REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. ROUZET

Étude des moments de la loi normale tronquée

Revue de statistique appliquée, tome 10, n° 2 (1962), p. 49-61

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1962__10_2_49_0>

ÉTUDE DES MOMENTS DE LA LOI NORMALE TRONQUÉE

G. ROUZET

Ingénieur à la Compagnie des Compteurs

1 - GENERALITES -

Les raisons sont bien connues pour lesquelles certains phénomènes concrets tendent à obéir à une distribution normale. Or, dans la plupart de ces phénomènes, la variable mise en cause possède un intervalle de variation pratiquement borné. C'est dire qu'on admet implicitement que le modèle mathématique utilisé est une loi normale bornée.

Mais comme d'ordinaire les bornes affectent une proportion assez faible de la distribution, et comme en général on se contente des premiers moments de la loi et de sa fonction de répartition, l'usage de caractéristiques calculées dans la loi normale non tronquée donne une approximation excellente, et la substitution est passée sous silence.

Il n'en est plus de même dans le cas où il est nécessaire de faire appel aux moments d'ordres élevés, et l'on doit alors utiliser en tant que telle la loi normale tronquée.

A titre d'exemple, on trouvera ci-après une application de cette remarque à l'étude de la loi de probabilité de l'inverse $z = \frac{1}{x}$ d'une variable x suivant une loi normale tronquée ; (le calcul des moments n'a pas de sens dans le cas d'une loi non tronquée).

Dans ce qui suit, nous étudierons les moments de la loi normale - tronquée symétriquement par rapport à la moyenne.

2 - NOTATIONS -

Soient :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

et

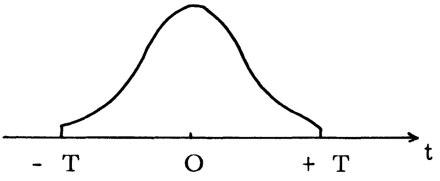
$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

la densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale.

4

L'expression de la densité de probabilité $\varphi(t)$ de la loi tronquée est :

$$\begin{cases} t < -T & \varphi(t) = 0 \\ -T \leqslant t \leqslant T & \varphi(t) = \dfrac{f(t)}{2F(T) - 1} \\ t > T & \varphi(t) = 0 \end{cases}$$



3 - ETUDE DU MOMENT D'ORDRE k -

La fonction $\varphi(t)$ étant symétrique, les moments μ_k d'ordre impair sont nuls. Etudions μ_k pour k pair.

$$\mu_k = E(t^k) = \frac{1}{2F(T) - 1} \int_{-T}^{+T} t^k \, f(t) \, dt$$

$$\mu_k = \frac{1}{2F(T) - 1} \int_{-T}^{+T} t^k \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \frac{1}{2F(T) - 1} \int_{-T}^{+T} - t^{k-1} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{t^2}{2}} \, (-t) \, dt$$

$$= - \frac{1}{2F(T) - 1} \left[t^{k-1} \, f(t)\right]_{-T}^{+T} + \frac{1}{2F(T) - 1} \int_{-T}^{+T} (k - 1) \, t^{k-2} \, f(t) \, dt$$

$$= - \frac{2}{2F(T) - 1} \, T^{k-1} \, f(T) + (k - 1) \, \mu_{k-2}$$

On a donc la formule de récurrence :

$$\boxed{\mu_k = (k - 1) \, \mu_{k-2} - \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \, T^{k-1}} \qquad (1)$$

Comme $\mu_o = 1$, on a :

$$\mu_k = (k - 1)(k - 3) \ldots 1 - \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \left[T^{k-1} + (k - 1) \, T^{k-3} + \ldots + (k - 1)(k - 3) \ldots 3T\right] \qquad (2)$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\mu_k = 1.3 \ldots (k - 1) \left[1 - \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \left(\frac{T^{k-1}}{1.3 \ldots (k - 1)} + \frac{T^{k-3}}{1.3 \ldots (k - 3)} + \ldots + \frac{T}{1}\right)\right]$$

c'est-à-dire :

$$\mu_k = 1.3\ldots(k-1)\left[1 - \frac{2f(T)}{2F(T)-1}\left(\frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \frac{T^5}{1.3.5} + \ldots + \frac{T^{k-1}}{1.3\ldots(k-1)}\right)\right] \tag{3}$$

La série limitée exprimée dans la parenthèse, est une partie de la série illimitée convergente, obtenue pour $k \longrightarrow \infty$, dont la valeur est :

$$\left(\frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \ldots + \frac{T^{2n+1}}{1.3\ldots(2n+1)} + \ldots\right) = \frac{2F(T)-1}{2f(T)} \tag{4}$$

comme il est montré en annexe.

