

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

H. C. HAMAKER

Quelques exemples concernant l'établissement de plans d'expériences

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 1 (1960), p. 9-27

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_1_9_0

© Société française de statistique, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES EXEMPLES CONCERNANT L'ÉTABLISSEMENT DE PLANS D'EXPERIENCES

H. C. HAMAKER

Laboratoire de recherches Philips Eindhoven - Hollande

La méthode statistique est une technique puissante, pouvant faire appel à des outils très élaborés, impliquant l'observation de nombreuses variables et la mise en jeu de calculs qui pourraient quelquefois paraître hermétiques au praticien dont la collaboration est nécessaire aussi bien à la réalisation qu'à l'interprétation des expériences.

Le Dr Hamaker, dont les importants travaux théoriques sont bien connus n'a pas voulu - en présentant quelques plans d'expérience très simples - minimiser l'importance des techniques les plus élaborées de l'analyse de variance.

Il a montré comment, grâce à l'observation de la réalité, à la connaissance que la technique en a déjà donné, une réflexion méthodique peut conduire par étapes à une expérimentation simplifiée, plus facile à analyser qu'un plan trop complexe, bien adaptée à l'atmosphère industrielle, et conduisant à des calculs faciles à interpréter.

I - INTRODUCTION -

Il y a déjà de nombreuses années que je nourris le désir de voir de près comment fonctionne en pratique votre "Centre de Formation aux Applications Industrielles de la Statistique" et tout d'abord je voudrais exprimer le plaisir que j'éprouve à me trouver parmi vous ces jours-ci et d'avoir été invité à faire une conférence aujourd'hui.

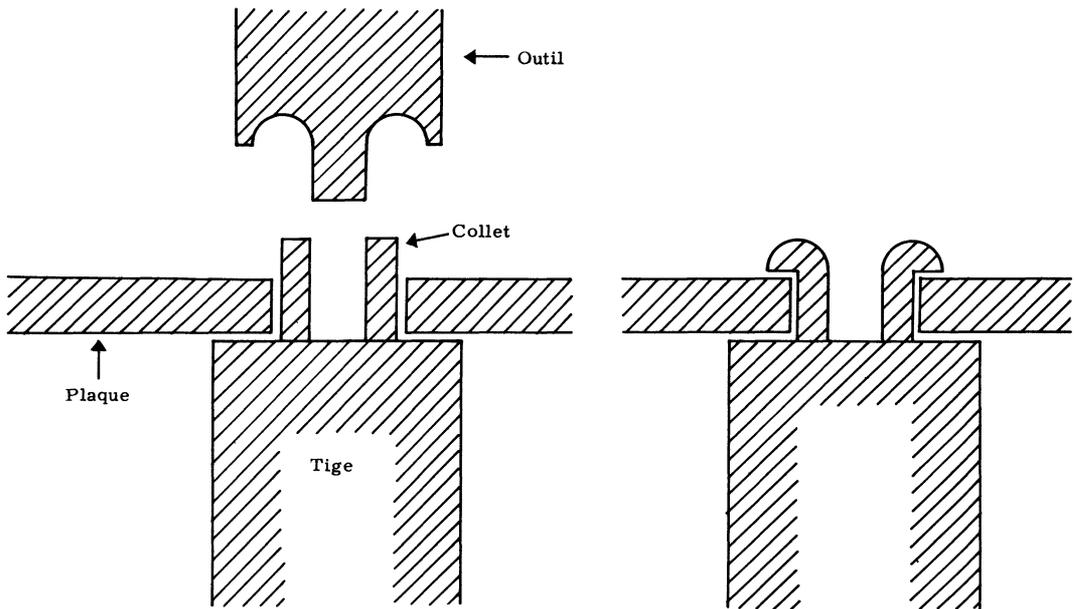
La plupart des rapports et des discussions au cours de cette réunion ont concerné le contrôle de qualité sous ses différents aspects. La conception d'expériences industrielles constitue un autre champ d'action où les méthodes statistiques ont une part importante à jouer et j'ai pensé qu'il serait intéressant que je vous présente quelques exemples concernant l'établissement de plans d'expériences dans la pratique.

II - EXEMPLE I : ASSEMBLAGE PAR SERTISSAGE -

II-1 - Mon premier exemple se rapporte à l'exécution d'assemblages par sertissage, une opération qui est employée à très grande échelle pour la fixation

(1) Exposé présenté aux Journées d'Etude et de discussion des anciens stagiaires (2-3-4 Juillet 1959).

de différentes pièces sur des châssis d'appareils de radio ou de télévision, etc. Le principe est illustré à la figure 1.



JOINT SERTI

Figure 1

Une tige métallique R comporte en haut un collet C que l'on introduit par un trou H dans la plaque P. Ensuite un outil rotatif T est introduit dans le collet et rabat les bords qui dépassent de la plaque P latéralement contre cette plaque pour établir un assemblage rigide entre R et P.

Lorsque les conditions ne sont pas convenables, le bord du joint fini a une apparence rugueuse et présente des fissures, ce qui réduit la résistance mécanique de l'assemblage. En usine, on a eu de nombreuses difficultés de ce genre et il a fallu faire des expériences pour améliorer les résultats.

II-2 - Nous commençons par énumérer les facteurs qui peuvent avoir une influence, et les observations que l'on peut effectuer.

A - FACTEURS POUVANT AVOIR UNE INFLUENCE SUR LA QUALITE DE L'ASSEMBLAGE.

- 1/ M Matériaux : acier I, acier II, aluminium, laiton, Différents lots.
- 2/ D Diamètre du collet.
- 3/ E Epaisseur de la paroi du collet.
- 4/ H Hauteur du collet au-dessus de la plaque.
- 5/ J Jeu entre le collet et la plaque.
- 6/ P Profil de l'outil; deux outils A et B étaient utilisés, l'outil A étant considéré comme le meilleur.
- 7/ N Nombre de tours par minute de l'outil (vitesse de rotation).

8/ T Temps mis pour exécuter l'assemblage.

9/ L Lubrifiant; deux lubrifiants étaient utilisés, mais on était d'avis que le lubrifiant ne jouait qu'un rôle secondaire.

B - OBSERVATIONS.

1/ Appréciation visuelle de l'apparence de l'assemblage; on utilisait un système de cotation allant de

6 = aspect très lisse à

0 = aspect rugueux avec fortes fissures.

2/ Résistance à la traction en kg, mesurée en séparant la plaque de la barre.

II-3 - En principe, il serait possible d'imaginer des expériences dans lesquelles on pourrait faire varier simultanément tous les 9 facteurs, mais dans une situation comme la présente une telle expérience serait beaucoup trop compliquée. Les observations sont relativement simples et peuvent être réalisées en très peu de temps. Dans ces conditions, il est préférable d'effectuer une série d'expériences simples, ce qui présente également l'avantage de pouvoir utiliser l'expérience acquise antérieurement chaque fois que l'on prévoit le stade suivant.

