheta}\right)^r}{r!}\, e^{-\frac{T}{\theta}}$$

- <u>Relation entre la loi de POISSON et la loi de χ^2</u> :

On sait que : $\Pr\{k > x\} = \Pr\{\chi^2 < 2\lambda\}$ avec $2(x+1)$ degrés de liberté, λ étant le paramètre de la loi de POISSON.

Donc ici : $\Pr\{k \leqslant r\} = \Pr\{\chi^2 \geqslant \frac{2T}{\vartheta}\}$ avec $2(r+1)$ degrés de liberté.

α) Intervalle de confiance de ϑ

Soit χ^2_α tel que $\Pr\{\chi^2 > \chi^2_\alpha\} = \alpha$

La limite inférieure pour ϑ est définie par l'inégalité :

$$\frac{2T}{\vartheta} < \chi^2_\alpha\,(2r+2) \text{ soit } \boxed{\vartheta > \frac{2T}{\chi^2_\alpha\,(2r+2)}}$$

L'intervalle de confiance de ϑ à α % se déduit de la relation :

$$\Pr\{k = r\} = \Pr\{k \leqslant r\} - \Pr\{k \leqslant r-1\}$$

soit :

$$\boxed{\frac{2T}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\,(2r+2)} < \vartheta < \frac{2T}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\,(2r)}}$$

β) Limite supérieure de x_p (défini plus haut) :

On a : $$e^{-\frac{x_p}{\theta}} = p$$

donc : $$\vartheta = \frac{x_p}{\text{Log} \frac{1}{p}}$$

soit : $$\boxed{x_p > \frac{2\, T\, \text{Log} \frac{1}{p}}{\chi^2_\alpha \; (2r + 2)}}$$

soit τ , la quantité : $$\tau = \frac{2\, T\, \text{Log} \frac{1}{p}}{\chi^2_\alpha \; (2r + 2)}$$

La dernière inégalité peut s'interpréter comme suit :

l'intervalle de tolérance ainsi défini est tel qu'il conduira à faire accepter une proportion de matériels, de durée de vie supérieure ou égale à τ, supérieure ou égale à p avec un risque d'erreur égal à α (risque de refuser des matériels de durée de vie supérieure ou égale à τ).

3/ On place n matériels sous contrôle et on teste chacun d'eux pendant un temps t^* (Les matériels avariés ne sont pas remplacés).

La probabilité d'avoir r matériels avariés sur les n testés est égale à :

$$\Pr\{ k = r\} = C_n^r \left(1 - e^{-\frac{t^*}{\theta}} \right)^r \left(e^{-\frac{t^*}{\theta}} \right)^{n-r}$$

Appelons b la quantité :

$$b = \text{Prob}\{ X > t^* \} = e^{-\frac{t^*}{\theta}}$$

Relation entre la loi binomiale et la loi de FISHER-SNEDECOR

On sait que :

$$\Pr\{ k \leqslant x \} = \Pr \left\{ F \leqslant \frac{n - x}{n + 1} \; \frac{p}{p - 1} \right\}$$

avec 2 (x + 1), 2 (n - x) degrés de liberté, p étant le paramètre de la loi binomiale.

Donc ici :

$$\Pr\{k \leqslant r \} = \Pr \left\{ F[2\,(r + 1),\ 2\,(n - r)] \leqslant \frac{n - r}{r + 1} \; \frac{1 - e^{-\frac{t^*}{\theta}}}{e^{-\frac{t^*}{\theta}}} \right\}$$

c'est-à-dire :

$$b = \left\{ 1 + \frac{r + 1}{n - r}\, \Gamma_\alpha \; [\, 2\,(r + 1),\ 2\,(n - r)] \right\}^{-1}$$

D'où l'on déduit la limite inférieure à α % pour ϑ :

$$\boxed{\vartheta > t^* \left[\text{Log} \left(1 + \frac{r+1}{n-r} F_\alpha \;(2r+2,\; 2n-2r)\right)\right]^{-1}}$$

4/ On prélève au hasard des matériels dans un lot et on teste chacun d'eux, pendant un temps t^*. On arrête le test lorsque r d'entre eux sont avariés.

Un matériel est dit avarié s'il a une durée de vie inférieure ou égale à t^*.

Soit n le nombre de matériels testés pour avoir r avaries (la $r^{\text{ième}}$ avarie se produit lorsque le $n^{\text{ième}}$ matériel est placé sous test et pas avant).

donc :
$$\Pr\{k = r\} = C_{n-1}^{r-1} \quad (1-b)^{r-1}\, b^{\,n-r}$$

si
$$b = \Pr\{X > t^*\}$$

donc :
$$b = \left[1 + \frac{r}{n-r} F_\alpha \;(2r,\; 2n-2r)\right]^{-1}$$

Dans le cas ou $b = e^{-\frac{t^*}{\theta}}$, la limite inférieure pour ϑ est définie par :

$$\boxed{\vartheta > t^* \left[\text{Log} \left(1 + \frac{r}{n-r} F_\alpha \;(2r,\; 2n-2r)\right)\right]^{-1}}$$

B - TESTS DU TYPE " CONTROLE DE RECEPTION" -

1/ On place n matériels sous contrôle. On arrête le test lorsque r d'entre eux sont avariés.

On veut tester l'hypothèse $H_1(\vartheta_1)$ contre l'hypothèse $H_2(\vartheta_2)$. Pour un risque de première espèce α donné, on veut minimiser le risque de seconde espèce β (meilleur test au sens de Neyman).