L'expression (3) peut donc s'écrire :

$$\mu_k = 1.3\ldots(k-1)\left[1 - \frac{2f(T)}{2F(T)-1}\left[\frac{2F(T)-1}{2f(T)} - \left(\frac{T^{k+1}}{1.3\ldots(k+1)} + \frac{T^{k+3}}{1.3\ldots(k+3)} + \ldots\right)\right]\right]$$

c'est-à-dire :

$$\mu_k = 1.3\ldots(k-1)\frac{2f(T)}{2F(T)-1}\left(\frac{T^{k+1}}{1.3\ldots(k+1)} + \frac{T^{k+3}}{1.3\ldots(k+3)} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2f(T)}{2F(T)-1}\left(\frac{T^{k+1}}{k+1} + \frac{T^{k+3}}{(k+1)(k+3)} + \ldots\right)$$

c'est-à-dire finalement :

$$\boxed{\mu_k = \frac{2f(T)}{2F(T)-1}\,\frac{T^{k+1}}{k+1}\left(1 + \frac{T^2}{k+3} + \frac{T^4}{(k+3)(k+5)} + \frac{T^6}{(k+3)(k+5)(k+7)} + \ldots\right)} \tag{5}$$

(k pair).

4 - ETUDE DE LA SERIE DES MOMENTS D'ORDRE PAIR -

Les moments d'ordre pair forment une série illimitée ; pour que cette série soit convergente, il faut que

$$\lim \left(\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k}\right)_{k\to\infty} < 1$$

Nous avons :

$$\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k} = \frac{\dfrac{2f(T)}{2F(T)-1}\,\dfrac{T^{k+3}}{k+3}\left(1 + \dfrac{T^2}{k+5} + \ldots\right)}{\dfrac{2f(T)}{2F(T)-1}\,\dfrac{T^{k+1}}{k+1}\left(1 + \dfrac{T^2}{k+3} + \ldots\right)}$$

$$\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k} = \frac{k+1}{k+3}T^2\left(1 - \frac{2T^2}{(k+3)(k+5)} + \ldots\right)$$

d'où

$$\lim \left(\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k}\right) = T^2$$

La série est donc convergente pour $T^2 < 1$, c'est-à-dire pour $T < 1$.

Dans ces conditions, la série est composée de termes décroissants, car :

$$\mu_{k+2} = \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \frac{T^{k+3}}{k + 3} \left(1 + \frac{T^2}{k + 5} + \frac{T^4}{(k + 5)(k + 7)} + \ldots\right)$$

$$\mu_{k+2} < \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \frac{T^{k+3}}{k + 3} \left(1 + \frac{T^2}{k + 3} + \frac{T^4}{(k + 3)(k + 5)} + \ldots\right)$$

$$\mu_{k+2} < \frac{k + 1}{k + 3} T^2 \frac{2f(T)}{2F(T) - 1} \frac{T^{k+1}}{k + 1} \left(1 + \frac{T^2}{k + 3} + \frac{T^4}{(k + 3)(k + 5)} + \ldots\right)$$

$$\mu_{k+2} < \frac{k + 1}{k + 3} T^2 \mu_k$$

$$\frac{\mu_{k+2}}{\mu_k} < \frac{k + 1}{k + 3} T^2 < T^2 < 1$$

Ces derniers résultats n'ont que la valeur d'une remarque. Toutefois, la méthode employée pourra servir de base à l'étude de séries dans lesquelles interviennent les moments μ_k successifs ; c'est là son principal intérêt.

