

K. STANGE

Détermination graphique de plans d'inspection par variables au moyen du papier à double échelle gaussienne

Revue de statistique appliquée, tome 10, n° 2 (1962), p. 5-15

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1962__10_2_5_0

© Société française de statistique, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉTERMINATION GRAPHIQUE DE PLANS D'INSPECTION PAR VARIABLES AU MOYEN DU PAPIER A DOUBLE ÉCHELLE GAUSSIENNE (1)

K. STANGE

1 - L'ECHANTILLONNAGE POUR LE CONTROLE PAR ATTRIBUTS ET LE CONTROLE PAR MESURES -

Lors des contrôles de réception par échantillonnage, on donne généralement la préférence au contrôle par attributs. Chaque pièce est jugée au moyen de jauges, comme étant bonne, acceptable, exempte de défaut, ou comme étant mauvaise, inacceptable, défectueuse. La qualité de la livraison est mesurée par le nombre des pièces "mauvaises" relevé dans un échantillon de taille n .

On préfère cette sorte de contrôle parce qu'il ne demande que très peu d'effort au personnel de contrôle. En outre, de nombreux plans semblables, déjà calculés, sont connus. Sans effort statistique particulier, le chef de contrôle peut désigner le plan adapté à des besoins donnés, au point de vue dépense et "efficacité".

Il y a pourtant des cas où il serait souhaitable de remplacer le contrôle par attributs par un procédé de "contrôle par mesures"

a) Dans de nombreux cas, on juge sans raison majeure des caractéristiques mesurables (poids, longueur, solidité, etc.), d'après un contrôle par attributs, bien que l'on puisse obtenir les valeurs réelles x de la caractéristique, au moyen d'instruments de mesure modernes, sans augmentation sensible du travail de contrôle.

b) Les livraisons pour lesquelles la proportion de pièces défectueuses est "petite" (environ $p \leq 1\%$) demandent un "grand" nombre de pièces, afin que l'échantillonnage pour le contrôle par attribut permette un jugement suffisamment sûr.

c) Quand il s'agit d'un contrôle destructif de produits précieux (durée de la vie, sensibilité, résistance au déchirement), les "frais de contrôle" ne sont pas causés, en premier lieu par l'achat des instruments de contrôle et le temps nécessaire pour le contrôle, mais par la destruction d'une partie de la livraison.

(1) Communication présentée au Séminaire sur les applications industrielles de la Statistique - Paris - Septembre 1961.

Pour prendre une décision, il est nécessaire d'avoir une "quantité minimum de renseignements sur le lot". Etant donné que le "contrôle par mesures" fournit plus d'informations sur chaque pièce que le "contrôle par attributs", le nombre de pièces n_m nécessaire à l'échantillonnage quantitatif est généralement beaucoup plus petit que celui nécessaire à l'échantillonnage qualitatif n_l , la décision étant prise avec la même sécurité. Voilà pourquoi le "contrôle par mesures" est souvent plus économique que le "contrôle par attributs".

2 - UNE LIVRAISON DE QUALITE p . LE CHIFFRE DE QUALITE u_T -

Le graphique 1 montre la densité $f(x)$ d'une caractéristique à contrôler x . La moyenne est $\mu = 150$; l'écart-type est $\sigma = 10$. La tolérance supérieure unilatérale T pour la caractéristique est $T = 173,3$. La proportion relative des éléments en dehors de la limite de tolérance T est p_T .

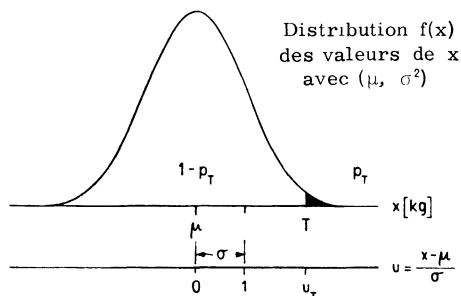


Figure 1

En divisant la distance $(T - \mu)$ de la moyenne μ à la limite de tolérance T par l'écart-type σ , on obtient la variable réduite sans dimensions u ,

$$u_T = \frac{T - \mu}{\sigma}. \quad (1)$$

A chaque proportion de pièces mauvaises p correspond une seule valeur u et vice versa. La relation entre p et u est présentée sur le graphique 2. Si $\Phi(u)$ est la fonction de répartition de la caractéristique u , distribuée d'une façon normale, on a :

$$p_T = 1 - \Phi(u_T). \quad (2)$$

La qualité d'une livraison peut donc être caractérisée, d'une façon équivalente, soit par la "proportion de pièces mauvaises" p_T , soit par le "chiffre de qualité" u_T que l'on calcule à partir de T , μ et σ au moyen de l'équation (1). Pour déterminer la qualité de la livraison, les deux valeurs $(\mu ; \sigma)$ sont nécessaires et non pas une seule de ces deux valeurs μ ou σ , mais seule importe la proportion définie par l'équation (1).