On sait que la région de rejet W est donnée par :

$$\frac{f\,(x_{1,n} \ldots\ldots x_{r,n}\; ; \vartheta_2)}{f\,(x_{1,n} \ldots\ldots x_{r,n}\; ; \vartheta_1)} > K$$

soit :
$$\left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\right)^r e^{-\left(\frac{1}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_1}\right)^r \hat{\theta}_{r,n}} > K$$

Si ϑ_1 et ϑ_2 sont tels que $\frac{1}{\vartheta_2} - \frac{1}{\vartheta_1} > 0$, la région de rejet pour $\vartheta = \vartheta_1$ doit avoir la forme $\hat{\vartheta}_{r,n} < C$.

Donc $\Pr\{\text{ rejet } \vartheta = \vartheta_1 / \vartheta_1\} = \alpha = \Pr\{\hat{\vartheta}_{r,n} < C / \vartheta = \vartheta_1\}$

On a vu précédemment que $\frac{2r\,\hat{\vartheta}_{r,n}}{\vartheta}$ suivait une loi du χ^2 a 2r degrés de liberté.

d'où $\quad \Pr\left\{W < \frac{2r\,C}{\vartheta_1} = \alpha\right\}$ ou $\Pr\left\{W > \frac{2r\,C}{\vartheta_1}\right\} = 1 - \alpha$

Si on définit χ^2_γ (n) par :

$$\Pr\{\chi^2(n) > \chi^2_\gamma(n)\} = \gamma$$

C est égal à :

$$C = \vartheta_1 \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2r$$

donc $\boxed{\hat{\vartheta}_{r,n} < \vartheta_1 \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2r}$ définit la région de rejet.

et la courbe d'efficacité du test est définie par :

$$L(\vartheta) = \{\text{Probabilité d'accepter } \vartheta = \vartheta_1/\vartheta\} = \Pr\{\hat{\vartheta}_{r,n} > \vartheta_1 \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2r\}$$

$$L(\vartheta) = \Pr\{\chi^2(2r) > \vartheta_1 \chi^2_{1-\alpha}(2r)/\vartheta\} \qquad \text{avec } \vartheta < \vartheta_1$$

Remarques :

a) Si r est inconnu.

On veut toujours $L(\vartheta_1) = 1-\alpha$ et $L(\vartheta_2) \leqslant \beta$

avec $\vartheta_2 < \vartheta_1$ et α, β fixés

$$\Pr\{\chi^2(2r) > \chi^2_\beta(2r)\} = \beta \text{ et } \chi^2(2r) > \vartheta_1 \chi^2_{1-\alpha}(2r)/\vartheta$$

entraîne :

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} \chi^2_{1-\alpha}(2r) \geqslant \chi^2_\beta(2r)$$

soit :

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1} \leqslant \frac{\chi^2_{1-\alpha}(2r)}{\chi^2_\beta(2r)}$$

Si r croît, $\dfrac{\chi^2_{1-\alpha}(2r)}{\chi^2_\beta(2r)}$ croît et tend vers 1

Il existe des tables donnant r pour α, β, ϑ_1, ϑ_2 ($\vartheta_1 > \vartheta_2$) donnés. ($\hat{\vartheta}_{r,n} > C$ étant la région d'acceptation pour $\vartheta = \vartheta_1$).

b) Utilisation d'un test tronqué.

On vient de voir que la meilleure région d'acceptation pour H_1 au sens de Neyman et Pearson était définie par $\hat{\vartheta}_{r,n} > C$.

- On ne remplace pas les matériels avariés. $\hat{\vartheta}_{r,n}$ est alors égal à

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_{i,n} + (n-r)\, x_{r,n}}{r} \qquad \text{r et n étant donnés}$$

Une première interprétation consiste à attendre pendant un temps $x_{r,n}$, à former $\hat{\vartheta}_{r,n}$ et à en tirer la décision appropriée. Toutefois ce procédé fait perdre de l'information lorsque le test peut s'observer de façon continue.

On montre alors qu'il est possible de diminuer le temps d'attente de la décision ainsi que le nombre de matériels défaillants.

Supposons en effet, qu'à l'instant t il y ait exactement k avaries $0 \leqslant k \leqslant r - 1$ et que la durée de vie totale observée

$$V(t) = \sum_{i=1}^{k} x_{i,n} + (n - k)\, x_{k,n}$$

soit supérieure à r C.

V (t) est une fonction monotone croissante de t et $V(x_{r,n}) \geqslant V(t) > rC$ donc on peut arrêter le test à l'instant t et accepter H_1.

Plus généralement, une règle de décision ayant la même courbe d'efficacité que celle correspondant au test de région d'acceptation $\hat{\vartheta}_{r,n} > C$, mais exigeant, en moyenne, un plus petit nombre d'avaries et un temps de décision plus court est la suivante :

- Poursuivre le test tant que $V(t) < rC$ et $0 \leqslant k \leqslant r - 1$

- Arrêter le test et accepter H_o dès que $V(t) > rC$ et $0 \leqslant k \leqslant r - 1$.

- Arrêter le test au bout du temps $x_{r,n}$ et rejeter H_o si $V(t) < rC$ pour $t \leqslant x_{r,n}$.

On remplace les matériels avariés :

$\hat{\vartheta}_{r,n}$ est égal à :

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{r\, x_{r,n}}{n}$$

Donc la région d'acceptation pour H_1 ($\vartheta = \vartheta_1$) est définie par :

$$x_{r,n} > C^* = \frac{rC}{n}$$

Si la $r^{\text{ième}}$ avarie ne s'est pas produite au temps C^* on acceptera H_1. Il est alors inutile de continuer le test.