Par conséquent, le premier problème est de choisir les facteurs que l'on doit faire varier au cours de la première expérience. Les arguments suivants ont décidé de notre choix :

a) L'acier I est connu comme étant le matériau le plus difficile. Il est probable que les conditions permettant d'obtenir des joints convenables avec l'acier I seront également satisfaisantes pour les autres matériaux. C'est pourquoi nous avons commencé les expériences avec l'acier I.

b) Il est difficile de faire varier le diamètre du collet au cours d'une expérience car cela exigerait un changement de réglage important du tour automatique sur lequel le collet est usiné. Plus le diamètre sera petit plus la déformation plastique pour la réalisation de l'assemblage sera grande. C'est pourquoi les diamètres faibles seront plus difficiles à réaliser que les grands. Nous avons commencé avec un diamètre relativement faible en espérant que les résultats obtenus avec ce diamètre pourraient être extrapolés d'une façon simple aux diamètres plus grands. Il s'est avéré que ce raisonnement était correct.

c) Du point de vue de la production, il ne serait pas économique de prescrire des tolérances trop étroites pour le jeu entre collet et plaque. C'est pourquoi nous avons décidé de commencer avec des spécifications de tolérances pouvant être facilement réalisées dans la pratique. Des essais avec des tolérances plus sévères ne seraient réalisés que si les expériences indiquaient que ceci était essentiel.

d) On peut faire varier le profil de l'outil de nombreuses façons et ici aussi il a semblé préférable de ne pas faire varier ce facteur à moins que cela ne paraisse indispensable. Nous pouvons donc commencer en utilisant le meilleur des deux outils existant, l'outil A.

e) Comme le lubrifiant n'était pas considéré comme ayant une importance capitale, nous avons utilisé un seul lubrifiant : de l'huile de machine.

Ces raisonnements nous ont laissé en face de quatre facteurs : l'épaisseur de la paroi, la hauteur, la vitesse de rotation, et le temps de réalisation de l'assemblage. Parce qu'une expérience avec ces quatre facteurs de variation aurait encore été relativement compliquée et comme nous avons besoin d'acquérir tout d'abord certaines informations, nous avons commencé avec deux facteurs seulement, la hauteur et le temps de réalisation de l'assemblage, ce choix étant arbitraire. Etant donné qu'il semblait évident que la qualité de l'assemblage passerait par une valeur optimum lorsqu'on ferait varier la hauteur H, une hauteur trop grande ou une hauteur trop faible semblant l'une et l'autre indésirables, on a choisi quatre niveaux pour ce facteur. Pour le temps T, on a jugé que trois niveaux étaient suffisants. Avec chacune de ces douze combinaisons des hauteurs et des temps, on a réalisé cinq assemblages.

II-4 - Expérience I.

Les résultats de cette première expérience sont reproduits dans le tableau I.

Tableau I
Résultats de la première expérience

A. Résistance à la traction T

Temps (s)	0,4	0,7	1,0	
Hauteur (mm)	Résistance moyenne en kg			Moyenne
0,7	201	195	191	196
0,9	211	211	203	208
1,1	185	215	207	202
1,3	166	168	134	156
Moyenne	191	197	184	

B. Ecart-types 5 Observations

0,4	0,7	1,0
Ecart-types en kg		
16	20	30
12	14	14
29	6	26
53	30	40

C. Cote moyenne d'aspect

Temps (s)	0,4	0,7	1,0
Haut.(mm)			
0,7	4,0	4,2	5,8
0,9	5,2	6,0	5,2
1,1	3,6	6,0	4,2
1,3	1,6	1,6	0,6

Ces données sont éloquentes en elles-mêmes. Il est évident que le temps a peu d'importance tandis que la hauteur a une très forte influence. Lorsque la hauteur est trop grande, la résistance à la traction diminue, l'apparence se détériore et la dispersion entre les observations augmente. Comme le temps utilisé pour réaliser un joint en usine est environ 0,7 s, cette valeur a été adoptée dans les expériences suivantes. La hauteur la plus favorable semble être 0,9 mm.

II-5 - Expérience II.

Pour l'établissement du plan des expériences suivantes, les interactions que l'on peut s'attendre à trouver entre les différents facteurs présentent une

importance capitale. Par exemple, on doit s'attendre à une interaction marquée entre l'épaisseur des parois E et la hauteur H, étant donné que le produit EH détermine la quantité de matière soumise à la déformation plastique. C'est pourquoi la seconde expérience avait pour but essentiellement d'étudier cette interaction et de trouver la meilleure combinaison de l'épaisseur des parois et de la hauteur. On a choisi quatre niveaux pour chacun de ces facteurs. Initialement on pouvait également s'attendre à trouver une interaction entre le temps et la vitesse de rotation, mais comme la première expérience avait montré que le temps était un facteur sans importance, il devenait probable que la vitesse de rotation présentait également un intérêt secondaire. Etant donné que l'on pouvait faire varier ce facteur d'une façon très simple, on a choisi deux niveaux pour ce facteur au cours de la seconde expérience.

Il s'est avéré qu'une épaisseur de paroi de 0,6 mm combinée avec une hauteur de 0,9 mm donnait le meilleur résultat, mais, contrairement à notre attente, les résultats étaient beaucoup plus mauvais avec une vitesse de 1 200 t/mn qu'avec une vitesse de 600 t/mn; cependant les données pour la vitesse la plus grande présentaient un désaccord avec celles de la première expérience et on a considéré qu'il pouvait y avoir un facteur perturbateur extérieur.

C'est pourquoi les expériences ont été continuées, dans les conditions qui sont résumées dans le tableau II, le processus logique qui nous a guidé étant le suivant :

Tableau II
Joints sertis
Résumé des 7 expériences successives

Expérience N°	I	II	III	IV	V	VI	VII
Facteur	Valeurs adoptées pour ce facteur						
Matériau, Lot	Acier I I	Acier I I	les 4 mat.. 5	les 4 mat. I	Acier I I	les 4 mat. I	les 4 mat. I
Diamètre (mm)	2,8	2,8	2,8	2,8	6,8; 14,8	6,8; 14,8	1,0
Epaisseur des parois (mm)	0,6	0,5 0,6 0,7 0,8	0,6	0,6	0,6	0,6	0,4 0,5 0,6
Hauteur (mm)	0,7 0,9 1,1 1,3	0,7 0,9 1,1 1,3	0,9	0,9	0,9	0,9	0,9
Nombre de tours en centaine de tours par minute	12	6 12	6	6; 8; 10 12; 14	2; 3; 4; 5; 6	5	12
Temps (s)	0,4 0,7 1,0	0,7	0,7	0,7	0,4 0,7 1,0	1,0	0,7
Profil de l'outil	A	A	A	A	A	A	A, B, C

Expérience III - Ayant trouvé pour l'acier I une combinaison appropriée de la hauteur, de l'épaisseur, du temps et de la vitesse de rotation, cette combinaison a été essayée sur les quatre matériaux. Les résultats ont été tout à fait satisfaisants.