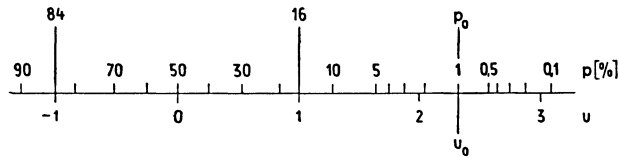


Figure 2

3 - LE CRITERIUM DE DECISION -

Supposons que la proportion p située au-dessus de T , considéré comme admissible par le contrat de livraison, soit $p = p_0$. Le chiffre de qualité correspondant à p_0 est $u = u_0$. La livraison doit avoir une forte probabilité d'être acceptée si la proportion de pièces mauvaises p_T est

$$p_T \leq p_0 \quad (3)$$

ou si son chiffre de qualité u_T est

$$u_T \geq u_0 \quad (4)$$

Ces deux conditions sont rigoureusement équivalentes. Mais on peut transformer l'inégalité $u_T \geq u_0$, du fait de l'équation (1), comme il suit :

$$\mu + u_0 \sigma \leq T \quad (5)$$

Cela veut dire qu'un lot satisfait la condition de livraison, si la moyenne μ plus une valeur u_0 fois plus grande que l'écart-type σ reste plus petite que la limite de tolérance supérieure T .

L'inégalité (5) n'est pratiquement pas utilisable, car, en général, on ne connaît pas les valeurs exactes μ et σ de la livraison.

Après avoir prélevé aléatoirement un échantillon de taille n , on dispose seulement de valeurs estimées \bar{x} pour μ et s pour σ . L'inégalité (5) sera transformée par la suite dans une relation contenant ces deux valeurs estimées x et s .

4 - LE CRITERIUM DE DECISION BASE SUR UN ECHANTILLON -

On prélève un échantillon aléatoire de taille n dans la livraison dont l'effectif total est N . Au moyen d'un instrument de mesure, on détermine les n valeurs individuelles $x_1, x_2, \dots, x_\nu, \dots, x_n$. Ensuite, on calcule la moyenne \bar{x} de l'échantillon :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n x_\nu \quad (6)$$

et sa variance :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\nu=1}^n (x_\nu - \bar{x})^2 \quad (7)$$

A partir de \bar{x} et s , on calcule la "caractéristique de sondage" z ,

$$z = \bar{x} + ks. \quad (8)$$

On a donc remplacé dans l'équation (5) les paramètres inconnus μ et σ de la livraison, par les valeurs estimées connues \bar{x} et s de l'échantillon. Le facteur u est remplacé par le facteur k . k est une valeur fixe pour chaque plan d'échantillonnage (cf. paragraphe 7).

Si la caractéristique de sondage trouvée pour l'échantillon est
 $z \leq T$, la livraison est acceptée ; si au contraire
 $z > T$, la livraison est refusée.

5 - LA COURBE CARACTERISTIQUE D'UN PLAN D'ECHANTILLONNAGE -

Un plan d'échantillonnage est caractérisé par la taille n de l'échantillon et par le facteur d'acceptation k . Dans ce qui suit, ces deux valeurs seront déterminées de façon que le plan ait une courbe d'efficacité fixée $W(p)$. A cet effet, les "bonnes" et les "mauvaises" livraisons sont tout d'abord définies exactement comme pour un échantillonnage avec contrôle qualitatif (figure 3). Une livraison est appelée "bonne", si la proportion de pièces mauvaises est $p \leq p_0$; elle est appelée "mauvaise", si la proportion est $p \geq p_1 > p_0$. Le "niveau de qualité acceptable" p_0 et le "pourcentage de pièces défectueuses à ne pas tolérer dans le lot" p_1 sont fixés à partir de considérations techniques et économiques.

