REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

H. PIN

Surveillance d'un atelier de machines par rondes permanentes

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 4 (1960), p. 83-96
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_4_83_0>

SURVEILLANCE D'UN ATELIER DE MACHINES PAR RONDES PERMANENTES

par H. PIN

I - ETUDE THEORIQUE

Le problème

Dans l'industrie des textiles artificiels, les ateliers comprennent un grand nombre (5 à 10 000) machines individuelles appelées "broches", chacune dévidant un fil. Les broches sont groupées en "métiers" de 100 à 300 broches selon les ateliers.

Des surveillants "rattacheurs" circulent en permanence parmi les métiers pour réparer les casses de fil. Ils effectuent des rondes permanentes en suivant toujours le même circuit.

Selon les étapes de la fabrication quand le fil d'une broche casse, ou bien la matière constituant le fil continue de s'écouler et se perd, ou bien la broche s'arrête mais le fil qui ne se dévide plus restera à la fin de l'opération et sera vendu en déchet au lieu de fil ce qui entraîne encore une perte.

Le problème de la surveillance par rondes est différent du problème classique de surveillance de plusieurs machines par un ouvrier. En effet, quand une casse de fil se produit rien n'en averti le rattacheur qui ne la verra que lorsqu'il passera devant la broche, et qui donc, ne peut pas la réparer immédiatement.

Si on confie un grand nombre n de broches au rattacheur il met plus de temps pour repasser devant la même broche. Une casse attendant plus longtemps donnera un poids plus grand de déchet.

Si on confie moins de broches il y aura moins de déchet mais les rattacheurs étant plus nombreux la dépense de salaire sera plus élevée.

On peut rechercher d'abord le nombre optimum n de broches à confier à un rattacheur, ce qui permet de trouver le nombre optimum de rattacheurs.

Le circuit d'un rattacheur comprend n broches. Il y a en moyenne, en permanence, M broches arrêtées par casses qui attendent le passage du rattacheur. Si bien que le circuit fonctionne en réalité avec n - M broches.

On peut prendre comme unité de temps, le temps nécessaire pour dévider un gramme de fil ce qui permet d'obtenir les mêmes valeurs pour les temps et les poids.

Si P est la perte en francs sur 1 g de fil vendu en déchet au lieu de fil, le circuit perd M P francs par unité de temps. Si le salaire et coût du rattacheur est S francs par unité de temps, le coût par broche et par unité est $\frac{MP + S}{n}$ à minimiser en faisant varier n.

Le problème se ramène à calculer M qui n'est pas connu.

Il faut remarquer, pour situer le problème, que si l'on connait le nombre a de casses par broches et par unité de temps, avec n broches on aura an casses pour tout le circuit par unité de temps. Mais au bout du temps t on n'aura pas ant casses. En effet dès les premiers instants certaines broches peuvent s'arrêter pour casse et l'effectif ne sera plus n. Il est nécessaire de faire intervenir la loi d'arrivée des casses dans le temps.

Le problème se résoud assez facilement si l'on envisage au préalable, le cas où le temps de rattache est nul.

Loi d'arrivée des casses.

Une casse est un accident rare. L'arrivée d'une casse est indépendante de l'époque où l'on se trouve et de ce qui s'est passé précédemment et peut survenir à tout moment sur toute broche qui fonctionne.

L'intervalle de temps séparant l'arrivée de deux casses se présente donc a priori en distribution exponentielle, ce qu'on peut d'ailleurs vérifier en pratique.

Une broche a en moyenne a casses par unité de temps (pendant qu'elle fonctionne) a est très petit. La probabilité pour une broche que la prochaine casse arrive au bout du temps t dans le court intervalle compris entre t et t + dt est alors selon la loi exponentielle :

$$a e^{-at} dt$$

Cas du temps de rattache nul

Le circuit confié au rattacheur comprend n broches. Il peut donc au maximum avoir n casses et à ce moment la fréquence d'arrivée des casses est nulle.

Supposons qu'il y ait n casses et que le temps de réparation soit nul : il suffit de toucher une broche pour qu'elle soit réparée. Le rattacheur commence son parcours au temps 0. Il passe sans s'arrêter devant les broches avec un temps de déplacement de b unités de temps par broche. A mesure qu'il passe devant les broches, elles se remettent en marche. Le nombre total des broches arrêtées, qui étant n, diminue. Mais aussi la fréquence d'arrivée des casses, qui était nulle, augmente.

