REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

GÉRARD PILÉ

Sur l'application de la théorie des ensembles à la solution du problème « la ruine du joueur »

Revue de statistique appliquée, tome 9, nº 1 (1961), p. 63-74
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1961__9_1_63_0>

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES A LA SOLUTION DU PROBLÈME "LA RUINE DU JOUEUR"

par Gérard PILÉ

Ancien élève de l'École Polytechnique

Dans une "Note sur la description de l'évolution de certains processus de Markov homogènes" publiée dans le N° 14 de la Revue Française de Recherche Opérationnelle, l'auteur proposait une méthode nouvelle de calcul des "probabilités de passage" attachées à certains systèmes classiques d'attente. Il signalait, incidemment, la possibilité d'appliquer cette méthode à la résolution du problème dit "ruine du joueur".

Ce dernier problème, posé dans ses hypothèses les plus simples, est ici repris et approfondi à la lumière de ces observations; les développements qui suivent aboutissent à une solution complète d'application facile.

Inversement, la présente note précise nombre de points de principe et fournit des démonstrations, qui, faute de place, avaient été omises dans le texte initial cité ci-dessus.

I - INTRODUCTION

Rappelons le processus étudié : deux joueurs A et B engagent une partie constituée par une suite de coups indépendants, la probabilité de gain de A à chaque coup est une constante p, celle de B est $q = 1 - p$.

A et B disposent d'avoirs initiaux h et h'. La partie s'arrête au bout de n coups dès que l'avoir de l'un des joueurs tombe à 0 (ou devient négatif selon les conventions). Si A a la faculté de réaliser son bénéfice en cours de partie dès qu'il atteint un montant qu'il se fixe à l'avance, cela équivaut à ramener l'avoir initial de B à ce montant.

Désignons par A ou B le vainqueur de chaque épreuve : une partie est représentée par une suite dichotomique ordonnée telle que :

B B A B A A B B B

les totaux progressifs i des B, j des A étant astreints uniformément aux conditions :

$$h + j - i \geqslant 0 \qquad h' + i - j \geqslant 0$$

Le problème se pose généralement dans les termes suivants :

Quelles sont au bout de n coups, les probabilités que s'achève la partie sur le succès de A ou de B ? La probabilité complémentaire étant celle de poursuite du jeu.

Le problème est évidemment simplifié si l'on fait l'hypothèse que B par exemple, est infiniment riche, ce qui supprime la seconde contrainte : la probabilité de ruine du joueur A, considérée comme une fonction de n et du paramètre p, devient alors la seule inconnue du problème.

Si l'évolution de la partie est représentée par un diagramme où sont portés :

en abscisse, le nombre x de coups joués
en ordonnée, l'avoir y de A.

Nous voyons que le point M, image de l'état du système étudié effectue dans le plan considéré, une suite de sauts : $\Delta x = +1$ $\Delta y = \pm 1$, à l'intérieur d'une bande horizontale limitée par les paliers 0 et $h + h'$, le jeu s'arrêtant par absorption à l'un de ces niveaux.

La solution du problème : "la ruine du joueur" tel qu'il vient d'être posé est ancienne remontant à Lagrange.

Depuis Lagrange, nombre de mémoires lui ont été consacrés proposant des solutions diverses. La méthode devenue la plus classique, telle qu'elle se trouve exposée dans l'ouvrage général de Feller : "An initiation to Probability theory" est celle des fonctions génératrices.

Exception faite pour quelques résultats simples de base, l'application générale de cette méthode nécessite des calculs pouvant être considérables.

II - EXPOSE GENERAL DE LA METHODE SUIVIE

Le problème est ici repris, avec le souci de dégager, pour en tirer par la suite le parti optimum, les propriétés mathématiques essentielles sous-jacentes du processus, propriétés de semi-groupes en particulier.

La résolution pratique peut être ainsi ramenée à des règles opératoires simples consistant, comme nous le verrons,

- soit à développer par itération le tableau dont les éléments dénombrent les évolutions équiprobables satisfaisant à des conditions données;
- soit à calculer les éléments particuliers au moyen de tables numériques d'application tout à fait générales.