On a étudié en même temps les différences entre les différents lots du même matériau, qui se sont avérées faibles et sans intérêt technique.

Expérience IV - A la suite des mauvais résultats obtenus pour 1 200 t/mn dans l'expérience II, on a étudié à nouveau l'effet de la vitesse de rotation sur les quatre matériaux. Ce facteur semble avoir peu d'influence et c'est pourquoi on a définitivement attribué les résultats de l'expérience II à une perturbation extérieure.

Expérience V - Grands diamètres. On a conservé le profil de l'outil, mais on a augmenté le diamètre de l'axe central. Ceci a conduit immédiatement au résultat désiré. On a considéré également comme possible une interaction du diamètre avec la durée et la vitesse de rotation; pour les grands diamètres une vitesse moins élevée et une durée plus longue peuvent être préférables. C'est pourquoi on a à nouveau fait varier le temps et la vitesse au cours de cette expérience.

Expérience VI - Les conditions pour les grands diamètres ont été essayées sur les quatre matériaux.

Expérience VII - Etude sur le plus petit diamètre utilisé. Dans ce cas on a fait varier le matériau, l'épaisseur des parois et le profil de l'outil.

II-6 - Commentaires.

Cet exemple appelle les commentaires suivants :

1/ Dans des situations comme celle que nous envisageons ici où les essais sont simples et peuvent être réalisés dans un temps relativement court, une série d'expériences à deux ou trois facteurs est plus efficace qu'une seule expérience plus compliquée.

2/ J'ai présenté une fois le problème des joints sertis à un groupe d'étudiants de formation supérieure et je leur ai demandé d'établir un projet pour la première expérience. Le tableau III donne une sélection parmi les réponses reçues.

Tableau III

Sélection parmi les premières expériences proposées par des étudiants

Facteurs	Facteurs à faire varier et nombre de niveaux								
Matériau		2	2		4	2		2	
Diamètre		2	2	4				2	
Epaisseur des parois	2		2	2	2	2	x	2	
Hauteur	2		2	3		2	x	2	4
Valeur du jeu			2				x	2	
Profil de l'outil			2		2	2			
Vitesse de rotation	2	2	2		2			2	
Temps			2					2	3
Lubrifiant		2	2		2				
Réponse	10			3	2	2			5
Nbre d'expériences	2 ³	2 ⁴	$\frac{1}{4} 2^9$	fact.	4. 2 ⁴	2 car-rés la-tins 2	Seq.	$\frac{1}{2} 2^6$	3.4
Répétitions	10			3	2				5

Les projets numéros 1, 2, 4, 5, 9 sont des plans factoriels complets. Les projets 3 et 8 concernent des plans factoriels partiels. Le projet 6 comprend

deux carrés latins et le projet 7 propose d'étudier les trois facteurs indiqués un par un. Le projet 9 est celui que nous avons effectivement adopté.

oooo

La plupart des étudiants ont proposé des plans factoriels 2^n sur différents facteurs, ou d'autres types d'expérience portant simultanément sur 3 à 9 facteurs. J'aurais tendance à désigner ces projets comme typiquement scolaires, c'est-à-dire pris directement dans les manuels de statistique, en négligeant certains points d'un intérêt pratique considérable.

Nous pouvons par exemple prédire a priori que les propriétés du joint serti présenteront un optimum en fonction de quelques-uns des facteurs. L'emploi de deux niveaux pour un tel facteur n'est pas suffisant; il faut au moins trois ou quatre niveaux.

De même on peut modifier certains facteurs beaucoup plus facilement que les autres. Il est toujours préférable de commencer avec des facteurs que l'on peut faire varier facilement et d'examiner les facteurs plus difficiles lorsque l'on a déjà acquis une certaine information.

3/ Pas une seule fois dans cette série d'expériences nous n'avons eu recours à des techniques sophistiquées telles que l'analyse de la variance ou l'analyse de regression. De simples tableaux avec les moyennes ont fourni toutes les informations désirées. De mon point de vue, l'importance de l'analyse de la variance est surfaite dans les manuels de statistique.

4/ Malgré cela les principes de la statistique ont joué un rôle important dans cette recherche. Un grand nombre d'expériences avaient été réalisées avant que nous ayons été consultés, mais sans arriver à des résultats concluants. Dans les expériences décrites ci-dessus, nous avons été conduits directement à la solution cherchée, solution qui a été essayée ensuite en usine avec un succès complet. Le point principal à mon avis c'est que la science de la statistique fournit la base logique pour s'attaquer à un problème aussi complexe (9 facteurs) que celui qui se pose ici. En particulier nous avons systématiquement considéré les interactions entre les différents facteurs et nous en avons tenu compte dans les plans d'expériences et dans l'analyse de nos observations.

III - EXEMPLE II - FUSIBLES -

III-1 - La figure 2 représente schématiquement un petit fusible utilisé pour protéger les circuits électriques contre les surcharges. Un tube de verre G est fermé à ses deux extrémités par des chapeaux en laiton C entre lesquels est placé le fil fusible qui saute quand le courant devient trop fort.

Un comité ayant pour tâche la normalisation des fusibles est arrivé à la conclusion que leurs caractéristiques dépendent de la nature du courant (courant alternatif ou courant continu) et de différents autres facteurs et on a demandé un plan d'expérience pour déterminer la nature de ces influences.

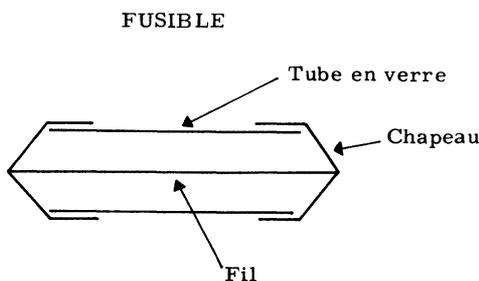


Figure 2

Les facteurs et les observations suivants ont été signalés comme étant intéressants :

III-2 - Facteurs intervenant dans les fusibles.

- 1/ M Matériau constituant le fil fusible : argent, nickel, alliage argent-nickel, alliage nickel-chrome.
- 2/ D Diamètre du fil.
- 3/ L Longueur du fil.
- 4/ E Entourage du fil : air ou sable.
- 5/ F Fréquence du courant.
- 6/ DG Diamètre du tube en verre.
- 7/ WG Epaisseur de la paroi du tube en verre (probablement sans importance).

Observations - Le temps de fusion, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que le fusible saute, est observé en fonction du courant. La forme générale de la courbe donnant la relation entre le courant et le temps de fusion est représentée sur la figure 3.