Quand le rattacheur a terminé son circuit, c'est-à-dire au temps nb il a délivré toutes les casses, mais d'autres se sont reformées derrière lui formant un nouveau lot de broches arrêtées.

On atteint à ce moment un point d'équilibre. En effet, si à la tournée qu'il vient de faire, le rattacheur avait rencontré certaines broches en marche, le résultat aurait été le même, il aurait toujours laissé derrière lui des broches en marche.

Nombre moyen de broches arrêtées (temps de réparation nul).

La situation du circuit est alors la suivante : La première broche que le rattacheur rencontre n'a pas été visitée depuis le temps nb. La probabilité qu'elle soit arrêtée est la probabilité qu'il intervienne une casse entre le temps 0 et nb soit :

$$\int_0^{nb} ae^{-at}\,dt = \Big| -e^{-at} \Big|_0^{nb} = 1 - e^{-anb}$$

La probabilité que la broche suivante soit maintenant arrêtée est de même puisqu'elle n'a pas été visitée depuis le temps (n - 1) b

$$1 - e^{-ab(n-1)}$$

Il en va de même pour les autres broches. Comme il n'y a que 2 éventualités, arrêt ou marche (soit 1 et 0), l'espérance mathématique du nombre de broches arrêtées est :

$$E[q] = 1 - e^{-abn} + 1 - e^{-ab(n-1)} + \dots\dots\dots\dots + 1 - e^{-ab}$$

$$= n - \sum_{k=1}^{n} e^{-kab}$$

avec $0 < e^{-kab} < 1$

En utilisant la série classique $\sum_0^{\infty} u^k = \frac{1}{1-u}$ et donc $\sum_1^{n} u^k = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} - 1$ on a :

$$E[q] = n - \left(\frac{1 - e^{-ab(n+1)}}{1 - e^{-ab}} - 1\right)$$

Il faut remarquer que a et b étant très petits ab est très petit. On a alors :

$$e^{-ab} = 1 - ab + \frac{(ab)^2}{2!} - \frac{(ab)^3}{3!} + - + -$$

et en se limitant, par exemple, au premier ordre :

$$1 - e^{-ab} = 1 - (1 - ab) = ab$$

Nombre moyen de broches arrêtées avec un temps v de stationnement pour réparations

Le rattacheur vient de finir son circuit (en un point quelconque d'ailleurs). La probabilité que la première broche qu'il rencontre soit arrêtée est $1 - e^{-abn}$ parce qu'elle n'a pas été visitée depuis le temps nb.

Supposons qu'avant de regarder cette première broche le rattacheur stationne ou abandonne son circuit pendant le temps v. La probabilité à l'expiration de ce temps v que cette première broche soit arrêtée est la probabilité qu'une casse soit intervenue entre le temps 0 et nb + v soit :

$$\int_0^{nb+v} ae^{-at}\,dt = 1 - e^{-a(nb+v)}$$

Il en est de même si ce temps v a été passé à un moment quelconque dans le cours du circuit, ou même si v est la somme de plusieurs stationnements pour réparations disséminés dans le cours du circuit, la première broche dans tous les cas n'aura pas été visitée depuis le temps nb + v.

De même la probabilité que la broche suivante soit à ce moment arrêtée est :

$$1 - e^{-ab(n-1)-av} = 1 - e^{-ab(n-1)} \quad e^{-av}$$

Et l'espérance mathématique des broches arrêtées sera :

$$E(q) = 1 - e^{-abn} e^{-av} + 1 - e^{-ab(n-1)} e^{-av} + \qquad + 1 - e^{-ab} \, e^{-av}$$

$$= n - e^{-av} \sum_{1}^{n} e^{-kab}$$

$$E(q) = n - e^{-av} \left(\frac{1 - e^{-ab(n+1)}}{1 - e^{-ab}} - 1 \right)$$

<u>Nombre moyen de casses rencontrées par le rattacheur.</u>

Le rattacheur dans sa tournée s'est arrêtée pendant v unités de temps pour les rattaches. Il recommence un nouveau circuit. La première broche qu'il rencontre n'a pas été visitée depuis le temps nb + v et la probabilité qu'elle soit arrêtée est :

$$1 - e^{-a(bn+v)}$$

La broche qu'il rencontre ensuite est dans la même situation, c'est-à-dire qu'il ne l'aura pas visitée depuis nb + v quand il la visitera.