5 - VALEURS NUMERIQUES DES PREMIERS MOMENTS DE LA LOI NORMALE TRONQUEE POUR QUELQUES VALEURS DE T -

On a pris pour T les valeurs : 1,00 - 1,50 - 2,00 - 2,50 - 3,00 - 3,50 et on a intercalé les valeurs usuelles 1,96 et 3,09.

k \ T	1,00	1,50	1,96	2,00	2,50	3,00	3,09	3,50	∞
2	0,2911	0,5515	0,7589	0,7737	0,9113	0,9733	0,9791	0,9939	1
4	0,1645	0,6455	1,3502	1,4162	2,1791	2,6800	2,7382	2,9068	3
6	0,1136	0,9571	3,2821	3,4608	7,429	11,241	11,789	13,617	15
8	0,0865	1,5114	8,6734	21,624	30,338	59,246	64,359	84,083	105
10	0,0694	2,8285	25,541	29,784	137,63	358,28	405,81	619,12	945
12	0,0000	2,2524	79,187	95,932	667,57	2 366,6	2 808,1	5 124,3	10 395

ANNEXE

DEMONSTRATION DE L'EXPRESSION (4)

Développons en série f(t) :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2}}{1!} + \frac{\frac{t^4}{2^2}}{2!} + \frac{-\frac{t^6}{2^3}}{3!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{t^2}{2.1!} + \frac{t^4}{2^2.2!} - \frac{t^6}{2^3.3!} + \dots \right)$$

En intégrant, on obtient F(T). La constante d'intégration est telle que $F(O) = \frac{1}{2}$; on a donc :

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[t - \frac{t^3}{2.1!3} + \frac{t^5}{2^2 2!5} - \frac{t^7}{2^3 3!7} + \dots \right]_o^t$$

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(t - \frac{t^3}{2.1!3} + \frac{t^5}{2^2 2!5} - \frac{t^7}{2^3 3!7} + \dots \right)$$

d'où

$$\left\{ \begin{aligned} f(T) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{T^2}{2.1!} + \frac{T^4}{2^2 2!} - \frac{T^6}{2^3 3!} + \dots \right) \\ F(T) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(T - \frac{T^3}{2.1!3} + \frac{T^5}{2^2 2!5} - \frac{T^7}{2^3 3!7} + \dots \right) \end{aligned} \right.$$

La quantité $\frac{2F(T) - 1}{2f(T)}$ s'écrit alors :

$$\frac{2F(T) - 1}{2f(T)} = \frac{\cancel{1} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(T - \frac{T^3}{2.1!3} + \dots \right) - \cancel{1}}{\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{T^2}{2.1!} + \dots \right)}$$

$$\frac{2F(T) - 1}{2f(T)} = \frac{T - \dfrac{T^3}{2.1!3} + \dfrac{T^5}{2^2 2!5} - \dfrac{T^7}{2^3 3!7} + \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

La division des deux séries est telle que :

$$\frac{2F(T) - 1}{2f(T)} = \frac{T}{1} + \frac{\dfrac{(3-1)T^3}{2.1!1.3} - \dfrac{(5-1)T^5}{2^2 2!1.5} + \dfrac{(7-1)T^7}{2^3 3!1.7} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

$$= \frac{T}{1} + \frac{\dfrac{2.1.T^3}{2.1!1.3} - \dfrac{2.2.T^5}{2^2 2!1.5} + \dfrac{2.3.T^7}{2^3 3!1.7} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

$$= \frac{T}{1} + \frac{\dfrac{T^3}{1.3} - \dfrac{T^5}{2.1!1.5} + \dfrac{T^7}{2^2 2!1.7} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 2!} + \dots}$$

$$= \frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \frac{\dfrac{(5 - 3)T^5}{2.1!1.3.5} - \dfrac{(7 - 3)T^7}{2^2 2!1.3.7} + \dfrac{(9 - 3)T^9}{2^3 3!1.3.9} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

$$= \frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \frac{\dfrac{2.1.T^5}{2.1!1.3.5} - \dfrac{2.2.T^7}{2\,2!1.3.7} + \dfrac{2.3.T^9}{2^2 3!1.3.9} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

$$= \frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \frac{\dfrac{T^5}{1.3.5} - \dfrac{T^7}{2.1!1.3.7} + \dfrac{T^9}{2^2 2!1.3.9} - \dots}{1 - \dfrac{T^2}{2.1!} + \dfrac{T^4}{2^2 2!} - \dfrac{T^6}{2^3 3!} + \dots}$$

etc.