D'où l'idée du test tronqué suivant :

On arrête le test après un temps égal à min $\{X_{r,n}, C^*\}$. On accepte H_1 si $C^* < X_{r,n}$; on rejette H_1 dans le cas contraire.

2/ <u>On place n matériels sous contrôle. On arrête le test au bout d'un temps égal à min</u> $\{X_{r,n}, T_o\}$.

avec $X_{r,n}$: temps écoulé avant la $r^{\text{ième}}$ avarie.

T_o : durée maximum du test

Si le test est arrêté au bout du temps $X_{r,n}$, on refuse le lot dont est extrait l'échantillon.

Si le test est arrêté au bout du temps T_o, on l'accepte.

a) <u>Cas de non remplacement des matériels avariés.</u>

- Si r est le nombre d'observations nécessaires pour prendre une décision

$$E_\theta (r) = \sum_{k=1}^{r-1} k\, C_n^k \left(1-e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^k \left(e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^{n-k} + r\left[1 - \sum_{k=0}^{r-1} C_n^k \left(1-e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^k \left(e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^{n-k}\right]$$

ou

$$E_\theta (r) = n\left(1-e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right) \sum_{k=0}^{r-2} C_{n-1}^k \left(1-e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^k \left(e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^{n-k}$$

$$+ r\left[1 - \sum_{k=0}^{r-1} C_n^k \left(1-e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^k \left(e^{-\frac{T_0}{\theta}}\right)^{n-k}\right]$$

- Si T est le temps nécessaire d'attente de la décision

$$E_\theta (T) = \sum_{k=1}^{r} \Pr\{r = k/\vartheta\}\ E_\theta (X_{k,n})$$

- Si L (ϑ) est la probabilité d'accepter si ϑ est la vraie valeur

$$L(\vartheta) = \sum_{k=0}^{r-1} \Pr\{r = k/\vartheta\}$$

- Test tronqué

La procédure la plus directe (mais aussi la plus lente) pour obtenir un test tronqué, est de remarquer son équivalence avec le test de deux lois binomiales de paramètres respectifs.

$$\begin{cases} p_0 = 1 - e^{-\frac{T_0}{\theta_0}} \\ p_1 = 1 - e^{-\frac{T_0}{\theta_1}} \end{cases}$$

pour une courbe d'efficacité telle que

$$L(P_0) \geqslant 1 - \alpha \quad \text{et } L(P_1) \leqslant \beta$$

Autrement dit, il s'agit de déterminer n et r de telle manière que l'on acceptera H_0 (p_0) si le nombre de matériels avariés de l'échantillon est $\leqslant r - 1$ et que l'on rejettera cette hypothèse dans le cas contraire.

Les calculs peuvent être faits à partir des tables de la loi binomiale ou de la loi beta incomplète.

Si α et β sont peut élevés et si ϑ_0 /T_0 est supérieur ou égal à 3, le n cherché sera important. Dans ces conditions on peut employer une méthode moins rigoureuse mais plus rapide, pour déterminer n et r.

La justification est la suivante :

- Si n est beaucoup plus grand que r, la courbe d'efficacité basée règle

$$\beta_{r,n}\quad x_{r,n} > C \text{ avec } \beta_{r,n} = \frac{\vartheta_0}{E(X_{r,n})}$$

est très voisine de la courbe d'efficacité correspondant à la région d'acceptation $\hat{\vartheta}_{r,n} > C$.

Pour que le test s'arrête après T_o unités de temps, n doit être tel que :

$$\frac{C}{\beta_{r,n}} = T_o$$

Or, quand n est grand, $\frac{1}{\beta_{r,n}} \sim \text{Log} \frac{n}{n-r}$

d'où

$$\boxed{\left[n = r/1 - e^{-\frac{T_o}{C}} \right]}$$

où $[x]$ signifie le plus grand nombre entier $\leqslant$ x

avec $$C = \vartheta_o \ \chi^2_{1-\alpha} \ (2r)/2r$$

b) <u>Cas de remplacement des matériels avariés.</u>

$$\Pr \{ r_o = k/\vartheta \} = \frac{\lambda^k_\theta}{k!} e^{-\lambda_\theta} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots r-1$$

$$\Pr \{ r_o = r/\vartheta \} = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k_\theta}{k!} e^{-\lambda_\theta}$$

avec $\lambda_\theta = \frac{n \, T_o}{\vartheta}$

d'où :

$$E_\theta (r) = \lambda_\theta \sum_{k=0}^{r-2} \frac{\lambda^k_\theta}{k!} e^{-\lambda_\theta} + r \left[1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k_\theta}{k!} e^{-\lambda_\theta} \right]$$

$$E_\theta (T) = \frac{\vartheta}{n} E_\theta (r)$$

$$L(\vartheta) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda^k_\theta}{k!} e^{-\lambda_\theta}$$

- <u>Test tronqué.</u>

On a vu en 1), b) qu'il existait un test tronqué tel que :

$$T_o = C^* = \frac{r\,C}{n} = \vartheta_o \ \chi_{1-\alpha} \ (2r)/2n$$

Comme n doit être un nombre entier, l'équation ne peut être vérifiée qu'approximativement :

(1) $$\boxed{n = [\ \vartheta_o \ \chi^2_{1-\alpha} \ (2r)/2\,T_o\ ]}$$

ou $[x]$ signifie le plus grand nombre entier $\leqslant$ x

Il est intéressant de voir que le nombre de matériels mis sous test est inversement proportionnel à la durée du test. Il existe des tables de $\vartheta_o \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2$ donnant r.