Le problème est en outre abordé dans sa formulation la plus large qui est la détermination des probabilités de passage en n coups d'un état initial h à un état final compatible quelconque k.

°
° °

Nous utiliserons une méthode de contraction, inspirée de celle utilisée dans la théorie des évènements récurrents, consistant à transformer la suite dichotomique initiale en une nouvelle suite ayant pour éléments, les séquences complètes des s succès consécutifs à chaque perte (ou la précédant).

L'ordre BA^s est ici préféré à l'ordre $A^s B$, du fait qu'il est préférable dans la théorie actuelle que la dernière séquence soit toujours "complète", c'est-à-dire contienne un "B" et s "A" ($s \geqslant 0$) alors qu'il peut être nécessaire d'ajouter un B fictif pour compléter la première séquence.

Chaque séquence de rang x étant caractérisée par un entier positif ou nul, s_x, la suite initiale a pour image un ensemble $\{s_x\}$ $x \in 1, \ldots, i$ satisfaisant à la condition $\Sigma s_x = j$.

La suite donnée plus haut par exemple a pour image :

$$0 \; 1 \; 2 \; 0 \; 0 \; 0$$

constituée de 3 unités (succès) distribuées dans 6 intervalles (pertes).

Nous dirons des suites $\{s_x\}$ $x \in 1 \ldots i$ $\Sigma s_x = j$ qu'elles sont enchaînées depuis un état initial h si le jeu correspondant ne s'arrête pas au cours des i séquences (sinon à la dernière) en se limitant dans une première analyse à une seule cause d'arrêt : le franchissement de la barrière 0.

Une suite quelconque $\{s_x\}$ ne remplit cette condition que si elle possède certaines caractéristiques qui vont être mises en évidence :

Observons à des instants réguliers, l'état d'un système ponctuel "entrées-sorties" ci-après[1] :

- input : arrivées distribuées dans les i intervalles selon l'ensemble $\{s_x\}$,
- output : une sortie par intervalle sous la réserve d'existence d'unités engagées dans le système au début de cet intervalle.

Si k est l'état final d'un tel système, la condition nécessaire et suffisante d'enchaînement depuis h d'un ensemble $\{s_x\}$ de caractères i, j, k n'est autre que l'inégalité

$$h + j \geqslant i + k$$

L'application à un état initial h d'une suite particulière $\{s_x\}$ (véritable opérateur à droite sur h) fait passer cet état à un état final k' tel que

$$k' = k \quad \text{si} \quad h + j \leqslant i + k$$

$$k' = h + j - i \quad \text{si} \quad h + j > i + k$$

Nous utiliserons désormais les notations suivantes :

La famille des distributions $\{s_x\}$ de caractère i, j, k sera notée (i, j, k). Son ordre, c'est-à-dire le nombre correspondant de distributions topologiquement distinctes, sera noté [i, j, k].

On observera la condition $j < i + k$.

----

(1) Un tel schéma caractérise également les systèmes d'attente à un poste dont la théorie est cependant plus générale.
En effet l'hypothèse d'une loi géométrique des arrivées dans chaque intervalle est propre seulement aux deux cas particuliers suivants :
- arrivées poissonniennes, loi exponentielle négative du temps de service;
- arrivées à raison d'une grappe d'effectif géométrique par temps de service.

(Il ne peut y avoir de sortie dans le premier intervalle lorsque la suite $\{s_x\}$ est appliquée à un état initial 0).

Toutes les distributions de mêmes i, j ont une même probabilité de réalisation $q^i\ p^j$ et si n est le nombre de coups joués on doit avoir :

$$\begin{cases} n = i + j \\ h + j = i + k \end{cases} \quad \text{d'où} \quad i = \frac{n - (k - h)}{2} \qquad j = \frac{n + k - h}{2}$$

La probabilité de passage de l'état h à l'état (compatible) k au bout de n coups est alors exprimée par la formule fondamentale :

$$P_n(h,\ k) = q^{\frac{n-(k-h)}{2}}\ p^{\frac{n+k-h}{2}} \sum_y [i,\ j,\ y] \tag{1}$$

où : $k - h < y \leqslant k$; (ce qui revient à considérer à partir de $y = k$ inclus un nombre d'éléments égal au plus petit des entiers $k + 1$ ou h, selon que $h > k$ et vice versa).