On appelle α le "risque du producteur" dû au plan d'échantillonnage : risque qu'un bon lot de la qualité p_0 soit refusé (d'une manière erronée), et β le "risque du consommateur" : risque qu'un mauvais lot de la qualité p_1 soit accepté (d'une manière erronée). On doit avoir :

$$W(p_0) = W_0 = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad W(p_1) = W_1 = \beta ; \quad (9)$$

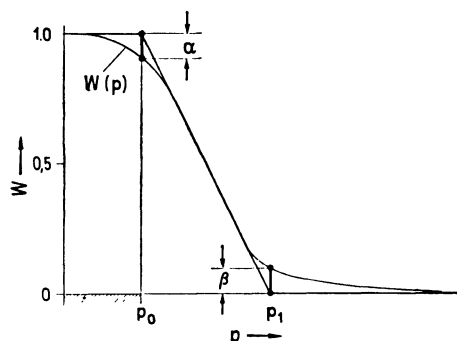


Figure 3

α et β sont de "petites" valeurs de l'ordre de 0,10 ... 0,01, (que l'on peut fixer arbitrairement à l'intérieur de certaines limites ; on les fait généralement dépendre de l'effectif total du lot. Le graphique 3 illustre la relation entre p et W suivant la présentation habituelle. Ce graphique porte une échelle uniforme en abscisse pour p et également une échelle uniforme en ordonnée pour W .

6 - LA COURBE D'EFFICACITE $W(p)$ SUR LE "PAPIER A DOUBLE ECHELLE GAUSSIENNE".

Le papier à échelle gaussienne a été proposé pour la première fois par le Colonel Français Henry. Ce papier porte une échelle uniforme en abscisse pour la caractéristique x et une échelle gaussienne en ordonnée pour la fréquence cumulée Φ . (Sur ce papier, la courbe des fréquences cumulées $\Phi(x)$ d'une distribution normale est représentée par une ligne droite). A côté de l'échelle gaussienne, on place une échelle uniforme (voir graphique 4). Le "papier à double échelle gaussienne" porte également deux échelles de cette sorte aussi bien en abscisse qu'en ordonnée. Mais contrairement à l'orientation habituelle de l'axe des abscisses (axe horizontal), cet axe est gradué en valeurs croissantes de u de droite à gauche (voir graphique 4). On utilise donc un papier sur lequel les deux axes portent, à côté de l'échelle uniforme u , une autre échelle gaussienne non uniforme pour p et W .

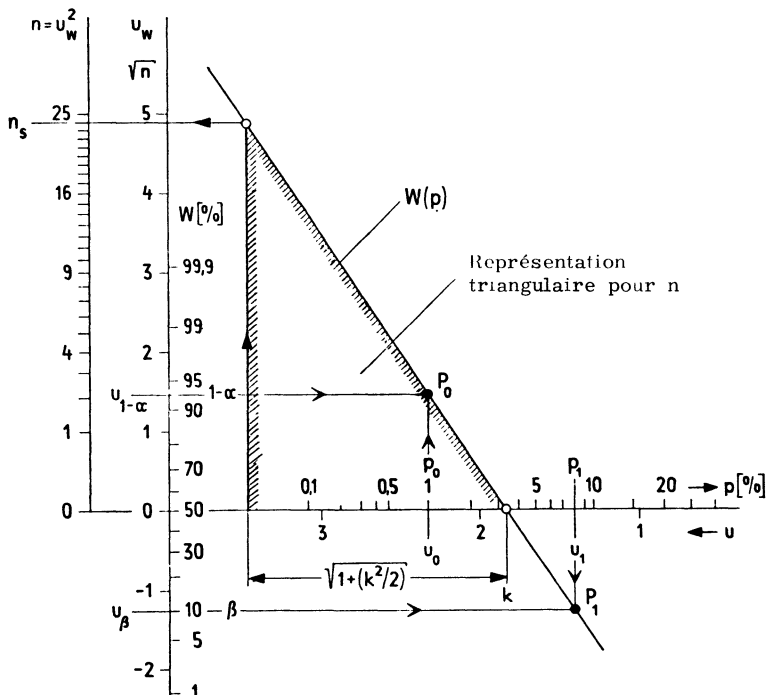


Figure 4

Le graphique 3 montre la relation entre p et W . En faisant correspondre à chaque proportion de pièces mauvaises p le chiffre de qualité u (voir graphique 2), et à chaque probabilité d'acceptation W la valeur réduite u_w , on peut également faire correspondre u et u_w , à la place de p et W . L'équation de la courbe caractéristique $W(p)$ est alors