L'espérance mathématique du nombre de casses rencontrées par le rattacheur est :

$$E(s) = n(1 - e^{-a(bn+v)})$$

<u>Temps total moyen v de stationnement pour rattache.</u>

Chaque broche demande le temps moyen r de réparation. On a donc comme stationnement moyen total v puisqu'il y a E (s) casses :

$$v = r\,E(s)$$

$$v = rn - rn\, e^{-a(bn+v)}$$

et en multipliant par $\dfrac{e^{a(nb+v)}}{rn}$

$$\frac{v}{rn} e^{a(bn+v)} = e^{a(bn+v)} - 1$$

$$1 = e^{a(bn+v)} \left(1 - \frac{v}{rn} \right)$$

c'est-à-dire :

$$e^{0} = e^{a(bn+v)} e^{\operatorname{Log}\left(1 - \frac{v}{rn}\right)} = e^{a(bn+v) + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{v}{rn}\right)}$$

$$0 = a(bn+v) + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{v}{rn}\right) = abn + av + \operatorname{Log}\left(1 - \frac{v}{rn}\right)$$

Le temps de réparation des broches arrêtées est v. Si toutes les broches sont arrêtées ce temps est rn. Donc $\frac{v}{rn}$ est la proportion des broches arrêtées, $\frac{v}{rn}$ est inférieur à 1 et même très petit. On a alors :

$$\text{Log}\left(1 - \frac{v}{rn}\right) = -\frac{v}{rn} - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{rn}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{v}{rn}\right)^3 - - -$$

C'est-à-dire en se limitant au 1er ordre :

$$O = abn + av - \frac{v}{rn}$$

$$v\left(\frac{1}{rn} - a\right) = abn$$

$$v = \frac{abn}{\frac{1}{rn} - a} = bn\,\frac{arn}{1 - arn}$$

Le temps de rattache v est ainsi la proportion $\frac{arn}{1 - arn}$ du temps du parcours bn.

Les résultats précédents deviennent alors :

<u>Nombre moyen de broches arrêtées.</u>

$$E(q) = n - \left(e^{-abn\frac{arn}{1-arn}}\right)\left(\frac{1 - e^{-ab(n+1)}}{1 - e^{-ab}} - 1\right)$$

qui permet de résoudre le problème.

<u>Nombre moyen de casses rencontrées par le rattacheur.</u>

$$E(s) = n\left(1 - e^{-\frac{abn}{1-arn}}\right)$$

<u>Proportion du temps de marche à plein rendement.</u>

Le rattacheur vient de finir son circuit (en un point quelconque). La probabilité que la 1ère broche qu'il rencontre marche est :

$$1 - (1 - e^{-a(bn+v)}) \doteq e^{-abn}\,e^{-av}$$

La probabilité qu'à ce moment la broche suivante marche est :

$$e^{-ab(n-1)}\,e^{-av}$$

La probabilité que ces 2 broches marchent toutes deux est :

$$(e^{-abn}\,e^{-av})(e^{-ab(n-1)}\,e^{-av}) = e^{-2av}\,e^{-ab(n+n-1)}$$

Et de même la probabilité que toutes les broches du circuit marchent est :

$$P[o] = e^{-nav} \, e^{-ab(1+2+ \quad +n)} = e^{-nav} \, e^{-ab\left(\frac{n+n^2}{2}\right)}$$

$$P[o] = e^{-abn^2 \frac{arn}{1-arn}} \, e^{-ab\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)}$$

C'est la probabilité que le circuit soit dans l'état [o] c'est-à-dire que toutes les broches marchent.

Le circuit marche donc à plein rendement pendant la proportion P[o] du temps. Ce renseignement est comme E(q) notamment intéressant quand il y a de grandes charges de travail pour les machines.

Contrôle des casses.