La courbe d'efficacité du test min $[X_{r,n}, T_o]$ où r est donné par la table et n par (1) est telle que $L(\vartheta_o) \geqslant 1 - \alpha$ mais quelquefois $L(\vartheta_1)$ est légèrement supérieur à β.

Il y a deux façons de remédier à cet inconvénient :

- la première est de laisser à l'expérimentateur la possibilité de remplacer T_o par $T'_o = \vartheta_o \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2n$ légèrement supérieur. Le test relatif à min $[X_{r,n}, T'_o]$ est alors caractérisé par $L(\vartheta_o) = 1 - \alpha$ et $L(\vartheta_1) \leqslant \beta$.

- la deuxième est de mettre (n + 1) matériels sous test et de prendre, au lieu de T_o, $T''_o = \vartheta_o \chi^2_{1-\alpha}(2r)/2(n+1)$.

Le test relatif à min $(X_{r,n}, T''_o)$ est alors caractérisé par : $L(\vartheta_o) = 1 - \alpha$ et $L(\vartheta_1) \leqslant \beta$.

3/ <u>Test séquentiel de durée de vie</u>

Les procédures utilisées jusqu'à maintenant peuvent être substantiellement améliorées par l'emploi d'une procédure séquentielle.

Le test séquentiel de durée de vie est une application de la théorie de Wald sur l'analyse séquentielle (supposée connue).

On place n matériels sous contrôle et on relève les durées de vie de ceux ayant une avarie (on ne les remplace pas).

On veut tester l'hypothèse $H_o(\vartheta = \vartheta_o)$ contre l'hypothèse $H_1(\vartheta = \vartheta_1)$ à partir d'un échantillon de taille n.

La décision dépend de la valeur à l'instant t de la quantité :

$$\varphi(t) = \left(\frac{\vartheta_o}{\vartheta_1}\right)^r \exp\left[-\left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_o}\right) V(t)\right]$$

où r désigne le nombre de matériels avariés à l'instant t,

$$V(t) \text{ égale } \sum_{i=1}^{r} (n - i + 1)(x_{i,n} - x_{i-1,n}) + (n - r)(t - x_{r,n})$$

dans le cas où on ne remplace pas les matériels avariés, et V(t) égale nt dans le cas contraire.

Si $\varphi \geqslant A$, le test est arrêté et on rejette H_o

Si $\varphi \leqslant B$ " " et on accepte H_o

Si $B < \varphi < A$, on continue le test.

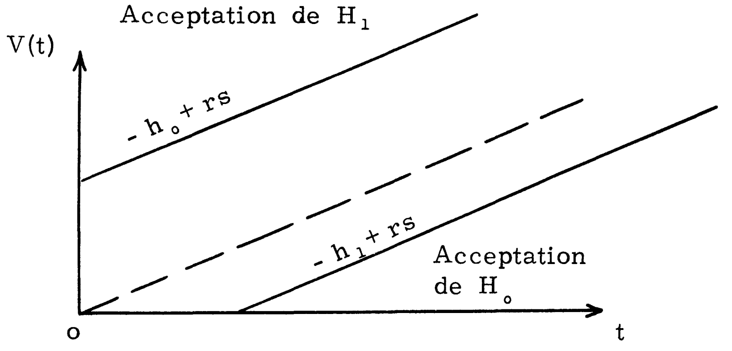
($B < 1 < A$ - A et B sont des fonctions de α et β, risques de première et seconde espèces).

La dernière inégalité peut s'écrire :

$-h_1 + rs < V(t) < -h_o + rs$ avec h_o, h_1, s constantes positives d'expression

$$h_o = \frac{-\operatorname{Log} B}{\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_o}} \qquad h_1 = \frac{\operatorname{Log} A}{\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_o}} \qquad s = \frac{\operatorname{Log} \frac{\vartheta_o}{\vartheta_1}}{\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_o}}$$

On peut donc partager le demi-plan possible pour V(t) en trois parties représentées ci-dessous.



Suivant la région du demi-plan à laquelle appartiendra le point calculé à l'instant t, V(t), on acceptera ou on rejettera H_o, ou encore, on continuera le test.

La courbe d'efficacité relative à ce test est définie par :

$$L(\vartheta) = \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} \quad \text{et} \quad \vartheta = \frac{\left(\frac{\vartheta_o}{\vartheta_1}\right)^h - 1}{h\left(\frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_o}\right)}$$

où h est une fonction de ϑ, fonction intervenant dans le test séquentiel du rapport des lois de probabilité élémentaire de Wald. ($h(\vartheta_o) = 1$, $h(\vartheta_1) = -1$)

Nota :

- Généralisation.

Tous les résultats obtenus à partir d'une loi de survie d'équation :

$$\frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x}{\theta}} \quad x > 0, \quad \vartheta > 0$$

sont encore valables pour une loi de la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{g_1(x)}{\theta}} & x > 0, \quad \vartheta > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

si g(x) est une fonction croissante de x

avec $g(0) = 0$ et $g(\infty) = \infty$

En particulier l'estimateur fourni par la méthode du maximum de vraisemblance pour la durée de vie moyenne est :

$$\hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{g(x_1) + \ldots + g(x_r) + (n - r)\, g(x_r)}{r}$$

Cas particulier :

$$g(x) = x^b \qquad b = \text{constante}$$

c'est la distribution de Weibull.