Le mécanisme montre que l'on obtient bien :

$$\frac{2F(T) - 1}{2f(T)} = \frac{T}{1} + \frac{T^3}{1.3} + \frac{T^5}{1.3.5} + \dots$$

EXEMPLE D'APPLICATION DE L'ÉTUDE DES MOMENTS DE LA LOI NORMALE TRONQUÉE

LOI DE L'INVERSE $z = \frac{1}{x}$
D'UNE VARIABLE x SUIVANT UNE LOI NORMALE TRONQUEE

avec $m > 0$ et :

$$- T \leqslant \frac{x - m}{\sigma} \leqslant + T$$

où m et σ sont les paramètres de la loi normale d'origine, non tronquée

1 - NOTATION -

On conservera dans ce qui suit la notation :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)\, dt$$

relative à la loi normale, en variable centrée réduite.

Par ailleurs, la notation μ_k sera réservée au moment d'ordre k de la loi normale centrée réduite tronquée, avec $- T \leqslant t \leqslant + T$.

2 - EXPRESSION DE h(z) -

La loi de x s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi(x)\, dx = \dfrac{1}{2F(T)-1} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, \sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx \\ m - T\sigma \leqslant x \leqslant m + T\sigma \end{cases}$$

Comme $z = \frac{1}{x}$ conduit à $x = \frac{1}{z}$ d'où $dx = -\frac{dz}{z^2}$, on a pour h(z) dz :

$$\left\{\begin{array}{l} h(z)\, dz = \dfrac{1}{2F(T)-1}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, \dfrac{1}{z^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{z}-m}{\sigma}\right)^2} dz \\ \\ \dfrac{1}{m+T\sigma} \leqslant z \leqslant \dfrac{1}{m-T\sigma} \end{array}\right. \qquad (1)$$

On notera que h(z) peut s'écrire :

$$h(z) = \frac{1}{2F(T)-1}\, \frac{1}{\sigma}\, \frac{1}{z^2}\, f\left(\frac{\frac{1}{z}-m}{\sigma}\right) \qquad (2)$$

3 - CALCUL DES MOMENTS DE LA LOI DE z -

La variable $t = \dfrac{\frac{1}{z}-m}{\sigma}$ suit une loi normale réduite, tronquée, avec $-T \leqslant t \leqslant T$. On peut donc calculer $E(z^k)$ en fonction des moments μ successifs de la loi normale tronquée.

On a :

$$\frac{1}{z} = m + t\sigma = m\left(1 + \frac{\sigma}{m}\, t\right)$$

d'où :

$$z = \frac{1}{m}\, \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{m}\, t}$$

d'où, en développant en fonction des puissances croissantes de t :

$$z = \frac{1}{m}\left[1 - \frac{\sigma}{m}\, t + \frac{\sigma^2}{m^2}\, t^2 - \frac{\sigma^3}{m^3}\, t^3 + \ldots\right] \qquad (3)$$

d'où encore :

$$z^k = \frac{1}{m^k}\left[1 - C_k^1\, \frac{\sigma}{m}\, t + C_{k+1}^2\, \frac{\sigma^2}{m^2}\, t^2 - C_{k+2}^3\, \frac{\sigma^3}{m^3}\, t^3 + \ldots\right] \qquad (4)$$

le terme général en t^i étant :

$$(-1)^i\, C_{k-1+i}^i\, \frac{\sigma^i}{m^i}\, t^i$$

ou encore :

$$(-1)^i\, C_{k-1+i}^{k-1} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^i t^i$$

On a donc :

$$E(z^k) = \frac{1}{m^k}\left[1 + C_{k+1}^{k-1}\, \frac{\sigma^2}{m^2}\mu_2 + \ldots + C_{k-1+i}^{k-1} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^i \mu_i + \ldots\right] \qquad (5)$$

On note alors que, pour que la série donnant $E(z^k)$ soit convergente, il faut que :

$$\lim \left[\frac{C^{k-1}_{k-1+i+2} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i+2} \mu_{i+2}}{C^{k-1}_{k-1+i} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i} \mu_{i}} \right]_{i\to\infty} < 1 \qquad (6)$$