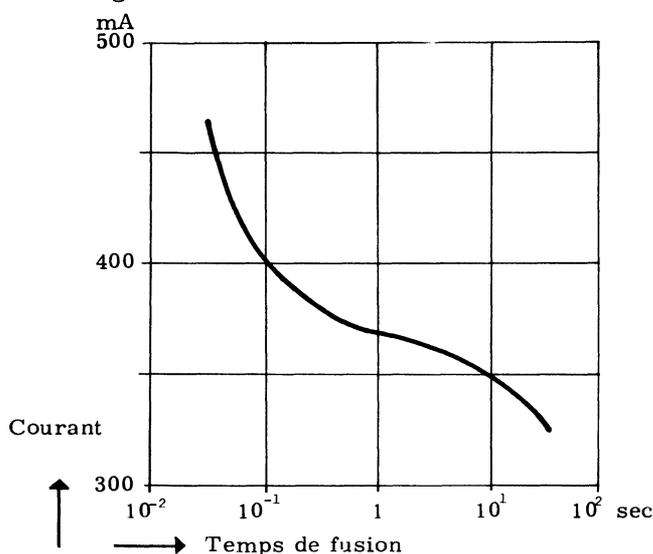


Figure 3

III-3 - A première vue, la situation semble très analogue à celle du premier exemple; toutefois, il existe certaines différences. Les facteurs tels que l'entourage du fil, le type de matériau, le diamètre du fil ont certainement une influence très importante. Mais c'est justement pour cette raison que j'hésiterais à les inclure dans des expériences du type statistique. L'interprétation de ces expériences est en général basée sur des modèles simplement additifs qui sont en général pris en défaut lorsque les effets observés sont importants. En faisant varier

dans une expérience les facteurs mentionnés, on serait amené probablement à trouver des interactions d'un ordre élevé qu'il serait à peu près impossible d'interpréter du point de vue technologique. Les facteurs énumérés par les techniciens ne sont pas toujours les facteurs qu'il faut nécessairement inclure dans un plan d'expérience et une sélection avisée est l'une des tâches principales que le statisticien doit résoudre en pratique. A mon avis la meilleure façon d'attaquer le problème posé serait d'étudier les fusibles avec un seul entourage, un seul matériau et un seul diamètre en faisant varier la longueur du fil, la fréquence et le diamètre du tube.

III-4 - Mais ce n'est pas cela que nous avons fait effectivement. En effet, lorsque nous avons demandé : "Quelle est l'importance de la dispersion entre observations répétées?", nous avons reçu comme réponse : "Oh! elle est très grande, mais nous ne la connaissons pas exactement". Ceci nous a incité à procéder avec encore plus de précaution et à étudier en détail ce phénomène de dispersion avant d'introduire des changements dans les fusibles eux-mêmes. Des groupes de 50 fusibles pris au hasard dans un grand lot d'un produit existant ont été soumis au même courant pour les faire sauter; pour les faibles courants,

pour lesquels les temps de fusion sont relativement grands, le nombre d'essais était plus faible. Les résultats nous étaient communiqués sous la forme indiquée à la figure 4 où sont portés les temps de fusion moyens, maximum et minimum. Cette figure était accompagnée d'un tableau donnant les valeurs originales. On notera que pour les courants élevés et les courants faibles, la dispersion est relativement faible, tandis qu'elle est élevée pour les courants moyens.

III-5 - Lorsque nous avons eu une vue plus précise des données, nous avons trouvé que la figure 4 était trompeuse. Si nous reportons les observations individuellement au lieu de reporter les moyennes, nous obtenons l'aspect de la figure 5. Pour une valeur de 400 mA, la distribution est nettement bimodale et il est évident qu'au lieu d'une courbe continue comme celle tracée à la figure 4 nous devons distinguer deux branches distinctes.

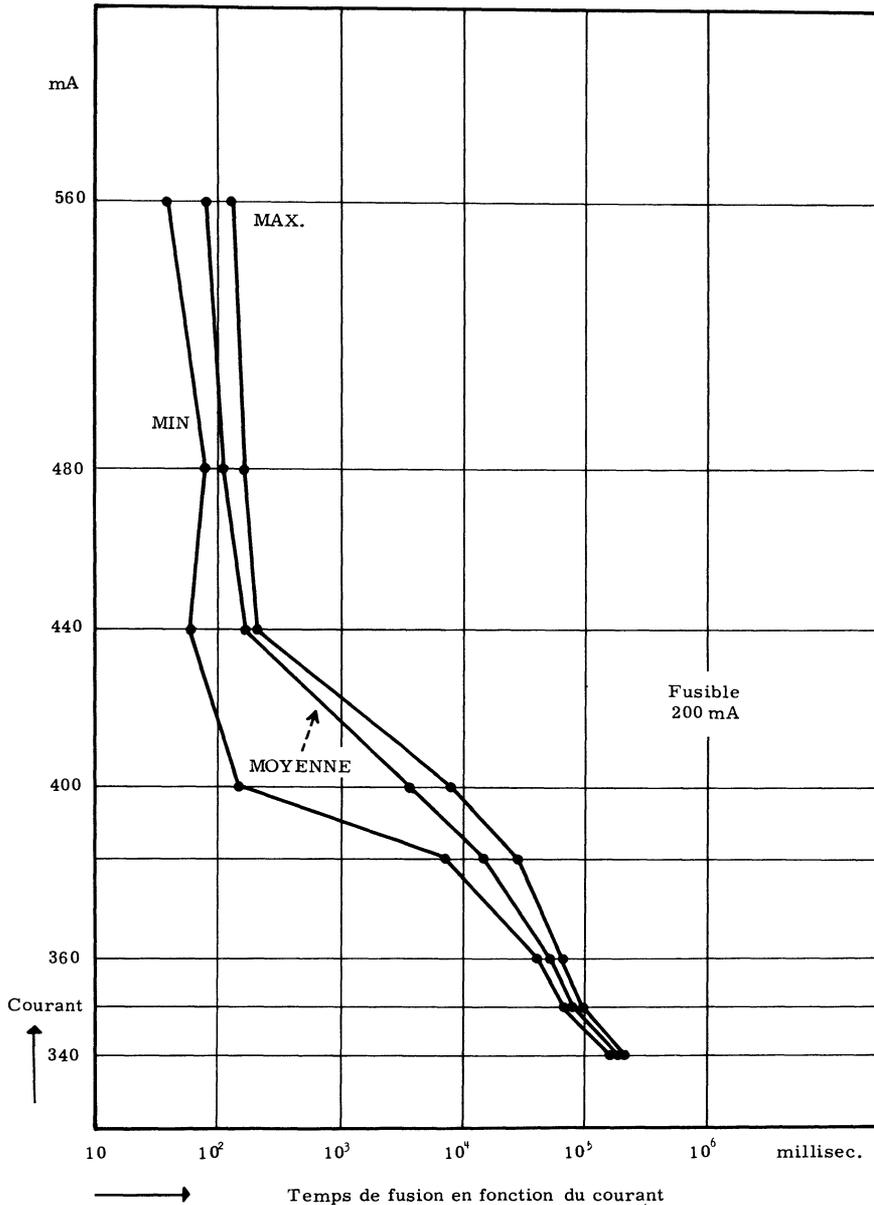


Figure 4

Ayant observé ce phénomène, il n'était pas difficile de trouver une explication technique. Pour 400 mA le fusible atteint une température voisine du point de fusion. Du fait de la dispersion inévitable de la qualité, certains fusibles seront effectivement chauffés au-dessus de cette température et sauteront presque immédiatement tandis que d'autres resteront en-dessous et sauteront uniquement par oxydation, c'est-à-dire par un phénomène beaucoup plus lent. Ainsi, les deux branches observées peuvent être désignées comme "branche de fusion" et "branche d'oxydation".