Tous les tests qui précèdent reposent sur l'hypothèse d'une distribution des durées de vie exponentielle.

Mr. Zelen et Mme. Dannemiller ont appliqué les résultats de certains de ces tests à des matériels de distribution des durées de vie, dite de Weibull, c'est-à-dire d'expression :

$$f(x, \vartheta, p) = \frac{p\, x^{p-1}}{\vartheta}\, e^{-\frac{x^p}{\theta}} \qquad x > 0, \quad \vartheta > 0$$

La fonction de fiabilité correspondante est de la forme (voir article précédent) :

$$R(t) = \int_t^{\infty} \frac{p x^{p-1}}{\vartheta}\, e^{-\frac{x^p}{\theta}}\, dx = e^{-\frac{t^p}{\theta}}$$

[La courbe qui lui correspond diffère d'ailleurs peu de celle relative à une loi de survie exponentielle pour des échantillons de petite taille ($n \leqslant 25$)].

Le but poursuivi dans cette étude est la mise en évidence de l'influence de l'hypothèse faite relativement à la forme de la loi de survie sur les résultats fournis par les tests de durée de vie.

C - "ROBUSTESSE" DES TESTS DE DUREE DE VIE -

On dira qu'un test est "robuste" s'il est insensible au changement de l'hypothèse de base.

A cet effet quatre tests sont étudiés :

- Test de la totalité d'un échantillon de taille donnée.
- Test d'un échantillon de taille donnée arrêté au bout d'un nombre donné d'avaries.
- Test tronqué dans le cas où les matériels avariés sont remplacés.
- Test séquentiel.

Nota :

Dans tout ce qui suit, on définit le test par deux points de la courbe d'efficacité :

α : probabilité de rejeter des matériels ayant la durée de vie moyenne désirée.

β : probabilité d'accepter des matériels ayant une durée de vie moyenne moitié de celle désirée.

Dans les exemples cités, et sous l'hypothèse d'une durée de vie exponentielle ($p = 1$), α et β sont égaux à 0,10 et la durée de vie moyenne désirée est égale à 1000 heures.

1/ r matériels sont placés sous contrôle et le test est arrêté quand ils sont tous avariés.

Si $t_{1,r} \leq t_{2,r} \leq \ldots \leq t_{r,r}$ désignent les temps successifs au bout desquels se produisent la première, la deuxième, ... la rième avarie, la règle de décision, dans l'hypothèse de loi de survie exponentielle, est la suivante :

$$\text{si } \hat{\vartheta}_{r,r} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i,r}}{r} \quad \begin{array}{l} \geq C = \vartheta \chi^2_\alpha (2r) / 2r \text{ on accepte le lot} \\ < C = \vartheta \chi^2_\alpha (2r) / 2r \text{ on refuse le lot} \end{array}$$

[démonstration analogue à celle du paragraphe A, 1, a, α où le changement de variables à effectuer est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = r\, x_1 \\ y_2 = (r - 1)(x_2 - x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_r = x_r - x_{r-1} \end{array} \right.$$]

Pour calculer la probabilité d'accepter ($P_r \{ \hat{\vartheta}_{r,r} > C \}$) dans le cas où la loi de survie est de Weibull on montre que Prob $\{ \hat{\vartheta}_{r,r} > C \}$ peut être approximé par :

$$(1) \qquad \boxed{\frac{1}{\Gamma(N)} \int_y^\infty e^{-x}\, x^{N-1}\, dx - \frac{e^{-y}\, y^N}{N\,!} \sum_{s=2}^{2q+1} \frac{\alpha_s}{C^{s-1}_{N+s-1}}\, L^N_{s-1}(y)}$$

où $N = rp$, $y = Cp$, $L^N_{s-1}(y)$ désigne un polynôme de Laguerre et α_s un coefficient à définir.

En effet, considérons la variable aléatoire X, non négative, de densité de probabilité d'expression :

$$p(x) = \frac{e^{-x}\; x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \sum_{s=0}^{k} a_s\, L^\alpha_s(x)$$

où k est un nombre entier positif, a_s et α des constantes avec $a_o = 1$ et $L^\alpha_s(x)$ un polynôme de Laguerre :

$$\left[L^\alpha_s(x) = \sum_{j=0}^{s} C^{s-j}_{s+\alpha} \frac{(-x)^j}{j\,!} \right]$$

La fonction de fiabilité R(t) s'écrit alors :

$$R(t) = \int_t^{\infty} p(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_t^{\infty} e^{-x}\, x^{\alpha} \sum_{s=0}^{k} a_s\, L_s^{\alpha}(x)\, dx$$

$$R(t) = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_t^{\infty} e^{-x}\, x^{\alpha} dx}_{s\,=\,0} - \underbrace{\frac{e^{-t}\, t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{s=1}^{k} \frac{a_s}{s} L_{s-1}^{\alpha+1}(t)}_{s\,>\,0}$$

car $$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_t^{\infty} e^{-x}\, x^{\alpha} L_s^{\alpha}(x)\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_t^{\infty} \frac{d_s}{dx^s}(e^{-x}\, x^{s+\alpha})\, dx$$

Or, si l'on considère une autre variable aléatoire non négative de densité de probabilité f(x), une approximation convenable pour f(x) s'obtient en choisissant a_s tel que :

(2) $$\int_0^{\infty} L_s^{\alpha}(x)\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} L_s^{\alpha}(x)\, p(x)\, dx = a_s\, C_{s+\alpha}^{s} \qquad (s = 1, 2, \ldots, k)$$

(autrement dit, on égale les moments d'ordre s respectifs de p(x) et f(x)) .