Le problème actuel se trouve donc ramené au calcul des $[i,\ j,\ y]$ et nous devons chercher tout d'abord à connaître plus intimement la structure des $(i,\ j,\ y)$.

(La notation k sera préférée par la suite à y).

Observons que les (i, j, k) peuvent d'une seule manière être décomposées eu deux distributions contigües :

a) Une distribution enchaînée de 0 à k sur x intervalles comprenant donc $J = k + (x - 1)$ entrées.

b) Une distribution d'état final 0 de $j - J$ entrées sur $i - x$ intervalles.

L'application du théorème des probabilités totales conduit ainsi à la relation de composition

$$[i,\ j,\ k] = \sum_{J=k}^{J=j} [i - x,\ j - J,\ 0]\ [x,\ J,\ k] \tag{2}$$

où $x = J - k + 1$.

Nous allons montrer qu'outre cette relation du second ordre et de façon plus simple, on peut associer biunivoquement à toute famille $(i,\ j,\ k)$ une famille de types (a) ou (b). Nous utiliserons pour cela diverses transformations biunivoques sur les distributions $\{s_x\}$, notamment :

1/ L'addition ou la soustraction de constantes telles que intervalles vides, tout ou partie du contenu d'un intervalle.

2/ Substitutions diverses de séquences en particulier celles de degré n (permutations circulaires) telles que l'inversion :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i \\ i & i-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

3/ "Symétrie" consistant à écrire la suite ordonné initiale sous la forme d'une suite de séquences AB^s, ce qui revient à envisager le déroulement du processus du point de vue symétrique du joueur B.

Faisons subir aux distributions d'une famille donnée $(i + 1,\ j,\ k)$ les transformations biunivoques schématisées ci-après.

$$(i + 1, j, k)$$

Opérations sur la 1ère case :		Opérations sur la dernière case :	
Retrait d'une unité (si contenu > 0)	Suppression (si vide)	Retrait d'une unité (si contenu > 0)	Suppression (si vide)

Si $k > 0$ $[i + 1, j - 1, k] + [i, j, k] = [i + 1, j - 1, k - 1] + [i, j, k + 1]$

Si $k = 0$ $[i + 1, j - 1, 0] + [i, j, 0] = \quad 0 \quad + [i, j, 1] + [i, j, 0]$

La différence $[i, j, k] - [i + 1, j - 1, k - 1]$ est donc, pour i et j donnés, indépendante de k, elle est nulle en vertu de la seconde égalité. D'où, par récurrence, la relation générale

$$[i, j, k] = [i + k, j - k, 0] \tag{3}$$

Ce résultat entraîne diverses conséquences théoriques et pratiques essentielles.

1/ On a supposé implicitement $j < i + k$.

Appliquons le résultat précédent à la valeur maximale $J = i + k - 1$, c'est-à-dire au cas d'une distribution enchaînée depuis 0.

$$[i, J, k] = [J + 1, i - 1, 0] \tag{4}$$

Dans la relation (2), les familles dénombrées au second membre, se ramènent donc simplement les unes aux autres.

L'égalité (4) ne fait que traduire une biunivocité prévisible a priori : on montre en effet aisément que le passage de la famille du premier membre à celle du deuxième peut être opéré par une série de trois transformations biunivoques.

- une symétrie fournit des distributions $(J, i - 1)$ dont les inverses sont caractérisées par un état final 0 ou 1, l'addition d'un intervalle vide à droite fournit les distributions $(J + 1, i - 1, 0)$.

Chaque famille (i, j, k) $j \leqslant J$ a ainsi son image dans le complexe des $(i, j, 0)$ ou dans celui des (i, J).

Cette unicité est liée aux propriétés de semi groupes propres aux distributions étudiées. Prévisibles par diverses considérations, ces propriétés peuvent être établies à partir des résultats déjà obtenus.

Le complexe des distributions étudiées peut être décomposé en ensembles principaux dont les éléments sont indicés par la différence $g = i - j$: nombre d'intervalles sans sortie des distributions images $(i, j, 0)$ correspondantes.