Ce résultat explique également la différence entre le comportement en courant alternatif et en courant continu. Le courant alternatif produit des fluctuations périodiques de la température et la température de crête est plus élevée que la température atteinte avec un courant continu de même valeur. La transi-

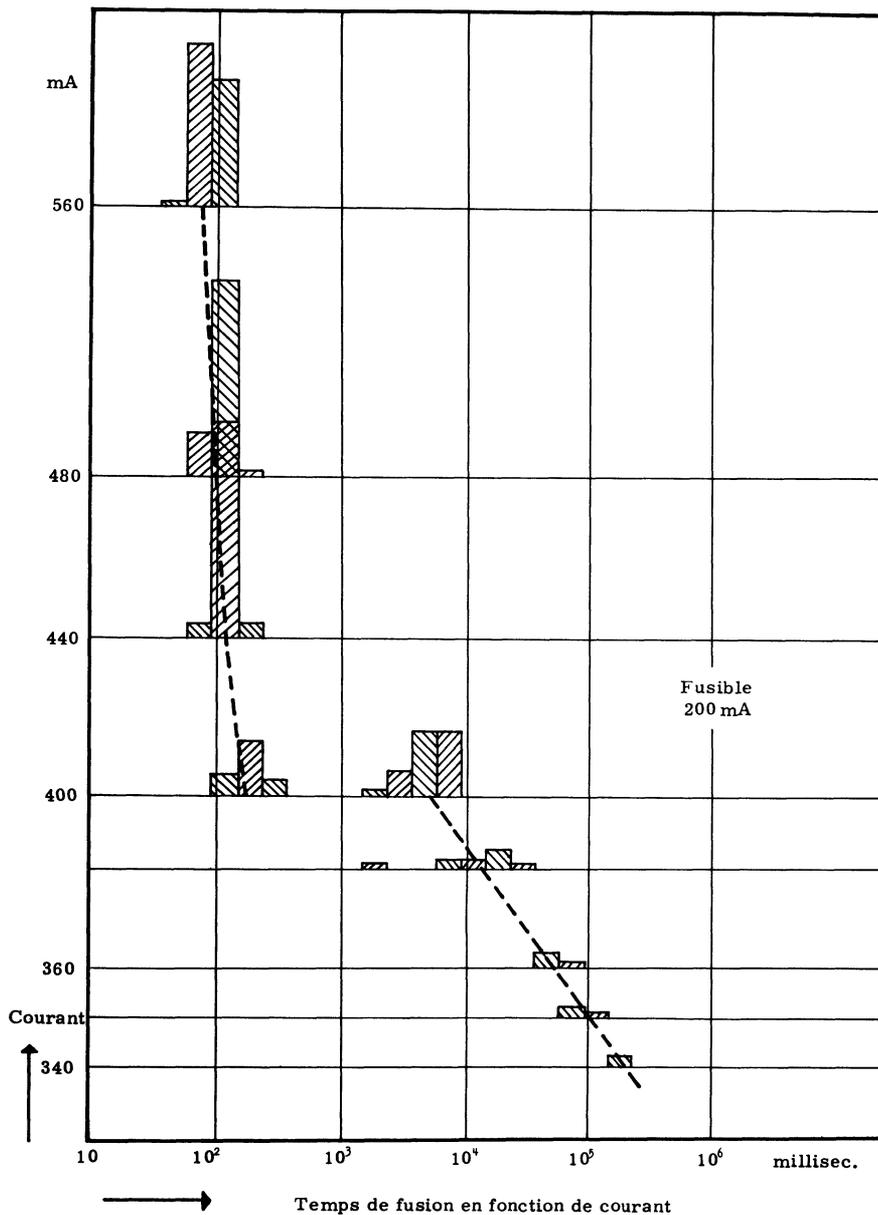


Figure 5

tion entre la courbe d'oxydation et la courbe de fusion se placera à des valeurs plus faibles pour le courant alternatif que pour le courant continu.

Aucune expérience supplémentaire n'a été nécessaire. Il est évident que le fait d'avoir mis en évidence deux processus distincts qui n'avaient pas été reconnus antérieurement présente un intérêt considérable pour l'établissement des spécifications et l'ensemble du problème devait être étudié sous un point de vue différent.

Un extrait des données numériques est présenté au tableau IV.

Il est bon de souligner que des ingénieurs, des physiciens et des chimistes, qui n'ont eu affaire qu'à des observations à distribution normale pouvant être représentées par leur moyenne, ne se rendent pas compte que la distribution pour un courant de 400 mA est clairement bimodale.

Tableau IV
Extrait des temps de fusion observés

Intensité	Temps de fusion observés en millisecondes				
380 mA	1327	995	928	910	538
	382	1012	801	323	586
400 mA	340	314	226	351	425
	10	8	264	14	270
	7	213	11	171	287
	7	307	402	10	219
440 mA	8	3	6	6	6
	5	6	5	5	7

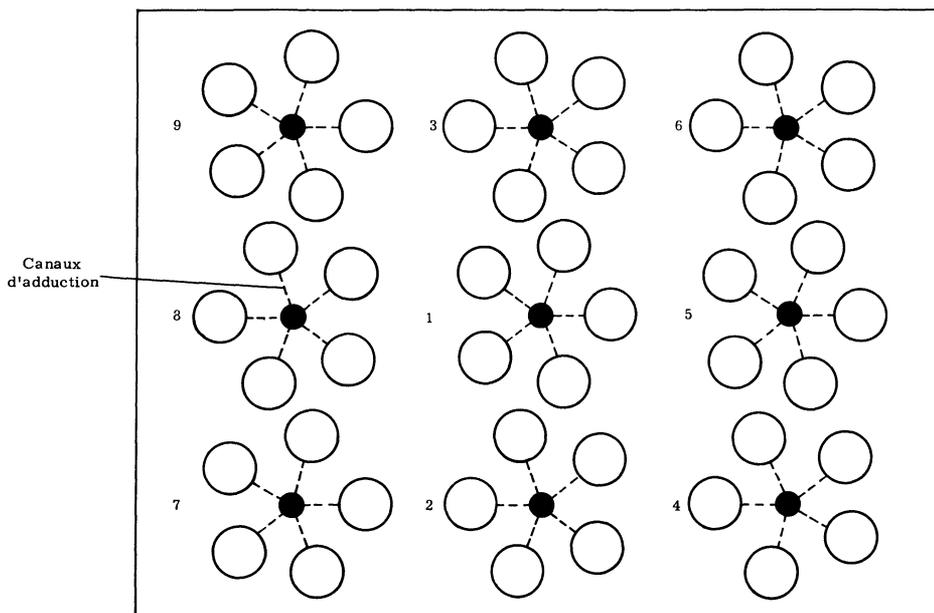
Exemple III - Cet exemple se rapporte à une fonderie où l'on fabrique en très grand nombre des aimants en acier de forme cylindrique d'une hauteur d'environ 16 mm. Un châssis contient 45 moules disposés selon 9 rosettes de 5 moules comme indiqué à la figure 6. Six châssis sont empilés l'un au-dessus de l'autre pour former une pile et quatre piles de ce genre sont garnies simultanément à l'aide d'une poche (figure 7). Ainsi, en une seule coulée on produit $45 \times 6 \times 4 = 1080$ cylindres.