Les relations déterminant les a_s sont de la forme :

$$a_1 = 1 - m_1$$

$$a_2 = \frac{m_2 - 2 + 4(1 - m_1)}{2}$$

$$a_3 = \frac{6 - m_3 + 9(m_2 - 2) + 18\,(1 - m_1)}{6} \quad \text{etc.}$$

avec $m_s = \dfrac{\mu'_s}{C_{s+\alpha}^{s}}$ (μ'_s moment centré à l'origine d'ordre s) .

Si on généralise à n variables X_i de densité de probabilité p(x) et que l'on considère la loi de leur somme $G = \sum_{i=1}^{n} X_i$, la fonction de fiabilité correspondante peut être approximée par (1).

Dans le cas du test étudié, f(x) est de la forme : $f(x) = \frac{p x^{p-1}}{\vartheta} e^{-\frac{x^p}{\theta}}$ et les moments correspondants ont pour expression générale :

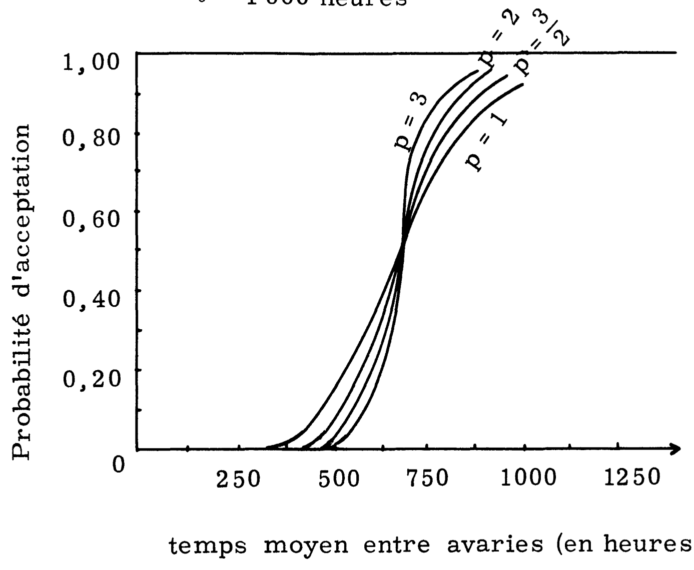
$$\mu'_s = \vartheta^{s/p}\; \Gamma\left(1 + \frac{s}{p}\right).$$

On en tire : $m_s = \dfrac{p^s\, g(s)}{C_{s+p+1}^{s}}$ avec $g(s) = \dfrac{\Gamma\left(1 + \frac{s}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^s}$

La fonction de fiabilité peut alors être approximée par (1) dans lequel les a_s (et par conséquent les α_s , fonctions des a_s) sont déterminés à partir des relations (2).

Les calculs et les simulations effectués (1500 tests) ont conduit aux courbes d'efficacité de formes suivantes : (on a considéré plusieurs valeurs de p. p = 1 correspond à la loi exponentielle).

ϑ = 1 000 heures



L'accord n'est pas mauvais, compte tenu des erreurs d'échantillonnage des simulations.

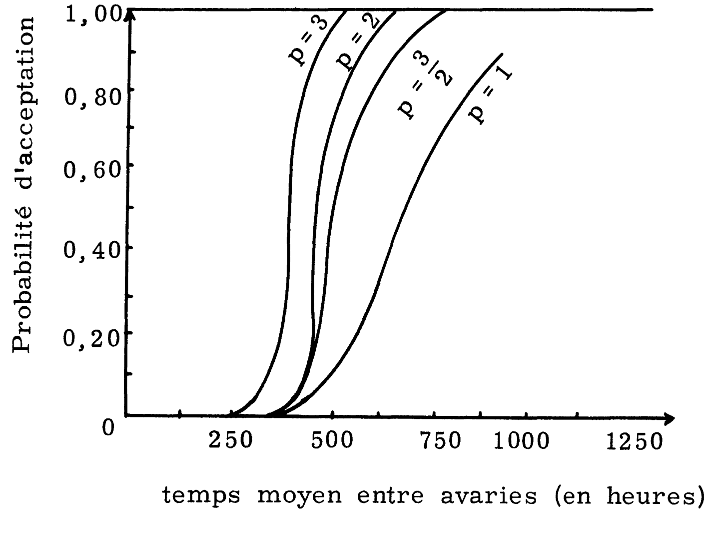
2/ <u>n matériels sont testés jusqu'à l'apparition de la $r^{ième}$ avarie.</u>

On a vu que dans ce cas, et sous l'hypothèse d'une loi exponentielle de durée de vie :

$$\text{si } \hat{\vartheta}_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{r} t_{i,n} + (n-r)\, t_{r,n}}{r} \quad \begin{cases} \geq C = 1000\, \chi^2\ (2r)\ /\ 2r & \text{on accepte le lot} \\ < C = 1000\, \chi^2\ (2r)\ /\ 2r & \text{on refuse le lot} \end{cases}$$

La loi de $\hat{\vartheta}_{r,n}$ étant la même que celle de $\hat{\vartheta}_{r,r}$, les courbes d'efficacité relatives aux r premières avaries d'un échantillon de taille n sont identiques à celles relatives aux r avaries d'un échantillon de taille r.