$$\sqrt{n}(u - k) = u_w \sqrt{1 + (k^2/2)} ; \quad (10)$$

où $(k ; n)$ sont les paramètres définissant le plan d'échantillonnage. L'équation (10) est celle d'une ligne droite dans le système de coordonnées $(u ; u_w)$. Sur le graphique (correspondant au graphique 4) cette droite passe par les deux points $P_0(p_0 ; 1 - \alpha)$ et $P_1(p_1 ; \beta)$. Au moyen de ces points, on peut déterminer facilement les paramètres k et n : sur le graphique 4, on a : $p_0 = 1 \%$; $W_1 = 1 - \alpha = 93 \%$ et $p_1 = 8 \%$; $W_1 = \beta = 10 \%$.

Ces valeurs correspondent à l'un des nombreux plans du Mil. Std. 414.

7 - LA DETERMINATION GRAPHIQUE DE LA TAILLE DE L'ECHANTILLON (n) ET DU "FACTEUR D'ACCEPTATION" (k) -

Si l'on porte dans l'équation (10) $u_w = 0$ ou $W = 50 \%$, on obtient $u = k$. Il en résulte, qu'après avoir trouvé le point d'intersection de la droite horizontale passant par $u_w = 0$ ou $W = 50 \%$ et de la droite d'acceptation $W(p)$, on peut lire sur l'échelle horizontale u le facteur d'acceptation k au moyen duquel on calcule la caractéristique de sondage $z = \bar{x} + ks$.

Si l'on porte dans l'équation (10)

$$u = k + \sqrt{1 + (k^2/2)} \quad \text{ou} \quad u - k = \sqrt{1 + (k^2/2)}, \quad \text{on trouve :}$$

$$u_w = \sqrt{n}.$$

En conséquence, si l'on porte en abscisse $u = k + \sqrt{\dots}$ comme il est indiqué sur le graphique 4, on lit n sur l'échelle verticale u_w . Si à côté de cette échelle on dessine une autre échelle pour $n = u_w^2$, on peut lire immédiatement la taille n de l'échantillon. On détermine donc \sqrt{n} ou n d'après le triangle dont les côtés sont hachurés sur le graphique 4. D'une manière très simple on a ainsi déterminé graphiquement les grandeurs k et n .

8 - PRESENTATION PRATIQUE DU RESEAU A DOUBLE ECHELLE GAUS-SIENNE -

Afin que les valeurs des paramètres qui peuvent se présenter lors de l'application des plans puissent figurer sur une feuille de la norme allemande DIN-A-3 on a choisi la forme de réseau représentée sur le graphique 5. Les deux échelles gaussiennes pour p et W ne sont pas modifiées par rapport au graphique 4. Pour des raisons pratiques, le graphique 5 est cependant modifié de la façon suivante :

a) L'échelle uniforme u , graduée en valeurs de k , est placée à la partie supérieure du graphique pour permettre de lire les valeurs k .

b) Comme fonction de k , la courbe auxiliaire

$$\frac{1}{2} b(k) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (k^2/2)}$$

est dessinée afin qu'on puisse mesurer sans aucune opération la moitié de la ligne de base du triangle.

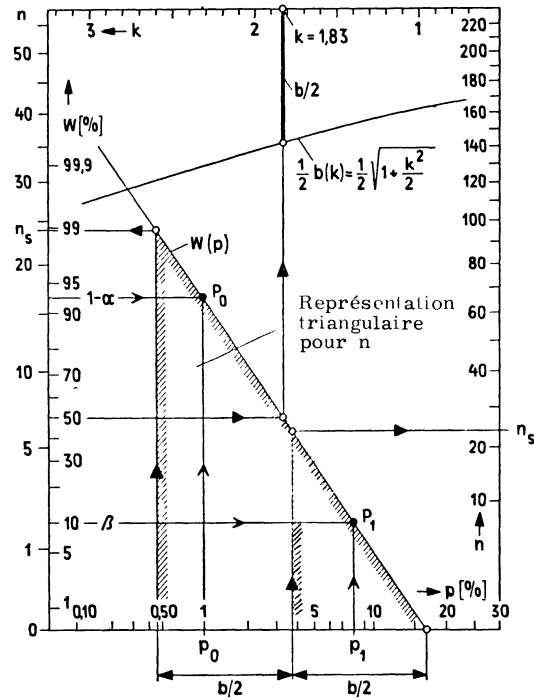


Figure 5

c) L'origine $n = 0$ de l'échelle verticale $n = u_w^2$ et le triangle pour n sont placés au bord inférieur.