Le rattacheur fait son parcours. La probabilité qu'une broche soit arrêtée quand il la rencontre est :

$$p = 1 - e^{-\frac{abn}{1-arn}}$$

Il peut dans son parcours rencontrer au minimum 0 et au maximum n broches arrêtées. Le nombre s de casses rencontrées dans le circuit suit alors une loi binomiale de moyenne np éventuellement assimilable puisque n est grand à la loi normale ou de Poisson selon la valeur de np. On peut donc surveiller, au besoin par la carte de contrôle classique, le nombre de casses trouvées par le rattacheur durant son parcours, pour vérifier si le taux a des casses reste stable. Si a augmente il faut diminuer le circuit du rattacheur pour garder l'économie optimum.

Le calcul de p a été effectué à partir de la moyenne r des temps de rattache estimée sur un grand nombre d'observations et proche de la vraie moyenne. Alors qu'à chaque parcours avec en moyenne np casses le temps moyen de rattache $\bar{\omega}$ sera la moyenne de np observations environ, c'est-à-dire une variable aléatoire.

La loi de répartition des temps de rattache w est exponentielle ou log-normale selon les cas. On ne peut donc pas attendre, np n'étant pas très grand, que la loi de répartition de $\bar{\omega}$ soit normale. Mais on peut quand même par un changement de variable obtenir la normalité et calculer les limites de confiance de $\bar{\omega}$ à 95 chances sur 100. On utilisera ces valeurs limites maximum et minimum respectivement pour le calcul des limites supérieure et inférieure de p.

Nombre moyen de casses rencontrées par le contremaître.

Le contremaître part au point où se trouve le rattacheur il effectue le parcours sans s'arrêter dans le temps nb.

La première broche qu'il rencontre n'a pas été vue depuis nb + v.

Le rattacheur met le temps nb + v pour parcourir le circuit soit en moyenne le temps $b + \frac{v}{n}$ par broche. Le contremaître met le temps b soit $\frac{v}{n}$ de moins par broche.

La deuxième broche qu'il rencontrera n'a pas été vue depuis le temps :

$$nb + v - \frac{v}{n} = nb + v\,\frac{(n-1)}{n}$$

La troisième depuis le temps nb + v $\frac{(n-2)}{n}$.

La dernière depuis le temps nb + v $\left(\frac{n-(n-1)}{n}\right) = nb + \frac{v}{n}$.

L'espérance mathématique des casses rencontrées est donc :

$$E(z) = 1 - e^{-a(bn+v)} + 1 - e^{-a(bn+v\left(\frac{n-1}{n}\right)} + \quad + 1 - e^{-a\left(bn+\frac{v}{n}\right)}$$

$$= n - e^{-abn}\left[e^{-\frac{av}{n}(n)} + e^{-\frac{av}{n}(n-1)} \qquad + e^{-\frac{av}{n}}\right]$$

$$= n - e^{-abn}\left[\frac{1 - e^{-\frac{av}{n}(n+1)}}{1 - e^{-\frac{av}{n}}} - 1\right]$$

$$E(z) = n - e^{-abn}\left[\frac{1 - e^{-ab\frac{arn}{1-arn}(n+1)}}{1 - e^{-ab\frac{arn}{1-arn}}} - 1\right]$$

On peut aussi sur cette valeur surveiller la stabilité du taux a des casses.

II - CALCULS PRATIQUES

Au moment où cette étude est effectuée les paramètres sont déjà connus. Avec la minute comme unité de temps b = 0,003 et r = 0,9. La distribution des temps de rattaches est le plus souvent log-normale. Des études antérieures ont montré que les casses suivent une loi de Poisson. Mais le taux des casses peut varier sur une longue période (semaines) selon la qualité des fabrications ; faute de formule mathématique sûre, les valeurs connues de a sont considérées comme douteuses, variant de 0,01 à 0,001.

Nombre moyen E(s) de casses rencontrées par le rattacheur.

On a (page 87) : $E(s) = n\left(1 - e^{-\frac{abn}{1-arn}}\right)$

En choisissant la minute comme unité de temps, a et b, représentent en pratique chacun des millièmes, n représente des milliers, r est légèrement inférieur à I.

Le calcul s'effectue aisément par la formule :

$$0,43429\,(-u) = \log\left(e^{-u}\right)$$

où log est le logarithme décimal.