Ces cylindres présentent une certaine dispersion en hauteur; et comme ils doivent être finalement ramenés tous par rectification à la même dimension, une grande dispersion provoque une perte considérable de matière et de temps. Pour cette raison on a réalisé des expériences afin de déterminer les causes principales de dispersion.

On a mesuré les hauteurs de chacun des 45 cylindres provenant de chacun des 6 châssis de la première et de la dernière pile d'une coulée. Les résultats reportés à la figure 8 sous forme de 12 polygones indiquant les fréquences révèlent une nette différence entre les piles et également une variation de hauteur en fonction de la position du châssis dans la pile.

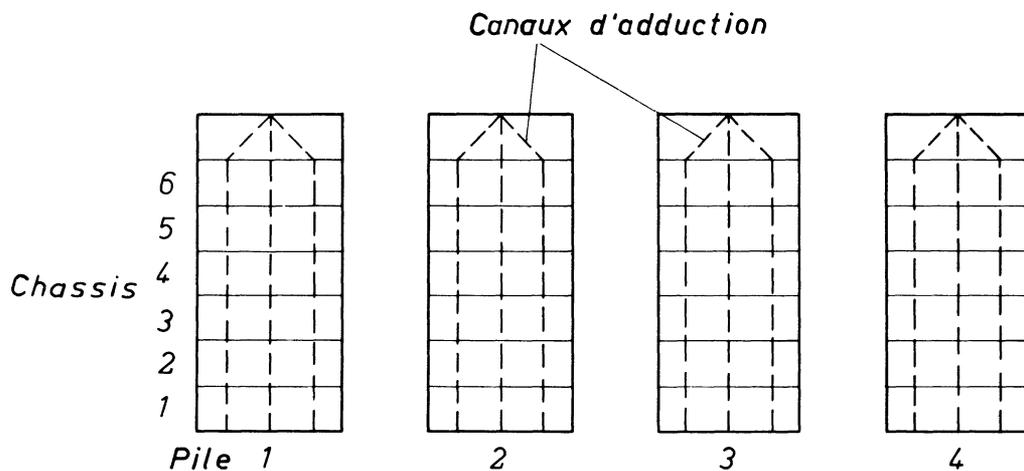
Ensuite on a mesuré la hauteur des cylindres pour chacune des neuf rosettes dans les châssis 3, 4 et 5 d'une certaine pile. Les résultats de ces mesures sont représentés à la figure 9. Cette figure ne permet pas d'établir d'une façon simple s'il se produit une variation systématique d'une rosette à l'autre.

Les résultats indiqués jusqu'à présent ont été obtenus à la fonderie sans l'assistance d'aucun statisticien, mais certaines difficultés ont été rencontrées



Arrangement de 45 moules dans un chassis

Figure 6



Une coulée est composée de 4 piles, chacune de 6 chassis, et de $4 \times 6 \times 45 = 1080$ moules au total.

Figure 7

en essayant d'aller plus loin. Quoique les figures 8 et 9 mettent en évidence qu'il existe certaines sources distinctes provoquant les variations, il n'est pas facile de déterminer au premier abord celle qui est la plus importante et dont on de-

vrait s'occuper en premier. C'est justement là le type de difficulté que l'on peut surmonter efficacement par des méthodes statistiques qui fournissent la technique nécessaire pour l'analyse d'un aussi grand nombre de données.

Tout d'abord on a calculé la hauteur moyenne des pièces de la première et de la dernière pile, ce qui donne respectivement 15,97 et 15,74 mm. Du point de vue technique, il est raisonnable de supposer que cette variation dans la hauteur moyenne est le résultat d'un refroidissement progressif du métal coulé de la poche et dans ce cas nous pouvons estimer que la hauteur moyenne des deux piles intermédiaires peut s'obtenir par interpolation linéaire. Ceci donne 15,90 mm pour la pile 2 et 15,82 mm pour la pile 3. La moyenne générale pour toute une coulée serait donc de 15,86 mm et les écarts des 4 piles par rapport à ces moyennes seraient respectivement +0,11, +0,04, -0,04 et -0,12 mm. Ces valeurs ont été reportées sur la dernière ligne en bas du tableau V.

La hauteur moyenne pour chacun des six châssis dans les piles 1 et 4 a été calculée sur une base analogue et a été reportée à droite sur le tableau V en reportant à côté les écarts par rapport à la moyenne générale.

Partant de ces données, on peut prédire pour le châssis 4 de la pile 2 une hauteur moyenne de $15,86 + 0,06 + 0,04 = 15,96$ mm. Le même calcul a été réalisé pour chacun des 24 châssis, les résultats étant indiqués au tableau V. Le châssis 1 de la pile 4 donne la plus petite valeur, 15,60 mm, et le châssis 6 de la pile 1 la plus grande, 16,07 mm. Mais ce sont là des valeurs extrêmes et les valeurs plus proches de la moyenne 15,86 sont plus fréquentes.

À l'intérieur d'un châssis, nous avons neuf rosettes de 5 moules et on peut également concevoir qu'il existe des variations systématiques d'une rosette à l'autre. Pour étudier ce point, on a déterminé les hauteurs moyennes pour chaque rosette prise séparément à partir des observations enregistrées à la figure 9. Les résultats sont ceux indiqués au tableau VI. La moyenne générale pour toutes les rosettes prises dans leur ensemble est de 16,02 mm et les écarts par rapport à cette moyenne ont été également représentés sur le même tableau. Ceci fait ressortir des différences très nettes entre les différentes rosettes.

Nous pouvons alors faire un pas de plus. Pour le châssis 4 dans la pile 2, nous avons calculé plus haut une hauteur moyenne de 15,96 mm, mais nous devons admettre qu'à l'intérieur du châssis il se produit également entre les rosettes des variations analogues à celles représentées au tableau VI. Nous pouvons alors prédire que dans le châssis 4 de la pile 2, la rosette donnera une hauteur moyenne de cylindres de $15,96 - 0,07 = 15,89$ mm, la rosette 2 une hauteur moyenne de $15,96 + 0,7 = 16,03$ mm, etc. La hauteur moyenne pour chacune des 9 rosettes de ce châssis calculée de cette façon est représentée à la partie inférieure du tableau VI.