d) L'échelle uniforme u_w de l'axe vertical devenue superflue est supprimée.

e) Enfin, sur la droite figure une deuxième échelle pour n . Elle résulte de l'introduction de

$$u - k = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (k^2/2)} = \frac{1}{2} b(k)$$

dans l'équation (10).

On trouve ainsi $2u_w = \sqrt{n}$ ou $n = 4 u_w^2$, et l'on a : $n_{droite} = 4n_{gauche}$. On doit utiliser cette échelle pour y lire n , si n devient plus grand que 55.

L'utilisation de ce graphique exige qu'il soit muni de lignes quadrillées, d'une manière suffisamment dense ; ce quadrillage a été supprimé sur la figure afin de rendre le dessin plus clair.

9 - EXEMPLE -

Dans un contrat de livraison on a prescrit une limite de tolérance supérieure unilatérale $T = 173,3$, pour une caractéristique x . "En principe", toutes les valeurs de la caractéristique x devraient être plus petites que $T(x \leq T)$. Cependant, une livraison est encore considérée comme acceptable si la proportion p au-dessus de la limite de tolérance est $p \leq p_0 = 1\%$. Elle n'est plus acceptable si cette proportion devient $p > p_1 = 8\%$. La probabilité d'acceptation W_0 pour de bons lots doit être $1 - \alpha = 0,93 = 93\%$ au minimum, et la probabilité d'acceptation W_1 pour de mauvais lots doit être $\beta = 0,10 = 10\%$ au maximum. Les valeurs choisies pour α , p_1 et β correspondent à l'un des nombreux plans d'échantillonnage du Mil. Standard 414, pour $p_0 = 1\%$.

Avec les deux valeurs

$$P_0(p_0 = 1\% ; W_0 = 93\%) \quad \text{et} \quad P_1(p_1 = 8\% ; W_1 = 10\%)$$

on entre dans le papier à double échelle gaussienne du graphique 5. La droite passant par P_0 et P_1 est la courbe caractéristique d'acceptation du test $W(p)$ pour le plan en question.

Pour $W = 50\%$ on trouve, sur l'échelle horizontale supérieure le facteur d'acceptation $k = 1,83$. Comme fonction de k , on prend la moitié de la ligne de base $\frac{1}{2} b(k)$ du triangle pour n . Avec $b/2$ (ou b), on dessine le triangle hachuré pour n au bord inférieur, en y portant la longueur de $b/2$ (ou b). Sur l'échelle n (à droite ou à gauche), on lit la taille de l'échantillon $n = n_s = 24$.

La prescription de sondage exige donc :

- a) de prendre dans la livraison N un échantillon aléatoire de $n_s = 24$ pièces.
- b) de déterminer les 24 valeurs particulières $x_1, x_2, \dots, \dots, x_{24}$ au moyen d'un instrument de mesure.
- c) de calculer la moyenne \bar{x} de l'échantillon.
- d) de calculer l'écart-type s de l'échantillon.
- e) de calculer la caractéristique de sondage $z = \bar{x} + ks$.
- f) d'accepter le lot si la caractéristique de sondage est $z \leq T$.
de refuser le lot si la caractéristique de sondage est $z > T$.