Mais l'exposant étant très petit, on peut aussi utiliser le développement en série. En se limitant au 1er ordre (le 2ème ordre apportant en pratique une faible différence) on a (page 85) :

$$1 - e^{-\frac{abn}{1-arn}} = \frac{abn}{1-arn} \qquad \text{et donc} \qquad E(s) = \frac{abn^2}{1-arn}$$

Or on peut faire l'évaluation approximative suivante : On a pour tout le circuit an casses par unité de temps. Le parcours dure le temps nb + rE(s). Le nombre total de casses dans le temps de parcours est alors :

$$E(s) = an(nb + rE(s)) = abn^2 + arnE(s)$$

$$E(s) = \frac{abn^2}{1 - arn}$$

Ainsi le calcul est corroboré par l'évaluation approximative.

<u>Nombre moyen E(q) de broches arrêtées (temps de rattache nul).</u>

On a (page 85) : $$E(q) = n - \left(\frac{1 - e^{-ab(n+1)}}{1 - e^{-ab}} - 1\right)$$

Le calcul s'effectue facilement avec les logarithmes. Les exposants étant petits, on peut utiliser aussi la série. En se limitant au 1er ordre, on obtient E(q) = 0 quelque soit n, ce qui est impossible. En se limitant au 2ème ordre on a :

$$E(q) = n - \left(\frac{ab(n + 1) - \frac{(ab)^2}{2}(n + 1)^2}{ab - \frac{(ab)^2}{2}} - 1\right)$$

ce qui donne :

$$E(q) = n - n\left(\frac{1 - \frac{ab}{2}(n + 2)}{1 - \frac{ab}{2}}\right)$$

et enfin :

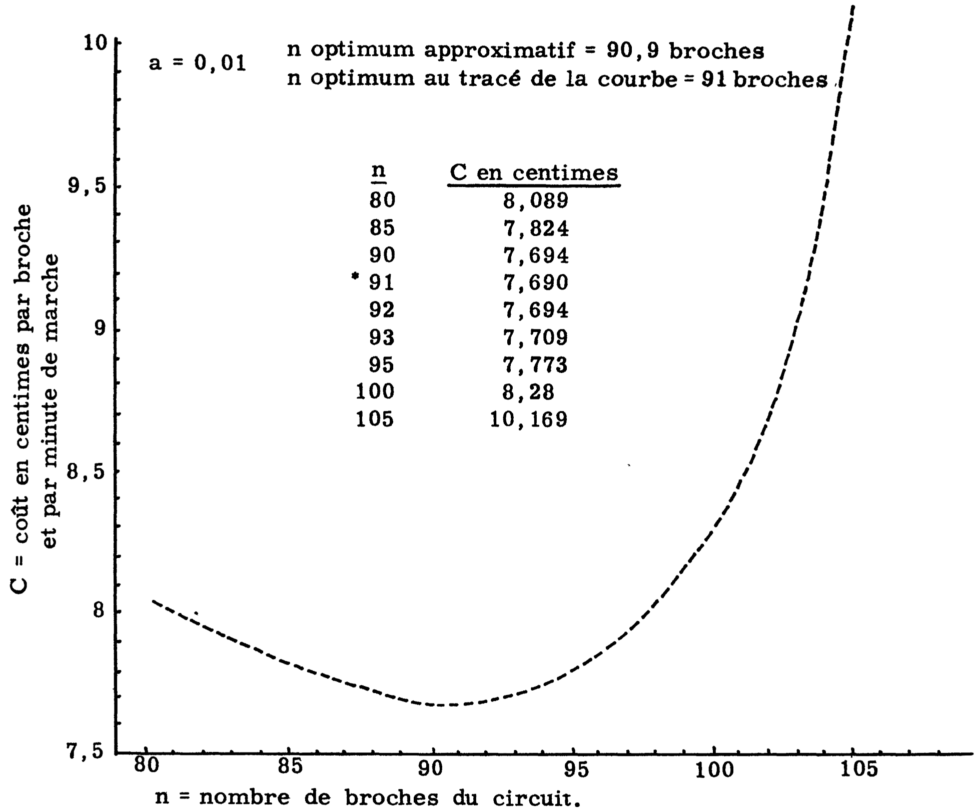
$$E(q) = \frac{ab(n^2 + n)}{2 - ab} = \frac{abn^2}{2 - ab} + \frac{abn}{2 - ab}$$

2 - ab est très voisin de 2 et abn est très petit si bien qu'en pratique E(q) est voisin de $\frac{abn^2}{2}$