Dressons le tableau suivant :

Distributions	Images	Valeur de g correspondante
(x, J, k)	$(J + 1, x - 1, 0)$	$g_1 = J + 1 - (x - 1) = k + 1$
$(i - x, j - J, 0) \longrightarrow$	$(J + 1, x - 1, 0)$	$g_2 = i - x - (j - J) = i - j + k - 1$
(i, j, k)	$(i + k, j - k, 0)$	$g_3 = i - j + 2k$

On en déduit :

$$g_3 = g_1 + g_2 \tag{5}$$

Les éléments "g" peuvent ainsi être composés deux à deux ou avec eux-mêmes suivant une certaine loi fournissant un élément du même complexe de telle sorte qu'à tout couple g_1 g_2 corresponde l'élément $g_1 + g_2$.

Cette opération est commutative et associative. Il n'existe pas d'élément neutre ni d'inverses. En revanche, l'élément 1 fournit par auto-composition tous les éléments du complexe.

Les éléments g jouissent donc des propriétés des semi-groupes abéliens (commutativité de l'opération de composition) et périodiques.

Cette observation est essentielle pour comprendre les structures étudiées, elle fournit par ailleurs les idées directrices de généralisations dont l'exposé sortirait de ce cadre.

2/ Nous sommes en mesure d'expliciter les dénombrements cherchés.

La sommation des [i, j, k] étendue à toutes les valeurs possibles k n'est autre que le nombre de distributions distinctes de j objets semblables dans i cases ordonnées, autrement dit le nombre $\Gamma_{ij} = C^j_{i+j-1}$ de combinaisons avec répétition de i objets j à j

$$\sum_k [i,\ j,\ k] = \sum_k [i+k,\ j-k,\ 0] = \Gamma_{ij}$$

La borne inférieure de l'indice k est 0 si $j < i$ et $J = j - (i-1)$ si $j \geqslant i$.

La borne supérieure est toujours j (j entrées dans le dernier intervalle conduisant à l'état final j, cette distribution est unique).

Considérons le 1er cas, on peut aussi écrire :

$$\Gamma_{i+1,\ j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} [i+1,\ j-1,\ k] = \sum_{k=1}^{j} [i+k,\ j-k,\ 0]$$

On en déduit :

$$[i,\ j,\ 0] = \Gamma_{ij} - \Gamma_{i+1,\ j-1} \tag{6}$$

Si $j \geqslant i$ des calculs analogues donnent :

$$[i,\ J,\ k] = \Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,\ j+1} \tag{7}$$

(résultat pouvant aussi être obtenu en utilisant : $[iJ[= [J+1,\ i-1,\ 0]$).

Nous avons vu que le nombre de distributions enchaînées depuis un état initial h jusqu'à un état final k à la fin de l'intervalle i était égal à la somme

$$[i,\ J,\ k] + [i,\ J,\ k-1] + \dots + \begin{cases} [i,\ J,\ 0] & \text{si} \quad k < h \\ [i, J, k-h+1] & \text{si} \quad k \geqslant h \end{cases}$$

où $k + J = i + k$.

Supposons d'abord $k > h$ (ce qui revient à supposer $J > i$).

Nous avons à sommer h éléments à partir de :

$$[i + k, j - k, 0] = [J + h, i - h, 0] = \Gamma_{J+h,\, i-h} - \Gamma_{J+h+1,\, i-h-1}$$

On trouve pour total

$$- \Gamma_{J+h+1,\, i-h-1} + \Gamma_{J+1,\, i-1}$$

qui s'écrit aussi plus simplement : $\Gamma_{iJ} - \Gamma_{i-h,\, J+h}$

Si $h \geqslant k$, on a à sommer $k + 1$ éléments seulement.

On trouve :

$$- \Gamma_{J+h+1,\, i-h-1} + \Gamma_{J+h-k,\, i-(h-k)}$$

résultat identique au précédent puisque $J + h - k = i$.