Or :

$$\frac{C^{k-1}_{k-1+i+2} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i+2} \mu_{i+2}}{C^{k-1}_{k-1+i} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i} \mu_{i}} = \frac{C^{k-1}_{k+1+i}}{C^{k-1}_{k-1+i}} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \frac{\mu_{i+2}}{\mu_i}$$

$$= \frac{(k+1+i)!(k-1)!i!}{(k-1)!(i+2)!(k-1+i)!} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \frac{\mu_{i+2}}{\mu_i}$$

$$= \frac{(k+i+1)!}{(k+i-1)!} \frac{i!}{(i+2)!} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \frac{\mu_{i+2}}{\mu_i}$$

$$= \frac{(k+i)(k+i+1)}{(i+1)(i+2)} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \frac{\mu_{i+2}}{\mu_i}$$

d'où :

$$\lim \left[\frac{C^{k-1}_{k+1+i} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i+2} \mu_{i+2}}{C^{k-1}_{k-1+i} \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{i} \mu_{i}} \right]_{i\to\infty} = \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \lim \left[\frac{\mu_{i+2}}{\mu_i} \right]_{i\to\infty}$$

On sait, par ailleurs (étude des moments de la loi normale tronquée), que :

$$\lim \left[\frac{\mu_{i+2}}{\mu_i} \right]_{i\to\infty} = T^2$$

La condition (6) s'écrit donc :

$$\left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} T^2 < 1$$

Le calcul des moments de la loi de z n'a donc de sens que si :

$$T < \frac{m}{\sigma} \qquad (7)$$

Nous supposerons dans la suite qu'il en est ainsi ; nous aurons alors en conséquence : $m - T\sigma > 0$, c'est-à-dire que x, d'où z, sont toujours positifs.

Dans ces conditions, les deux premiers moments sont, en particulier :

$$\left\{ \begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{m} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \mu_2 + \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{4} \mu_4 + \dots \right] \\ E(z^2) &= \frac{1}{m^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{2} \mu_2 + 5 \left(\frac{\sigma}{m}\right)^{4} \mu_4 + \dots \right] \end{aligned} \right. \qquad (8)$$

d'où la moyenne et la variance de la loi de z :

$$\begin{cases} m_z = \dfrac{1}{m}\left[1 + \left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^2 \mu_2 + \left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^4 \mu_4 + \ldots\right] \\ \sigma_z^2 = \dfrac{1}{m^2}\left[\left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^2 \mu_2 + \left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^4 (3\mu_4 - \mu_2^2) + \left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^6 (5\mu_6 - 2\mu_2\mu_4) + \ldots\right] \end{cases} \tag{9}$$

4 - FONCTION DE REPARTITION H(z) -

Toujours sous la condition :

$$0 < m - T\sigma \leqslant x \leqslant m + T\sigma$$

la fonction de répartition s'écrit, à partir de l'expression (1) :

$$H(z) = \int_{\frac{1}{m+T\sigma}}^{z} \frac{1}{2F(T) - 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{1}{z^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{z} - m}{\sigma}\right)^2} dz \tag{10}$$

soit, comme $t = \dfrac{\frac{1}{z} - m}{\sigma}$ conduit à $dt = -\dfrac{dz}{\sigma . z^2}$

$$H(z) = \int_{\frac{\frac{1}{z} - m}{\sigma}}^{T} \frac{1}{2F(T) - 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{11}$$

Numériquement, on aura donc, à partir des tables de la loi normale :

$$H(z) = \frac{1}{2F(T) - 1}\left[F(T) - F\left(\frac{\frac{1}{z} - m}{\sigma}\right)\right] \tag{12}$$

5 - FORME LIMITE DE LA LOI DE z LORSQUE $\dfrac{\sigma}{m} \longrightarrow 0$ -

Lorsque $\dfrac{\sigma}{m} \longrightarrow 0$, le développement (3) fournit :

$$z \simeq \frac{1}{m}\left(1 - \frac{\sigma}{m} t\right) = \frac{1}{m} - \frac{\sigma}{m^2} t$$