Le même calcul peut évidemment être effectué pour chaque rosette dans chacun des 24 châssis, de sorte que les fluctuations de la hauteur se trouvent subdivisées en quatre composantes additives : la moyenne générale et 3 composantes dues respectivement aux différences entre les piles, entre la position des châssis dans les piles, et entre la position des rosettes dans les châssis. Nous devons maintenant tenir compte d'une cinquième composante, à savoir la variation de hauteur entre les différents moules d'une même rosette.

Ainsi, cette simple subdivision des fluctuations de la hauteur en 5 composantes additives peut trouver une expression numérique d'une façon claire et facilement compréhensible comme il est indiqué au tableau VII.

Tableau V
Analyse des différences entre piles et chassis

Chassis	Piles				\bar{X}_p	$\bar{X}_p - \bar{X}$
	1	2	3	4		
6	(16, 07)	(16, 00)	(15, 92)	(15, 84)	→ 15,96	+ 0,10
5	(16, 05)	(15, 98)	(15, 90)	(15, 82)	→ 15,94	+ 0,08
4	(16, 03)	(15, 96)	(15, 88)	(15, 80)	→ 15,92	+ 0,06
3	(15, 95)	(15, 88)	(15, 80)	(15, 72)	→ 15,84	- 0,02
2	(15, 88)	(15, 81)	(15, 73)	(15, 65)	→ 15,77	- 0,09
1	(15, 83)	(15, 76)	(15, 68)	(15, 60)	→ 15,72	- 0,14
\bar{X}_c	15,97	15,90	15,82	15,74	$15,86 = \bar{X}$	
$\bar{X}_c - \bar{X}$	+0,11	+0,04	-0,04	-0,12		

Tableau VI

Analyse des différences entre les rosettes

15,95 -0,07	16,09 +0,07	16,17 +0,15
15,92 -0,10	15,96 -0,06	16,09 +0,07
15,95 -0,07	16,00 -0,02	16,02 0,00

$$\bar{X} = 16,02$$

(15,89)	(16,03)	(16,11)
(15,86)	(15,90)	(16,03)
(15,89)	(15,94)	(15,96)

Polygones des fréquences pour les 6 chassis des piles 1 et 4.

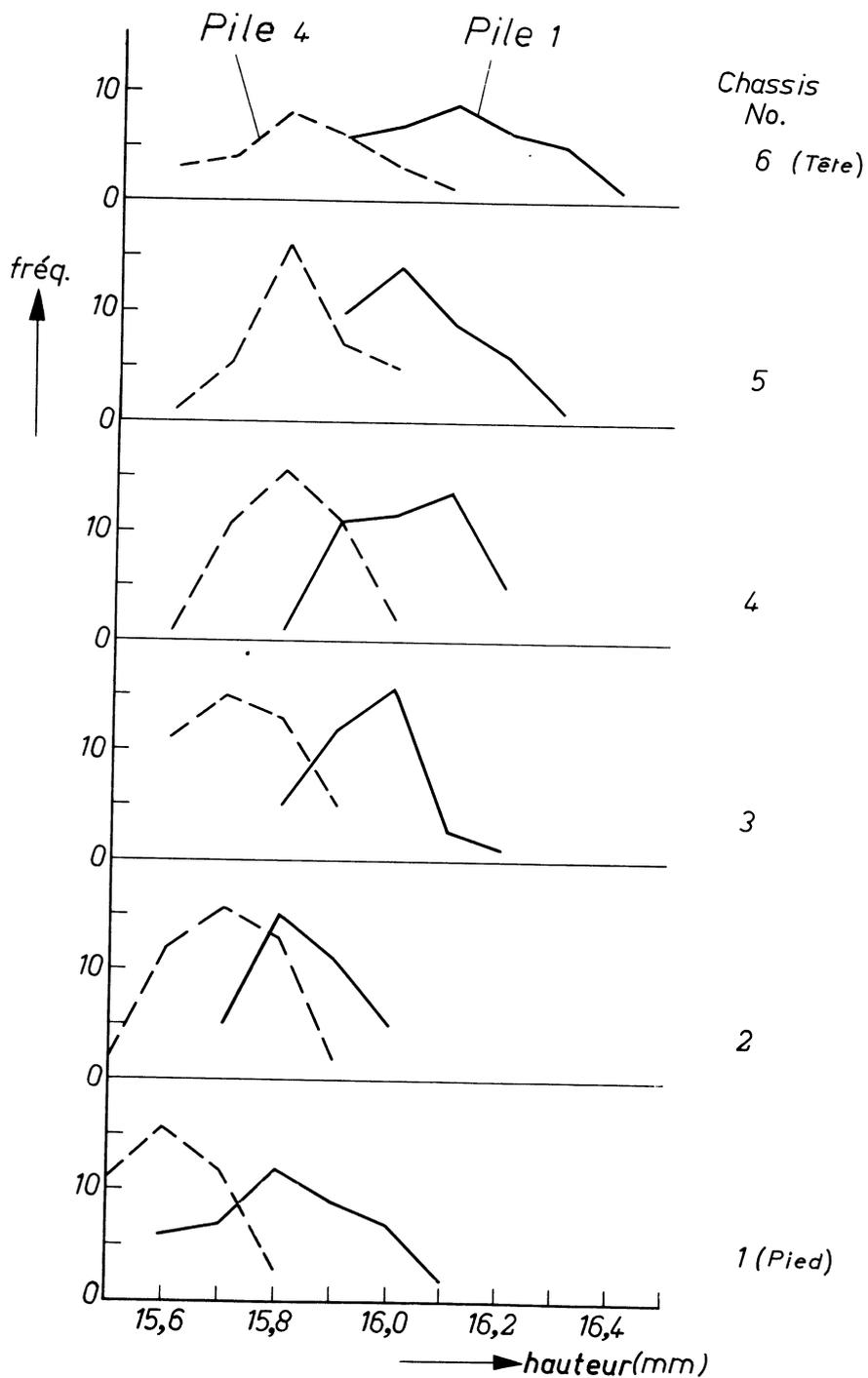
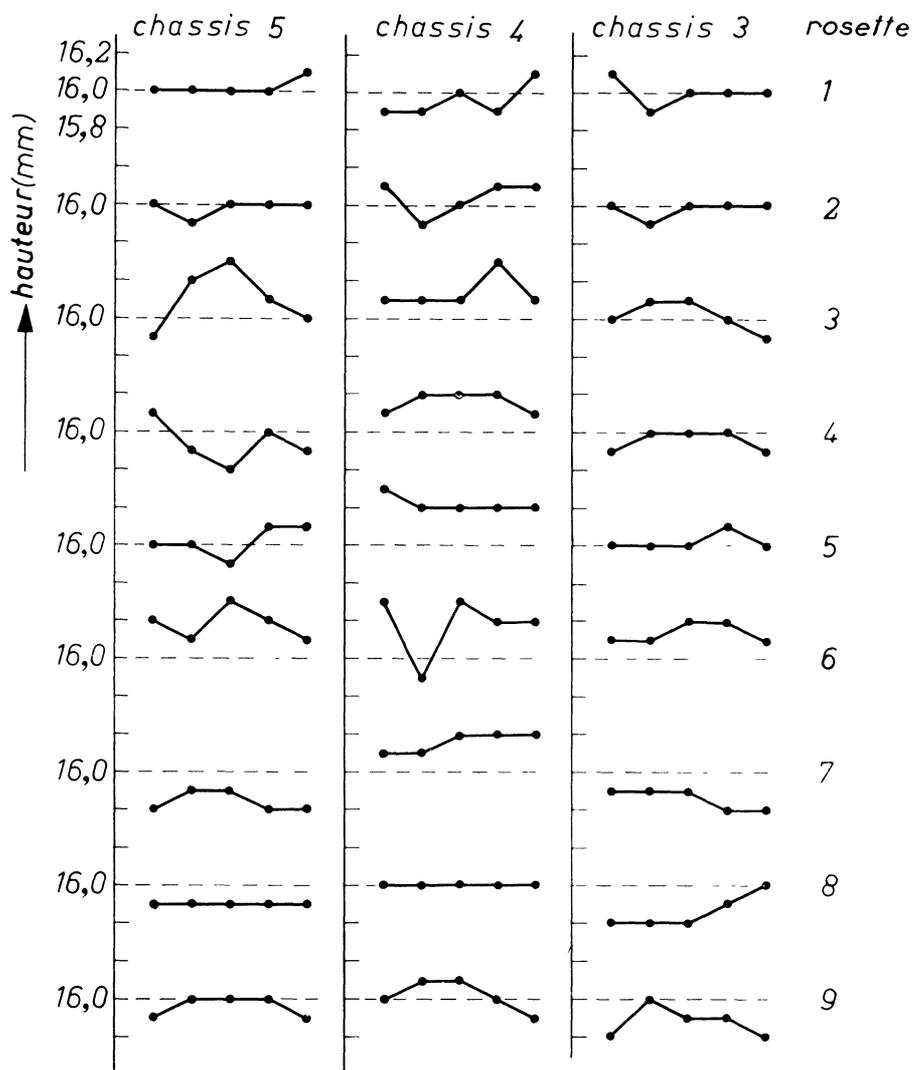