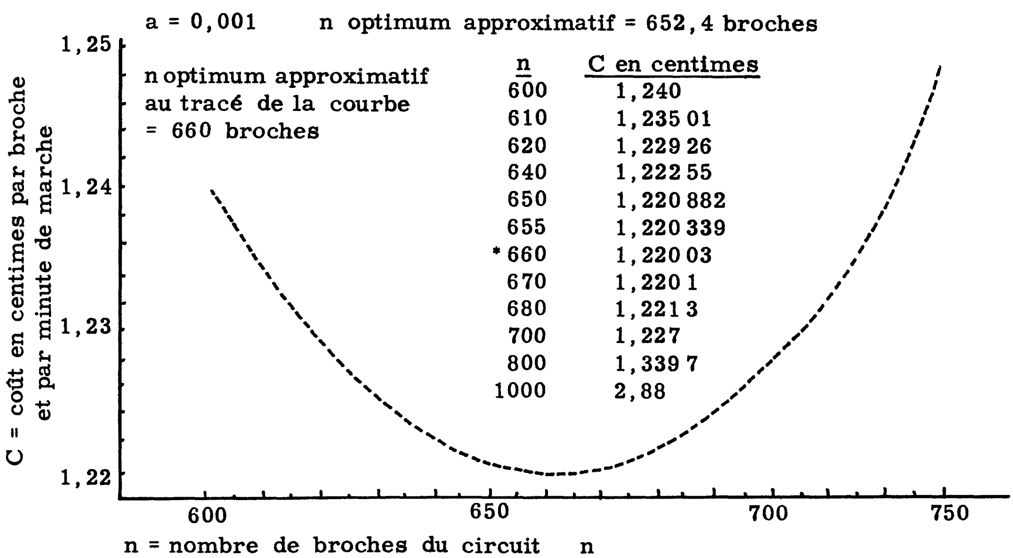
On peut faire encore l'évaluation approximative suivante : Le rattacheur vient de terminer son circuit. La dernière broche qu'il vient de voir n'a pas été visitée depuis le temps b, la précédente depuis 2 b et la première depuis nb. En moyenne les broches n'ont pas été visitées depuis le temps de parcours du demi circuit, soit depuis le temps $\frac{nb}{2}$. On a donc pour tout le circuit pendant ce temps : $an.\frac{nb}{2} = \frac{abn^2}{2}$ casses. On retrouve le résultat précédent.

<u>Nombre moyen E(q) de broches arrêtées avec temps moyen r de rattache.</u>

On a (page **87**) : $$E(q) = n - \left[e^{-abn\frac{arn}{1-arn}}\left(\frac{1 - e^{-ab(n+1)}}{1 - e^{-ab}} - 1\right)\right]$$



n	C en centimes
80	8,089
85	7,824
90	7,694
* 91	7,690
92	7,694
93	7,709
95	7,773
100	8,28
105	10,169



n	C en centimes
600	1,240
610	1,235 01
620	1,229 26
640	1,222 55
650	1,220 882
655	1,220 339
* 660	1,220 03
670	1,220 1
680	1,221 3
700	1,227
800	1,339 7
1000	2,88

EXEMPLES - Coût en fonction du nombre n de broches du circuit.

L'unité de temps est la minute. P est calculé pour la minute.

a = nombre moyen de casses par broche et par minute = 0,01 et 0,001

b = temps de circulation entre deux broches voisines = 0,03 minute

r = temps moyen d'une réparation = 0,9 minute

P = perte sur le fil dévidé pendant une minute, vendu en déchet au lieu de fil = 80 centimes

S = Salaire du "rattacheur" pour une minute = 600 centimes

Le calcul s'effectue avec les logarithmes. En utilisant la série, on peut poser en se limitant au 1er ordre :

$$e^{-\frac{a^2brn^2}{1-arn}} = 1 - \frac{a^2brn^2}{1-arn}$$

En effectuant comme précédemment on obtient :

$$E(q) = n - \left[n \left(\frac{1 - \frac{ab}{2}(n+2)}{1 - \frac{ab}{2}} \right) \left(1 - \frac{a^2brn^2}{1-arn} \right) \right]$$

$$E(q) = \frac{abn^2}{2-ab} + \frac{abn}{2-ab} + abn^2 \frac{arn}{1-arn} \left(\frac{2-ab(n+2)}{2-ab} \right)$$