On peut donc écrire de façon générale :

$$P_n(h, k) = q^i p^J (\Gamma_{iJ} - \Gamma_{i-h,\, J+h}) \tag{8}$$

où i et J ont la signification habituelle :

$$i = \frac{n - (k - h)}{2} \qquad J = \frac{n + k - h}{2}$$

Appliquons cette formule en particulier au cas $k = 0$ (ruine du joueur) on retrouve simplement un résultat d'ailleurs classique :

$$P_n(h, 0) = \frac{h}{n} C_n^{\frac{n-h}{2}} q^{\frac{n+h}{2}} p^{\frac{n-h}{2}}$$

En effet $i - J = h$ et :

$$C^J_{i+J-1} - C^{J+h}_{i+J-1} = C^J_{i+J-1} - C^{J-1}_{i+J-1} = \frac{i - J}{i + J} C^J_{i+J}$$

III - CONSTRUCTION DES TABLEAUX

Celle-ci est basée sur la relation de récurrence générale

$$[i, j] = [i - 1, j] + [i, j - 1] \tag{9}$$

valable aussi bien dans le cas enchaîné (J au lieu de j).

Les conditions limites sont les suivantes :

1/ (Cas enchaîné depuis un état initial 0) : $[i, i - 2] = 0$ (rupture de chaîne)
$[i, J] = 1$

2/ (Cas non enchaîné depuis l'état initial 0) $[i, i - 1] = 0$ (formation de chaîne)
$[i, 0] = 1$

On obtient deux tableaux "triangulaires" d'éléments a_{iJ} et a_{ij}, qui, par superposition, donnent un troisième tableau symétrique par rapport à la diagonale principale.

Les a_{iJ} sont lus sur la diagonale principale et sur les diagonales supérieures ou "surdiagonales".

Les a_{ij} sont lus sur la diagonale principale et sur les diagonales inférieures, ou "sousdiagonales".

Tableau des a_{iJ} et a_{ij}(1)

i \ j,J	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	1	2	2	5	9	14	20	27	35	44
4	1	3	5	5	14	28	48	75	110	154
5	1	4	9	14	14	42	90	165	275	429
6	1	5	14	28	42	42	132	297	572	1001
7	1	6	20	48	90	132	132	429	1001	2002
8	1	7	27	75	165	297	429	429	1430	3432
9	1	8	35	110	275	572	1001	1430	1430	4862
10	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	4862
11	1	10	54	208	637	1638	3640	7072	11934	16796
12	1	11	65	273	910	2548	6188	13260	25194	41990
13	1	12	77	350	1260	3808	9996	23256	48450	90440
14	1	13	90	440	1700	5508	15504	38760'	87210	17765^{1}
15	1	14	104	544	2244	7752	23256	62016	14922^{1}	32687^{1}
16	1	15	119	663	2907	10659	33915	95931	24515^{1}	57203^{1}
17	1	16	135	798	3705	14364	48279	14421^{1}	38936^{1}	96140^{1}
18	1	17	152	950	4655	19019	67298	21150^{1}	60087^{1}	15622^{2}
19	1	18	170	1120	5775	24794	92092	30360^{1}	90447^{1}	24667^{2}
20	1	19	189	1309	7084	31878	12397^{1}	42757^{1}	13320^{2}	37987^{2}

(1) Donné pour les valeurs $i \leqslant 20$ $j \leqslant 9$
(avec 5 chiffres exacts, le nombre de chiffres omis étant noté en exposant; un tableau plus développé est donné dans la note citée en référence).

Nous avons vu que les éléments de ce tableau étaient susceptibles d'une définition explicite simple

$$J \geqslant i \qquad a_{iJ} = \Gamma_{iJ} - \Gamma_{i+1,\, J+1}$$

$$j < i \qquad a_{ij} = \Gamma_{ij} - \Gamma_{i+1,\, j-1}$$

On déduit immédiatement de la relation de récurrence liant les a_{ij} la propriété suivante :

La somme des j premiers éléments d'une ligne i est le jème élément (indicé j - 1 sur le tableau) de la ligne i + 1.

Une relation équivalente existe entre les colonnes des demi tableaux constituée par :

- la diagonale principale et les surdiagonales;

- les sous-diagonales 2 et suivantes.

Notons $d_{kj} = a_{k+j,\, j}$
(un élément est défini par le rang k de sa sous-diagonale et celui j de sa colonne).