Les courbes d'efficacité obtenues par échantillonnage empirique (simulation de 1500 tests) sont les suivantes :



Il est visible que les courbes d'efficacité dans le cas $p \neq 1$, c'est-à-dire quand la loi de survie n'est pas exponentielle sont très différentes de celle correspondant à cette hypothèse.

Ce test semble donc très sensible à l'hypothèse de départ sur la loi de durée de vie.

3/ Test tronqué dans le cas où les matériels avariés ne sont pas remplacés.

Comme on l'a vu dans un paragraphe antérieur le test tronqué consiste à placer n matériels sous contrôle et à arrêter le test au bout d'un temps T préassigné ou après l'apparition de la $r^{ième}$ avarie si celle-ci se produit au bout d'un temps inférieur à T. Dans la première alternative on accepte le lot, dans la seconde alternative on le refuse.

Si R(T) est la fonction de fiabilité du matériel, la probabilité qu'un échantillon de taille n soit accepté est :

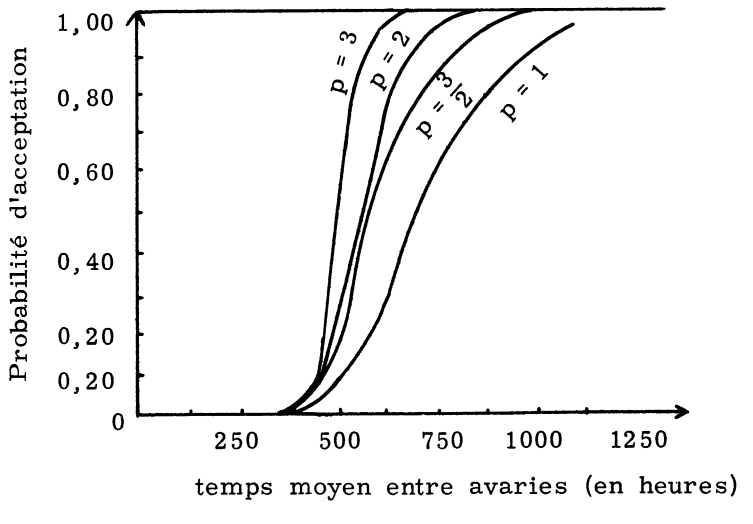
$$\boxed{L_p(\vartheta) = \sum_{s=r}^{n} C_n^s \, [R(T)]^s \, [1 - R(T)]^{n-s} = I_{R(T)} \, [r, n - r + 1]}$$

où $I_x(a,b)$ désigne la fonction beta incomplète :

$$I_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt \qquad 0 < t < 1$$

l'égalité est obtenue en intégrant par parties le deuxième membre).

Ici $R(T) = e^{-\frac{T^p}{\theta}}$ et on obtient les courbes d'efficacité suivantes :



Comme dans le cas précédent, ce test semble très sensible à l'hypothèse de départ sur la forme de la loi des durées de vie.

4/ Test séquentiel.

Ce test a été défini par analogie avec le test séquentiel de rapport des densités de probabilité de Wald.

Rappelons-le brièvement :

On teste deux hypothèses simples :

$$H_0 \quad \vartheta = \vartheta_o = 1\ 000 \text{ heures}$$

$$H_1 \quad \vartheta = \vartheta_2 = 500 \text{ heures}$$

La règle de décision est la suivante :

Si $\text{Log } B < \sum_{i=1}^{r} Z_i < \text{Log } A$ on poursuit les observations

Si $\sum_{i=1}^{r} Z_i > \text{Log } A$ on accepte H_1

Si $\sum_{i=1}^{r} Z_i < \text{Log } B$ on accepte H_0

avec
$$\begin{cases} Z_i = \text{Log} \dfrac{\vartheta_0}{\vartheta_1} - \left(\dfrac{1}{\vartheta_1} - \dfrac{1}{\vartheta_0}\right) X_i \\ A = \dfrac{1 - \beta}{\alpha} \\ B = \dfrac{\beta}{1 - \alpha} \end{cases}$$

On introduit ensuite une constante h telle que $E_\theta\ [e^{Zh}] = 1$ et on en déduit :

$$L_p\ (\vartheta)\ \frac{A^h - 1}{A^h - B^h} = \text{probabilité d'acceptation de } H_0.$$

Si la loi des durées de vie X est la loi de Weibull :

$$E_\theta\ (e^{Zt}) = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^t E_\theta\ (e^{-KtX}) = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^t \Phi(iKt)$$

avec :

$$K = \frac{1}{\vartheta_1} - \frac{1}{\vartheta_1}$$

et
$$\Phi\ (iKt) = \sum_{s=0}^{k} a_s \int_0^\infty \frac{x^\alpha\ L_s^\alpha\ (x)}{\Gamma\ (\alpha+1)}\ e^{-x[1+Kt]}\ dx$$

intégrale existant pour $1 + Kt > 0$.

D'où d'après $E_\theta\ (e^{Zh}) = 1$:

$$E_\theta\ (e^{Zh}) = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^h (1 + Kh)^{-(1+\alpha)} \sum_{s=0}^{k} a_s\ C_{s+\alpha}^s\ (Kh)^s\ (1 + Kh)^{-s} = 1$$

(d'après l'expression de la fonction caractéristique trouvée précédemment).

Puisque les a_s ($s > 0$) sont des fonctions de m, on peut pour un h arbitraire ($h \neq 0$) trouver la valeur correspondante de m. De même $L_p(\vartheta)$ et $E_\theta(h)$ peuvent être calculés.