Figure 8



Observations pour les 9 rosettes des chassis 3, 4, 5 de la pile 2

Figure 9

Tableau VII

Représentation des résultats de l'observation sous forme d'une somme de 5 composantes additives

Moyenne générale	Piles	Châssis	Rosettes	Résidu
15,86 mm	1 : +0,11 2 : +0,04 3 : -0,04 4 : -0,12 mm	1 : +0,10 2 : +0,08 3 : +0,06 4 : -0,02 5 : -0,09 6 : -0,14 mm	1 : -0,06 2 : -0,02 3 : +0,07 4 : 0,00 5 : +0,07 6 : +0,15 7 : -0,07 8 : -0,10 9 : -0,07 mm	s = 0,08 mm

Ceci constitue une présentation commode des résultats si l'on est intéressé par les différences entre les différentes piles ou châssis pris individuellement. Toutefois, si, comme dans le cas présent, nous sommes plus particulièrement intéressés par les variations de hauteur, il est préférable de représenter chacune des quatre dernières composantes sous forme de la composante de variance correspondante comme indiqué dans le tableau VIII.

Tableau VIII

Composantes de variances des 4 sources de dispersion dans l'expérience concernant les pièces de fonderie

Sources de dispersion	Composantes de variance
Entre les piles	0,0099 mm ²
Entre la position des châssis dans les piles...	0,0088 mm ²
Entre les rosettes	0,0053 mm ²
A l'intérieur des rosettes	0,0062 mm ²
Total	0,0302 mm ²

En admettant ces quatre composantes de variance, nous obtenons la variance totale de 0,0302 mm² dont la racine carrée :

$$s = \sqrt{0,0302} = 0,174 \text{ mm}$$

représente l'écart-type. La théorie statistique enseigne que la différence de hauteur entre le cylindre le plus grand et le cylindre le plus petit correspondra en gros à six fois l'écart-type, c'est-à-dire

$$d = 6 \times 0,174 = 1,04 \text{ mm} .$$

On peut donc conclure que si l'on veut rectifier les cylindres à la même hauteur, il faudra enlever par rectification du cylindre le plus grand 1,04 mm de plus que pour le cylindre le plus petit. Etant donné que la surface du cylindre est rugueuse et qu'elle doit être polie par rectification, la quantité réelle à rec-

tifier est un peu plus grande, et en moyenne il faudra enlever plus de 0,6 mm de matière par rectification pour amener les cylindres à la hauteur voulue.

Supposons maintenant qu'il soit possible par une modification de la technique d'éliminer les différences entre les piles. Dans ce cas la composante de variance correspondante du tableau VIII serait éliminée et l'écart-type serait réduit à la valeur

$$s = \sqrt{0,0088 + 0,0053 + 0,0062} = 0,143 \text{ mm,}$$

de sorte que l'intervalle de tolérance serait ramené de 1,04 mm à

$$d = 6 \times 0,143 = 0,86 \text{ mm}$$

soit un gain de 0,18 mm.

Si nous pouvions également éliminer les différences entre les rosettes, nous obtiendrions

$$s = \sqrt{0,0088 + 0,0062} = 0,127 \text{ mm}$$

$$d = 0,73 \text{ mm}$$

d'où une nouvelle amélioration de 0,13 mm, soit au total 0,31 mm.

On voit ainsi que les 4 composantes de la variance du tableau VIII fournissent une méthode simple et compréhensible pour apprécier l'importance technique des différentes sources de variation et pour déterminer quelles sont les améliorations que l'on peut s'attendre à obtenir par l'application de certaines mesures techniques. Cet exemple montre les possibilités d'application des méthodes statistiques pour l'analyse de données complexes.

3/ Conclusions.

On notera que nous avons évité autant que possible l'emploi de termes statistiques. Le technicien dans l'industrie est habitué à penser en termes de chiffres, en particulier de moyennes et nous avons essayé de présenter l'analyse sous une forme qui s'adapte d'une façon aussi étroite que possible à l'atmosphère industrielle. Dans un exemple comme celui donné ci-dessus, le technicien ou le directeur technique est à même de comprendre que la science statistique fournit au chercheur de nouveaux outils puissants pour l'analyse de situations complexes. On n'apprend pas au chercheur dans les grandes écoles et dans les universités à traiter un nombre d'observations aussi élevé que dans l'exemple que nous venons de discuter. Nous pouvons ainsi souligner que l'extraction d'une information utile, parmi un tel volume de données sous une forme condensée et compréhensible, exige des connaissances et des techniques spéciales.