On a la relation générale de composition

$$\{ d_{kx} \} * \{ d_{k'x} \} = d_{k+k',j}$$

$$x \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad j$$

(le signe * désigne l'opération de composition des deux ensembles). Exemple :

$$\left.\begin{matrix} k = 3 \\ k' = 2 \\ j = 3 \end{matrix}\right\} \quad 28 + 2 \times 9 + 3 \times 5 + 14 = 75$$

Nous avons vu précédemment les raisons de cette propriété dont une démonstration purement formelle est donné par ailleurs dans la note citée en référence.

L'utilisation de ce tableau pour le calcul de $P_n(h, k)$ est simple, elle résulte d'ailleurs directement des considérations déjà développées.

L'état initial h est transformé en k au bout de i intervalles par les distributions :

(i, J, k)

$(i, J, k - 1)$ où $h + J = i + k$

$(i, J, 0)$ si $k < h$ ou $(i, J, k - h + 1)$ si $k \geqslant h$

Il y a donc lieu de sommer l'élément $a_{i+k, j-k}$ et les h - 1 ou k suivant sa diagonale Δ (perpendiculaire à la diagonale principale).

Il est à noter que le dernier élément a pour indices

de ligne	de colonne		
$i + k - (h - 1) = J + 1$	$j - k + (h - 1) = i - 1$	si	$k \geqslant h$
$(i + k) - k = i$	$(j - k) + k = J$	si	$k < h$

d'où la règle pratique suivante, plus simple à appliquer :

> Ajouter à celui des éléments a_{ij} ou $a_{j+1, i-1}$ situés en-dessous de la diagonale principale les éléments suivants à gauche sur sa sous-diagonale Δ, jusqu'à et y compris l'élément de la ligne $i + k = J + h$. (10)

Si l'on a un grand nombre d'éléments à calculer, il est cependant plus rapide de calculer leur tableau en utilisant la relation générale de récurrence.

Si $i \leqslant h$ toute distribution des J entrées dans l'intervalle considéré aboutit à l'état final k, il y a identité entre les [i, J] et les $\Gamma_{i,j}$.

Si $i > h$ le développement des termes est restreint par la condition limite :

$[i, J] = 0$ pour $i > J + h$ (sinon k serait négatif)

La construction du tableau des [i, J] est ainsi la suivante :

Exemple : h = 5.

i \ J	0	1	2	3	4	......
5	1	5	15	35	70	......
6	0	5	20	55	125	......
7		0	20	75	200	......
8			0	75	275	......
9				0	275	......

N.B. - k constant : éléments de la diagonale k. Exemple : k = 2; 15, 55, 200,...

(On note que les éléments de la diagonale 0 doivent être trouvés identiques aux d_5).

IV - DEVELOPPEMENT DE LA THEORIE : ETUDE DU CAS GENERAL OU UN NIVEAU INTERMEDIAIRE MAXIMUM EST IMPOSE

Soit à dénombrer les distributions enchaînées ayant les caractéristiques suivantes :

Etats initial h

Etats intermédiaires $y < M$ ($M = h + h'$: somme des avoirs initiaux des joueurs)

J arrivées dans i intervalles $i - h < J \leqslant i - h + M$

y, état final à l'instant (i - 0) est donné par : $h + J = i - 1 + y$;

i et J étant pris comme variables indépendantes pour h donné, on s'assure que la relation générale de récurrence reste vérifiée avec les conditions limites suivantes :

Eléments nuls pour :

$h + J < i$ (absorption au niveau 0)

et

$h + J \geqslant i + M - 1$ (absorption au niveau M)

Par ailleurs, pour $J < M - h$, toute distribution enchaînée depuis l'état initial h satisfait à la restriction maximale.

La première colonne est donc constituée d'éléments que nous avons appris à obtenir.

Exemple : h = 2 M = 5

J / i	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0						
2	3	3	0					
3	5	8	8	0				
4	5	13	21	21	0			
5	0	13	34	55	55	0		
6		0	34	89	144	144	0	
7			0	89	233	377	377	0
8				0	233	610	987	987
9					0	610	1597	2584
10						0	1597	4161
11							0	4161

N.B. - Les éléments de la diagonale 1 correspondent à l'état final 4 à l'instant i - 0, ceux de la diagonale 2 à l'état final 3, de la diagonale 3 à l'état final 2, de la diagonale 4 à l'état final 1 (ou 0).