L'expression de la loi de z converge donc, entre ses limites, vers l'expression de la loi normale de :

$$\begin{cases} \text{moyenne} \quad : \dfrac{1}{m} \\ \text{écart-type} : \dfrac{\sigma}{m^2} \longrightarrow 0 \end{cases} \tag{13}$$

Les limites de variation de z deviennent simultanément, exprimées en variable centrée réduite $u_z = \dfrac{z - \frac{1}{m}}{\frac{\sigma}{m^2}}$:

$$\frac{\frac{1}{m + T\sigma} - \frac{1}{m}}{\frac{\sigma}{m^2}} \leqslant u_z \leqslant \frac{\frac{1}{m - T\sigma} - \frac{1}{m}}{\frac{\sigma}{m^2}}$$

soit :

$$\frac{m - (m + T\sigma)}{\frac{\sigma}{m}(m + T\sigma)} \leqslant u_z \leqslant \frac{m - (m - T\sigma)}{\frac{\sigma}{m}(m - T\sigma)}$$

$$\frac{- mT}{m + T\sigma} \leqslant u_z \leqslant \frac{mT}{m - T\sigma}$$

$$- T \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{m} T} \leqslant u_z \leqslant T \frac{1}{1 - \frac{\sigma}{m} T}$$

valeurs qui convergent vers :

$$- T \leqslant u_z \leqslant T \tag{14}$$

En conclusion, la loi de z converge vers une loi normale tronquée, définie par les expressions (13) et (14).

Les expressions (9) fournissent, dans les mêmes conditions :

$$\begin{cases} m_z \longrightarrow \dfrac{1}{m} \\ \sigma_z^2 \longrightarrow \dfrac{1}{m^2} \left(\dfrac{\sigma}{m}\right)^2 \mu_2 = \dfrac{\sigma^2}{m^4} \mu_2 \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} m_z \longrightarrow \dfrac{1}{m} \\ \sigma_z \longrightarrow \dfrac{\sigma}{m^2} \sqrt{\mu_2} \end{cases}$$

ce qui coïncide avec le résultat précédent.

6 - REMARQUE SUR LES VALEURS NUMERIQUES DE T ET DE μ_k -

Rappelons que sont indiquées dans l'étude des moments de la loi normale-tronquée les valeurs des premiers moments μ_k correspondant à quelques valeurs de T.

Notons par ailleurs que, la condition (7) exigeant simplement $T < \frac{m}{\sigma}$, on pourra, lorsque $\frac{m}{\sigma} > 3,09$, choisir arbitrairement dans certains cas $T = 3,09$.

7 - EXEMPLE -

Une fabrication de résistances électriques en constantan, à partir de tôles de faible épaisseur, est telle que la dispersion des valeurs des résistances répond à une loi sensiblement normale pratiquement bornée à T = 3,09, de :

$$\begin{cases} \text{moyenne} : m = 0{,}01 \ \Omega \\ \text{écart-type} : \sigma = 0{,}0005 \ \Omega \end{cases}$$

On désire profiter de cette fabrication pour réaliser des ensembles composés de 5 résistances en parallèle. Chaque ensemble doit satisfaire à la condition suivante : branché sur une source dont la tension de 1 volt est maintenue constante (c'est-à-dire que ses variations sont négligeables en regard du phénomène étudié) le courant total i doit être de 500 A à 5 % près.

On envisage de ne prélever dans la fabrication courante que des résistances répondant à certaines tolérances afin de créer des lots à partir desquels seront montés les ensembles.

Dans la mesure où ce tri est nécessaire, quelles doivent être les tolérances pour qu'un ensemble constitué de 5 résistances prises au hasard dans ces lots ait la probabilité 0,998 d'être bon ?

Soit x la valeur d'une résistance prise dans un lot et z le courant qui la traverse, avec $z = \frac{1}{x}$.

Les moments de la loi de z peuvent être étudiés pour T < 20 ce qui est le cas.