$\frac{2 - ab\,(n+2)}{2-ab}$ est très voisin de I, si bien que E(q) est voisin de :

$$\frac{abn^2}{2} + abn^2 \frac{arn}{1-arn} = \frac{abn^2}{2} \left(\frac{1+arn}{1-arn} \right) = \frac{abn^2}{1-arn} - \frac{abn^2}{2}$$

Le nombre moyen de broches arrêtées est donc, en évaluation approximative, le nombre de casses rencontrées par le rattacheur, moins le nombre de casses survenues à tout le circuit pendant le temps de parcours sans arrêt du demi circuit. C'est en effet le nombre de casses rencontrées quand le parcours est idéalement effectué dans un temps nul. C'est aussi le nombre de casses survenues pendant le temps $\frac{bn}{2}$ de parcours du demi circuit, plus le temps bn $\frac{arn.}{1-arn}$ des réparations. Le rattacheur laisse en effet constamment derrière lui un circuit complet.

<u>Nombre optimum n de broches rendant le coût minimum.</u>

Le coût par broche et par unité de temps (page 84) avec M = E(q) est :

$$C = \frac{PE(q)}{n} + \frac{s}{n}$$

La figure montre, sur deux exemples, que ce coût varie peu au voisinage du minimum. On peut donc pour satisfaire aux horaires du travail, constituer sans inconvénient pratique, des circuits avec un nombre de broches légèrement différent de l'optimum. On peut donc aussi se contenter de calculer une valeur optimum approximative de n.

En évaluation approximative avec $E(q) = \frac{abn^2}{1-arn} - \frac{abn^2}{2}$ on a :

$$C = \frac{P\,abn}{1-arn} - \frac{P\,abn}{2} + \frac{s}{n}$$

n étant grand peut-être considéré comme continu. La dérivée est alors :

$$\frac{dC}{dn} = \frac{Pab}{(1-arn)^2} - \frac{Pab}{2} - \frac{S}{n^2}$$

A mesure que n, partant de zéro, croît le premier terme croît, le dernier décroît. Tant que n est petit la dérivée est négative et le coût décroissant. Le coût est minimum pour la valeur de n annulant cette dérivée.

Mais on est conduit, avec cette dérivée, à une équation du 4ème degré qui demande des calculs compliqués pour obtenir la valeur optimum de n. Or le terme constant $\frac{Pab}{2}$, très petit, peut-être négligé sans changer notablement le résultat, n étant très grand. En supprimant ce terme on substitue E(s) à E(q).

Le coût minimum approximatif est alors obtenu avec la dérivée nulle soit :

$$\frac{Pab}{(1 - arn)^2} = \frac{S}{n^2}$$

$$n = \frac{Sar - \sqrt{PSab}}{Sa^2 r^2 - Pab}$$

(Il n'y a qu'une valeur n convenable, le signe + devant le radical donne une valeur de n rendant 1 - arn négatif).

La figure donne sur deux exemples la valeur optimum approximative de n calculée par cette formule.

Estimation du taux a de casses à partir de E(s).

Il est coûteux, a étant petit, de l'évaluer directement en surveillant quelques broches pendant un temps très long. On peut donc chercher une estimation plus commode à partir, par exemple, du nombre E(s) de casses rencontrées par le rattacheur.

Par ailleurs le taux a de casses est susceptible de varier et nécessite une surveillance pour permettre de modifier l'importance des circuits.

Cette estimation sera faite sur un grand nombre de parcours. Si l'on connaît le temps moyen T de parcours rattaches comprises on a :

$$E(s) = n(1 - e^{-aT})$$

Le calcul par logarithme est long. En se limitant au 1er ordre, on a :

$$1 - e^{-aT} = aT$$

et donc

$$E(s) = anT$$

d'où

$$a = \frac{E(s)}{nT}$$

On remplacera E(s) par le nombre moyen Z de casses effectivement rencontrées.

Si l'on ne connaît pas T on a de même avec le 1er ordre :

$$E(s) = \frac{abn^2}{1 - arn}$$

$$a = \frac{Z}{bn^2 + Zrn}$$

où Z remplace E(s).

Il serait cependant nécessaire de confirmer par l'observation directe de quelques broches que les casses suivent bien une distribution exponentielle.