10 - INDICATIONS CONCERNANT D'AUTRES PLANS -

Comme la caractéristique de sondage z est calculée à partir de la moyenne \bar{x} et de l'écart-type s d'un échantillon, on appellera les plans correspondants plans $(\bar{x} ; s)$. Il est probable que l'ingénieur de contrôle considèrera ces plans comme inapplicables car ils exigent que l'on calcule la variance s^2 et l'écart-type s d'un échantillon. (Il paraît que c'est une opération quasi-impossible dans l'industrie). Cette difficulté est évitée si, à la place de s , on utilise l'étendue moyenne R de sous-échantillons. A cet effet, l'échantillon total est divisé en l "sous-échantillons" de grandeur m , avec la condition $ml = n$. Pour chaque sous-échantillon λ ($\lambda = 1, 2, \dots, l$), on calcule tout d'abord R_λ ; on calcule ensuite l'étendue moyenne de l'échantillon total :

$$R = \frac{1}{l} \sum_{\lambda=1}^l R_\lambda$$

On observera que ce procédé est le même que celui qui est appliqué dans les cartes de contrôle (cartes \bar{x} ; R). Pour la division de l'échantillon total, l'ordre des n valeurs x_v qui s'est établi aléatoirement doit être respecté. En aucun cas, ces valeurs ne doivent être permutées après que les mesures ont été effectuées. A partir de \bar{x} et \bar{R} on calcule la caractéristique de sondage :

$$z_R = \bar{x} + K \bar{R}$$

que l'on compare à la limite de tolérance T, exactement comme pour les plans (\bar{x} ; s).

Les courbes caractéristiques $W(p)$ pour de tels plans (\bar{x} ; \bar{R}) deviennent également des lignes droites dans le papier à double échelle gaussienne, de sorte que l'on peut déterminer K et $n = n_R$ en appliquant les mêmes règles que pour la détermination de k et $n = n_s$. A la place de la courbe auxiliaire $\frac{1}{2} b(k)$, on utilise une autre courbe :

$$\frac{1}{2} c(k) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (k \delta_m)^2}$$

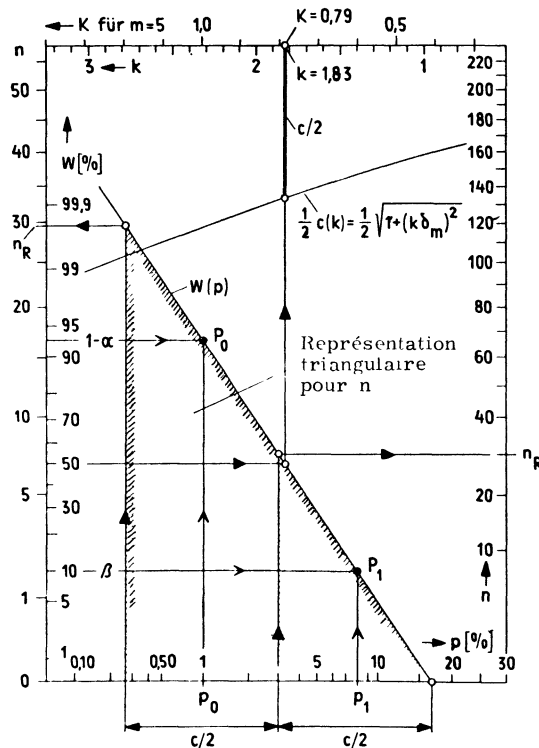


Figure 6

(Pour des sous échantillons de taille $m = 5$, δ_m a la valeur $\delta_5 = 0,831$). Dans ces conditions, on peut aussi utiliser les consignes précédemment données pour la détermination graphique de K et $n = n_R$ à partir de "plans utilisant l'étendue", comme il ressort du graphique 6. L'exemple précédent donne les valeurs $K = 0,79$ et $n = n_R = 30$.

Plus simples encore sont les plans qui emploient la médiane moyenne \bar{x}_z et l'étendue moyenne \bar{R} de l sous-échantillons. Les opérations nécessaires pour l'exploitation des résultats de mesures y sont réduites à un minimum. Bien entendu, cette simplification s'effectue aux dépens des frais de sondage caractérisés par la taille n de l'échantillon. L'échantillon total n pour de tels plans doit être un peu plus grand que pour des plans $(\bar{x} ; s)$ et $(\bar{x} ; \bar{R})$. Si l'on veut avoir la même courbe caractéristique $W(p)$ pour tous les plans, les frais augmentent en proportion de :

$$n_s : n_R : n_z = \left[1 + \frac{k^2}{2} \right] : \left[1 + (k \delta_m)^2 \right] : \left[\frac{\pi}{2} \varepsilon_m^2 + (k \delta_m)^2 \right].$$

(En utilisant des sous-échantillons de taille $m = 5$, $\delta_m = \delta_5 = 0,831$ et $\varepsilon_m = \varepsilon_5 = 0,956 \approx 1$).