Sans tri, donc pour T = 3,09 dans la loi de x, on a :

$$\begin{aligned} m_z &= 100 \quad [1 + (0{,}05)^2 . 0{,}9791 + (0{,}05)^4 . 2{,}7382 + ..] \\ &= 100 \quad [1 + 0{,}00245 + 0{,}0000170 + \ldots] \\ &= 100{,}247 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= 10\,000 \quad [(0{,}05)^2 . 0{,}9791 + (0{,}05)^4 . [3.2{,}7382 - (0{,}9791)^2] + \ldots] \\ &= 10\,000 \quad [0{,}00245 + 0{,}00004535 + 0{,}0000008 + \ldots] \\ &= 24{,}96 \end{aligned}$$

$$\sigma_z = 5{,}00$$

Soit :

$$\begin{cases} m_z = 100 \\ \sigma_z = 5 \end{cases}$$

On assimilera à une loi normale la loi du courant i, somme des 5 courants z dans 5 résistances prises au hasard, avec :

$$m_i = m_z . 5 = 500$$

$$\sigma_i = \sigma_z \sqrt{5} = 11{,}2$$

d'où :

$$3,09\sigma_i = 34,6$$

d'où l'erreur :

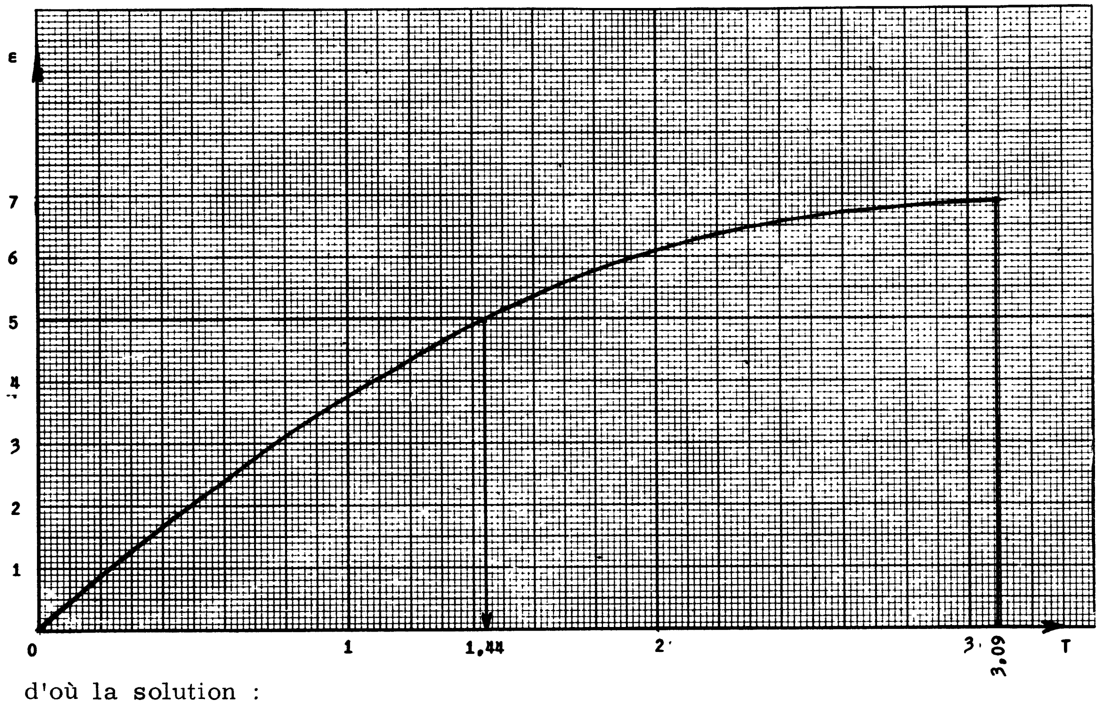
$$\varepsilon = \frac{3,09\sigma_i}{m_i} = 6,9\ \%$$

Il est donc nécessaire de procéder à un tri.

Effectuons le même calcul pour quelques valeurs de T ; on obtient :

T = 2,00	ε = 6,1 %
T = 1,50	ε = 5,15 %
T = 1,00	ε = 3,75 %

On peut alors établir le graphique suivant :



d'où la solution :

$$T = 1,44$$

Les tolérances de prélèvement sont donc :

$$x = 0,01 \pm 1,44 \times 0,0005$$

soit :

$$x_{mini} = 0,00928\,\Omega$$

$$x_{maxi} = 0,01072\,\Omega$$