Formes explicites

L'analyse précise des conditions de construction de ce tableau permet d'obtenir des définitions explicites des éléments précédents :

$$\underset{y<M}{h[i,\ J]} = \sum_{r:0,1..} \{h[i - rM, J + rM] - h[i - rM - (M - k),\ J + rM + (M - k)]\}$$

Le second membre peut alors être exprimé en fonction des éléments Γ grâce à la relation (8).

L'élément Γ_{ij} étant pris pour élément d'origine et numéroté (0), on compte, à droite sur sa diagonale Δ les éléments réguliers de M en M à partir des éléments suivants :

en (+) (0), (h + M - k)

en (-) (h), (M - k)

Exemple :

$$\underset{y<5}{2[7,\ 7]} = \Gamma_{7,7} + \Gamma_{2,12} + \Gamma_{3,11} - \Gamma_{5,9} - \Gamma_{5,9}$$

$$= 1.716 + 13 + 78 - 715 - 715 = 377$$

(On notera que : $2+7=(7-1)+k$, d'où : $k = 3$, $M - k = 2$ et $h + M - k = 4$).

Pour obtenir une formule explicite en fonction des a_{ij} il y a lieu de se rappeler que :

$$a_{ij} = \underset{(\text{si } j \leqslant i)}{\Gamma_{ij} - \Gamma_{i+1,\,j-1}} \quad \text{ou} \quad \underset{(\text{si } J \geqslant i)}{\Gamma_{ij} - \Gamma_{i-1,\,j+1}}$$

On obtient des résultats particulièrement simples en ce qui concerne les éléments extrêmes, c'est-à-dire :

1/ k = 1 à l'instant (i - 0) (ruine du joueur)

2/ k = M - 1 à l'instant (i - 0) (succès du joueur) (rappelons que les nombres de distributions amenant le système à l'état M pour la première fois ou à l'état plafond M - 1, non nécessairement pour la première fois, sont égaux).

<u>1er cas : ruine du joueur</u>

L'élément a_{ij} est pris pour base (élément 0), on compte <u>sur sa diagonale Δ à gauche</u> :

$$\left.\begin{array}{l}\text{en (+) les éléments d'ordre M} \\ \text{en (-) les éléments M - h et suivants d'ordre M.}\end{array}\right\} \quad (12)$$

Exemple : $2\,[10, 8]_{y<5} = 4862 + 544 - (3808 + 1) = 1597.$

<u>2ème cas : succès du joueur</u>

L'élément $a_{j+1,\, i-1}$ est pris pour base (élément 0), on compte sur sa diagonale Δ à gauche :

$$\left.\begin{array}{l}\text{en (+) les éléments réguliers d'ordre M} \\ \text{en (-) les éléments h et suivants d'ordre M.}\end{array}\right\} \quad (13)$$

Exemple : $2\,[8, 9]_{y<5} = 3432 + 104 - (2548 + 1) = 987$

CONCLUSION

Comme on peut s'en assurer, ces divers calculs (construction des tableaux ou éléments particuliers) sont simples et rapides. Pour les valeurs élevées de i et J, le recours à des expressions asymptotiques est préférable. La littérature consacrée au problème actuel propose à cet égard diverses formules valables.

On sait que l'intérêt essentiel du problème "la ruine de joueur" est son caractère connexe avec l'analyse séquentielle à laquelle il fournit un support de base.

Or la théorie générale, telle qu'elle a été développée par Wald, nécessite des hypothèses plus larges que celles admises ici : l'état du système n'évolue plus nécessairement par sauts d'amplitude ±1, le gain du joueur à chaque coup pouvant être réglé par une distribution arbitraire.

L'extension au cas général des méthodes précédentes soulève de très sérieuses difficultés. Il est indispensable d'introduire d'autres notions. Les recherches entreprises par l'auteur dans ce sens n'ont encore pu aboutir à une solution générale satisfaisante. Divers résultats partiels nouveaux d'intérêt pratique ont pu toutefois être obtenus ils feront l'objet d'un compte-rendu ultérieur.