(Voir figure 7, une reproduction des graphiques proposés par l'auteur N.d.l.R).

Double réseau de probabilité de K. Stange

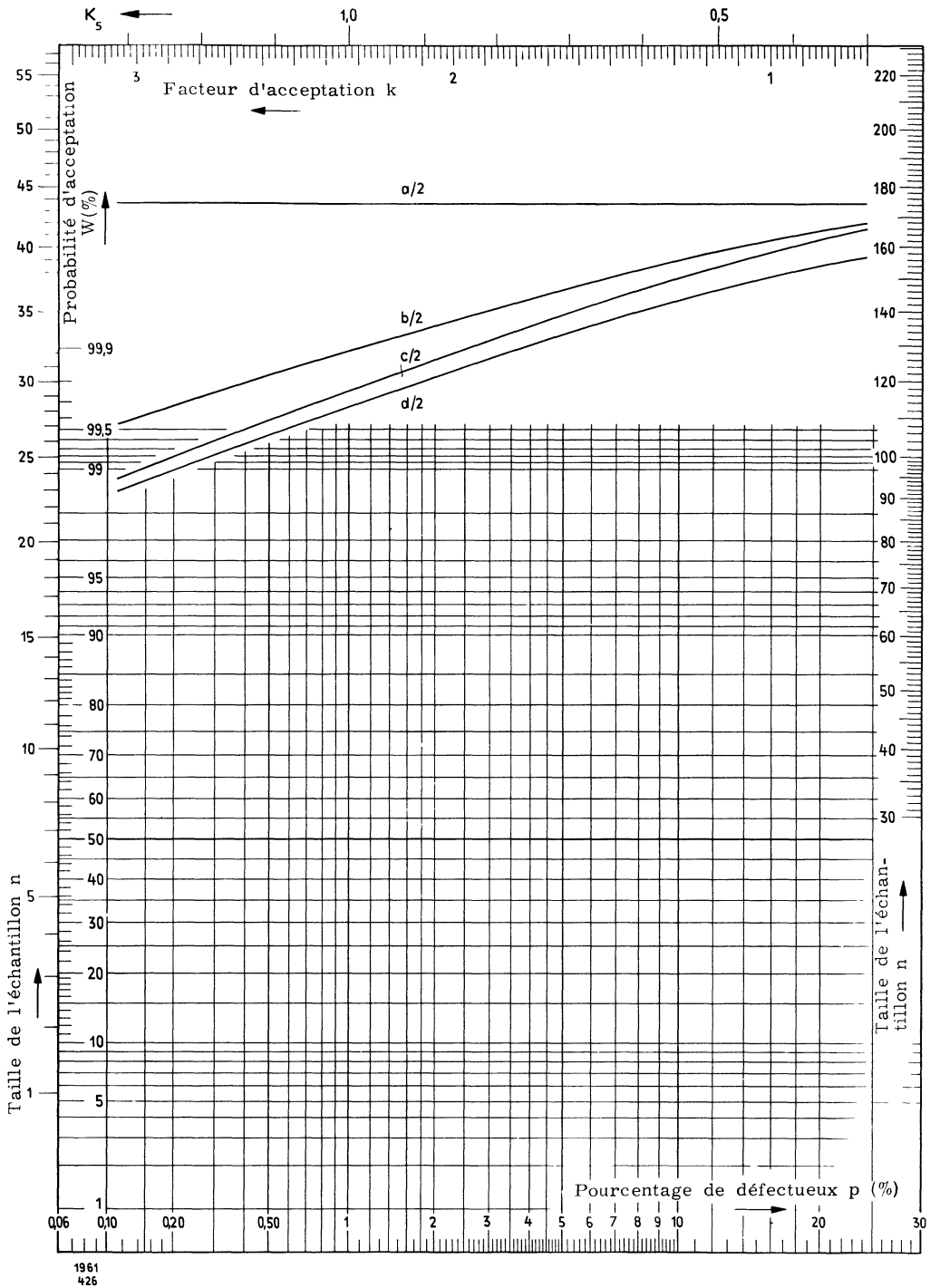


Figure 7

a/2 pour Plan (\bar{x}, σ)

c/2 pour Plan (\bar{x}, \bar{R})

b/2 pour Plan (\bar{x}, s)

d/2 pour Plan (\bar{x}_z, R)