Exemple de calcul de E(s).

Le nombre moyen de casse rencontrées par le rattacheur est :

$$E(s) = n\left(1 - e^{-\frac{abn}{1-arn}}\right)$$

avec $n = 1\,000$ $a = 0{,}001$ $b = 0{,}003$ $r = 0{,}9$ $abn = 0{,}003$

$arn = 0{,}9$ $1 - arn = 0{,}1$

on a :

$$\frac{abn}{1 - arn} = 0{,}03 = u$$

Calcul approximatif :

$$n\frac{abn}{1 - arn} = 1\,000 \times 0{,}03 = 30 \text{ casses en moyenne.}$$

Calcul exact :

$$(-u) \times 0{,}434 = -0{,}03 \times 0{,}434$$

$$-0{,}03 \times 0{,}434 = -0{,}01302 = \bar{1}{,}98698 = \log 0{,}97046$$

0,97046 est la proportion des broches trouvées en marche.

1 - 0,97046 = 0,0295 = proportions des broches arrêtées.

0,0295 n = 29,5 casses en moyenne.

Autre exemple n = 600 E(s) = 2,348 environ.

Exemple de calcul de E(q).

Le calcul exact, très long, demande bien souvent, le logarithme étant très proche de 1, l'utilisation de la série. Or le calcul approximatif donne pratiquement un résultat très voisin du calcul exact.

Exemple $a = 0{,}001$ $b = 0{,}003$ $r = 0{,}9$ $n = 600$

Le calcul exact donne :

$$E(q) = 1{,}811$$

Le calcul approché donne :

$$E(q) = \frac{abn^2}{2}\left(\frac{1 + arn}{1 - arn}\right) = 0,54 \times 3,348 = 1,808$$

Or $E(s) = 2,35$

<u>Calcul du coût C par broche et par unité de temps.</u>

Il est intéressant de connaître le coût aux environs du minimum approximatif.

On peut dresser le tableau suivant :

$$C = A + \frac{S}{n} \quad \text{avec} \quad A = \frac{Pabn}{2}\left(\frac{1 + arn}{1 - arn}\right)$$

Exemple $a = 0,001$ $b = 0,003$ $r = 0,9$ $S = 600$ centimes

$P = 80$ centimes $\frac{Pab}{2} = 0,000.12$ $ar = 0,000.9$

n	$\frac{Pabn}{2}$	arn	1 +arn	1 - arn	$\frac{1+arn}{1-arn}$	A	$\frac{s}{n}$	C
650	0,078	0,585	1,585	0,415	3,819	0,297.882	0,923	1,220.88
660	0,0792		1,594	0,406	3,926		0,909	1,220.03
670	0,0804		1,603	0,397	4,0377		0,8955	1,2201

RESUME

L'exposé du problème est donné pages 83 et 84. Les notations sont :

a = nombre moyen de casses par broche et par unité de temps (de marche)

b = temps de déplacement ininterrompu du rattacheur d'une broche à la suivante.

n = nombre de broches constituant le circuit du rattacheur.

r = temps moyen d'une rattache.

P = perte en francs sur le fil dévidé pendant une unité de temps et vendu en déchet au lieu de fil.

S = salaire et charge, en francs, du rattacheur pendant une unité de temps.

L'unité de temps doit être choisie petite (seconde, minute, CH) :
(CH = centième d'heure)

Le nombre optimum n de broches donnant le coût minimum demande un calcul très long. Il est préférable de chercher la valeur n optimum approximative puis de calculer par points, au voisinage de cette valeur, la courbe de coût C en fonction de n.

Le nombre optimum n approximatif est donné au milieu de la page 93 un exemple de calcul du coût C en fonction de n est donné en tableau page 95.

Le coût varie peu au voisinage du minimum (voir fig.) ce qui permet pour les besoins de l'organisation, de constituer sans gros inconvénient pratique les circuits avec un nombre n de broches différent de l'optimum.

On peut estimer le taux a de casses à partir du nombre Z de casses rencontrées par le rattacheur. Si T est le temps de parcours, rattaches comprises on a (page 93) : $a = \frac{z}{nT}$. On calculera a en prenant la moyenne d'une vingtaine ou une trentaine de parcours.

Il y a intérêt (page 88) à surveiller a par carte de contôle.