Dans le cas où $a_1 = 0$ et $Y = \frac{\vartheta}{1+\alpha} X$

$$Z_i = \text{Log} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1} - \frac{K\vartheta}{1+\alpha} X_i$$

d'où : $E(e^{Zh}) = \left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^h \left(1 + \frac{K\vartheta h}{1+\alpha}\right)^{-(1+\alpha)} \sum_{s=0}^{k} a_s C^s_{s+\alpha} \left(\frac{K\vartheta h}{1+\alpha}\right)^s \left(1 + \frac{k\vartheta h}{1+\alpha}\right)^{-s} = 1$

expression qui n'a de sens de pour $1 + \frac{K\vartheta h}{1+\alpha} > 0$

Posons : $\omega = \left(\frac{K\vartheta h}{1+\alpha}\right)\left(1 + \frac{K\vartheta h}{1+\alpha}\right)^{-1}$ d'où $h = \frac{1+\alpha}{K\vartheta} \frac{\omega}{1-\omega}$

et $E(e^{Zh})$ devient :

$$\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}\right)^{\frac{1+\alpha}{K\theta}\frac{\omega}{1-\omega}} (1-\omega)^{1+\alpha} \sum_{s=0}^{k} a_s C^s_{s+\alpha} \omega^s = 1$$

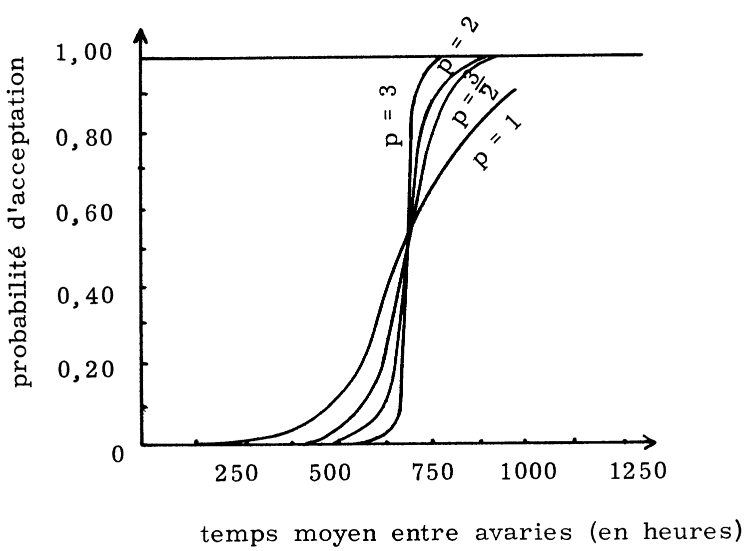
Soit en prenant les logarithmes :

$$\vartheta = \frac{(1+\alpha)\omega}{K(\omega - 1)} \frac{\text{Log} \frac{\vartheta_0}{\vartheta_1}}{\text{Log}\left\{(1-\omega)^{1+\alpha} \sum_{s=0}^{k} a_s C^s_{s+\alpha} \omega^s\right\}}$$

Il suffit donc de se donner ω ($\omega < 1$ car $1 + \frac{K\vartheta h}{1+\alpha} > 0$)

d'où l'on tire h puis $L_p(\vartheta)$ ($p = 1 + \alpha$)

La simulation a fourni les courbes suivantes :



Ce test semble moins sensible que les deux précédents à l'hypothèse de base.

Conclusion quant à la robustesse de ces différents tests.

En fait aucun des quatre tests n'est robuste par rapport à l'alternative : loi de distribution des durées de vie de Weibull (en particulier les tests 2 et 3).

Il découle de la considération des courbes d'efficacité que les lots de faible durée de vie moyenne ont une forte probabilité d'être acceptés quand la loi est de Weibull, de paramètre de forme $p > 1$. Cette tendance croît d'ailleurs avec p.

Il en résulte que la non réalisation de l'hypothèse faite (loi de durées de vie de forme exponentielle) entraîne une forte probabilité d'accepter des équipements de mauvaise qualité(1). Une vérification de l'hypothèse s'avère donc nécessaire avant toute réalisation du test (voir les tests d'hypothèse dans un précédent article).

Quand la distribution est de forme exponentielle, le temps moyen est un critère satisfaisant. Mais il peut se révéler artificiel et trompeur pour d'autres formes de distributions. Une approche à la fois plus valable et plus pratique, consiste à se donner un point de la courbe d'efficacité.

Exemple :

Si on veut qu'au moins 90 % des matériels survivent (en moyenne) 105 heures, la durée de vie moyenne correspondante a pour valeurs respectives :

- pour la loi exponentielle : $\vartheta = 1\,000$ heures
- pour la loi de Weibull, $p = \frac{3}{2}$: $\vartheta = 425$ "
- " " " " " , $p = 2$: $\vartheta = 287$ "
- " " " " " , $p = 3$: $\vartheta = 199$ "

D'autre part, il est bien évident que l'on peut se donner un autre point de la courbe d'efficacité tel que la durée de vie moyenne ait la même valeur dans la première hypothèse mais des valeurs différentes de celles trouvées précédemment dans les autres hypothèses.

BIBLIOGRAPHIE

B. EPSTEIN : "Statistical life test acceptance procedures" - Technometrics, vol. 2 N° 4 - Nov. 1960

M. ZELEN et Mary C. DANNEMILLER : "The robustness of life testing procedures derived from the exponential distribution". Technometrics, vol. 3 N° 1 Février 1961.

---

(1) Remarque : La qualité a été définie par la durée de vie moyenne entre avaries, moment du premier ordre de la distribution des durées de vie.