REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

E. J. GUMBEL

Une distribution à deux variables et généralisations de ses valeurs extrêmes

Revue de statistique appliquée, tome 10, nº 1 (1962), p. 97-98

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1962__10_1_97_0>

UNE DISTRIBUTION A DEUX VARIABLES ET GÉNÉRALISATIONS DE SES VALEURS EXTRÈMES

E. J. GUMBEL

La fonction de probabilité

$$F(x) = (1 + e^{-x})^{-1} \tag{1}$$

ressemble à la fonction normale, ayant l'espérance mathématique zéro et l'écart-type $\Pi/\sqrt{3}$. Les deux fonctions sont symétriques. Mais la fonction de répartition, à deux variables dépendantes,

$$F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1} \tag{2}$$

dont les marges sont données par (1) est asymétrique. En effet $F(0,0) = 1/3$. La densité de probabilité,

$$f(x, y) = 2e^{-x-y} F^3(x, y) \tag{3}$$

est telle que

$$f(-x, -x) > f(x, x) \ ; \ x > 0. \tag{3'}$$

la fonction de densité a un sommet à l'origine des coordonnées.

Les courbes de densité constante ressemblent aux ellipses classiques. Les courbes de régression

$$E(x/y) = 1 + \log F(y) \ ; \ E(y/x) = 1 + \log F(x) \tag{4}$$

se coupent, non à l'origine des coordonnées, mais au point :

$$x = y = 0,5413, \tag{4'}$$

et possèdent des asymptotes parallèles aux axes et à distance unité. Enfin le coefficient de corrélation est constant et égal à $1/2$.

La fonction de probabilité du plus grand couple tend vers

$$\Phi(x, y) = \exp\,[-e^{-x} - e^{-y}].$$

qui est le produit des fonctions asymptotiques des plus grandes valeurs du premier type [2], comme pour la distribution normale [1].

Par contre la fonction de répartition, pour que le plus petit couple soit supérieur à x et y tend vers

$$\Pi(x, y) = \exp [-e^{x} - e^{y} + (e^{-x} + e^{-y})^{-1}] \quad , \tag{6}$$

les plus grands couples sont donc asymptotiquement indépendants tandis que les plus petits couples restent dépendants, propriété différente de celle de la distribution normale.

Si l'on introduit la première fonction asymptotique (2) des probabilités des plus petites valeurs supérieures à x, à savoir :

$$\Pi(x) = \exp [-e^{x}] \tag{7}$$

l'expression (6) devient

$$\Pi(x, y) = \Pi(x)\,\Pi(y) \exp \left[- \frac{\log \Pi(x) \log \Pi(y)}{\log \Pi(x) + \log \Pi(y)} \right] \tag{8}$$

En utilisant les trois types $\Pi^{(1)}$, $\Pi^{(2)}$, $\Pi^{(3)}$ des fonctions de répartition des plus petites valeurs et en introduisant un paramètre $0 < m < 4$ on obtient six fonctions de répàrtition, de deux plus petites valeurs dépendantes ou non

$$\Pi^{(k,\lambda)}_{(x,y)} = \Pi^{(k)}_{(x)}\, \Pi^{(\lambda)}_{(y)} \exp \left[- \frac{m \log \Pi^{(k)}_{(x)} \log \Pi^{(\lambda)}_{(y)}}{\log \Pi^{(k)}_{(x)} + \log \Pi^{(\lambda)}_{(y)}} \right] \tag{9}$$

où k, $\lambda = 1, 2, 3$. Cette expression et l'expression correspondante pour les plus grands couples :

$$\Phi^{(k,\lambda)}_{(x,y)} = \Phi^{(k)}_{(x)}\, \Phi^{(\lambda)}_{(y)} \exp \left[- \frac{m \log \Phi^{(k)}_{(x)} \log \Phi^{(\lambda)}_{(y)}}{\log \Phi^{(k)}_{(x)} + \log \Phi^{(\lambda)}_{(y)}} \right] \tag{10}$$

sont des distributions asymptotiques de valeurs extrêmes en deux dimensions dont les marges sont les distributions de valeurs extrêmes en une dimension. Le cas $m = 0$ implique l'indépendance. La formule (10) peut être ramenée au système général de distributions extrêmales en plusieurs dimensions établi par M. GEFFROY [1].

Evidemment les systèmes (9) et (10) permettent une généralisation en n dimensions. Enfin, en remplaçant les probabilités $\Phi(x)$ par des fonctions $F(x)$ et les fonctions $\Pi(x)$ par les probabilités $P(x)$ des valeurs supérieures à x, on obtient des fonctions de répartition $F(x, y)$ et $P(x, y)$ en n variables dont les marges sont données.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - GEFFROY, Jean - Contribution à la théorie des valeurs extrêmes, Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, Série A, n° 3267, n° d'ordre 4139, décembre 1958.

[2] - GUMBEL, E.J. - Statistics of Extrêmes, Columbia University Press, 1958.

[3] - GUMBEL, E.J. - Bivariate logistic distributions. Journal of the American Statistical Association. Juin 1961.