

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

Y. MORILLON

Théorie de la randomisation

Revue de statistique appliquée, tome 8, n° 1 (1960), p. 29-44

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1960__8_1_29_0

© Société française de statistique, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DE LA RANDOMISATION

Y. MORILLON

Ingénieur à l'Institut de Recherches de la Sidérurgie

Cette note ne prétend donner qu'un aperçu sommaire des problèmes posés et de leurs solutions. Elle est basée essentiellement sur les publications de Kempthorne.(1)(2)

Cette note concerne 4 types de plans dont la caractéristique commune est d'utiliser toutes les unités expérimentales soumises à l'opération de randomisation. Comme on le verra, l'étude des distributions des rapports de carrés moyens est, dans ces conditions, simplifiée car certains termes figurant dans la décomposition de la somme de carrés ne sont pas aléatoires dans l'hypothèse nulle (du moins avec certains modèles). La théorie de la randomisation a été appliquée à des plans ne présentant pas cette caractéristique; on en trouvera un exemple dans un article de Wilk et Kempthorne.(3)

On conçoit bien que lorsque le nombre d'unités expérimentales utilisées est petit devant le nombre total d'unités disponibles, on retrouve l'analyse de variance classique sans toutefois que les hypothèses de normalité etc. soient nécessairement satisfaites. Ceci rejoint l'objet d'une autre étude et nous n'envisagerons pas ces problèmes dans la présente note.

I - TYPES DE PLANS ETUDIÉS -

A - Plans complètement randomisés.

Il y a t traitements à comparer repérés j ($j=1, 2, \dots, t$) et on dispose de $N = rt$ unités expérimentales, appelées "plots", repérées i ($i=1, 2, \dots, N$), chaque traitement étant répété r fois (Kempthorne étudie donc un cas particulier car, en général le nombre de répétitions peut varier d'un traitement à l'autre). Pour réaliser la randomisation, on utilisera une permutation au hasard des N nombres (Cochran et Cox donnent des tables de permutation au hasard allant jusqu'à $N=16$; on peut aussi utiliser facilement les tables classiques de nombres au hasard); les r premiers plots (dans l'ordre de lecture après permutation) seront affectés au traitement 1, les r suivants au traitement 2, etc. De cette façon, les

(1) "Design and analysis of experiments" et

(2) "Randomization theory of experimental inference" J.A.S.A. 50,271 (1955) pp. 946-67.

(3) "Fixed, mixed and random models" J.A.S.A. 50,272 (1955) pp.1154 et suite.

$\frac{N!}{(r!)^t}$ systèmes d'association des plots et des traitements sont équiprobables,

B - Blocs randomisés complets.

Il y a toujours t traitements à comparer et on dispose de r ensembles de chacun t plots, appelés "blocs". Chaque traitement doit être affecté une fois à chaque bloc. Pour réaliser la randomisation, on utilisera dans chaque bloc une permutation au hasard des t plots et les traitements $1, 2, 3, \dots, t$ seront affectés aux plots dans l'ordre de lecture après permutation.

Les $(t!)^r$ systèmes d'association des plots et des traitements sont équiprobables.

C - Plans du type split-plot(*).

Partant du plan B ci-dessus, nous considèrerons le cas où chaque plot peut être fractionné en split-plots affectés chacun à un sous-traitement différent (les mêmes ensembles de sous-traitements pour tous les plots).

L'affectation des sous-traitements s'effectue en utilisant pour chaque plot une permutation au hasard des split-plots.

Nous noterons :

- s le nombre de sous-traitements, donc de split-plots par plot,
- t le nombre de traitements, donc de plots par bloc,
- r le nombre de blocs.

Les $(t!(s!)^t)^r$ systèmes d'association des split-plots, traitements et sous-traitements sont équiprobables.

D - Carrés latins.

Pour comparer t traitements, on dispose de t^2 plots pouvant être groupés en t blocs de t plots de 2 façons différentes : groupement par lignes et groupement par colonnes, chaque plot correspondant à une combinaison ligne-colonne différente.

Chaque traitement ne doit être affecté qu'une seule fois à une ligne ou à une colonne donnée.

Les méthodes utilisées pour introduire un processus aléatoire dans l'affectation des traitements aux cases sont décrites par divers auteurs, notamment par Cochran et Cox ("Experimental Design"). Lorsqu'on applique ces méthodes, on peut considérer que le carré latin adopté a été tiré au hasard dans une famille de carrés latins ; une telle famille ne comprend pas toutefois tous les carrés latins possibles lorsque $t \geq 5$ (avec la méthode de sélection de Cox).

II - DEFINITION DE L'ADDITIVITE -

Si on désigne par z_{ij} la valeur de la variable mesurée lorsque le traitement déterminé j est appliqué au plot déterminé i , il y a additivité au sens strict si :

$$z_{ij} = e_i + t_j \text{ (} z_{ij} \text{ est alors une variable certaine)}$$

(*) Plans "split-plot" = plans expérimentaux dans lesquels des traitements additionnels ou subsidiaires sont introduits en partageant chaque "plot" en deux ou plusieurs parties.

et additivité au sens large si

$$z_{ij} = e_i + t_j + \varepsilon_{ij}$$

Les ε_{ij} étant des variables aléatoires indépendantes (par exemple, des erreurs de mesure).

III - TEST DIRECT DE L'HYPOTHESE NULLE $t_j = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Réf (1) pp 128 et suite} \\ \text{Réf (2) p 947} \end{array} \right.$

Kemphorne cite l'exemple emprunté à Fisher de la comparaison de 2 traitements répétés sur 15 blocs randomisés complets ($t=2$, $r=15$). S'il y a additivité au sens strict et s'il n'y a pas d'effet du traitement (hypothèse nulle), la différence $T_1 - T_2$ observée entre la somme des 15 résultats du traitement 1 et la somme des 15 résultats du traitement 2 résulte d'un tirage au hasard parmi les $(2!)^{15}$ différences de ce type correspondant à toutes les façons de fractionner les 30 résultats en 2 séries de 15 en respectant la règle prescrite (1 résultat de chaque série par bloc).

Il est donc possible de déterminer dans l'hypothèse nulle le nombre de telles différences supérieures ou égales à $T_1 - T_2$, donc de calculer le risque attaché à l'hypothèse nulle.

Dans l'exemple cité, ce risque est de 5,267% alors que le dépouillement suivant une analyse de variance classique à 2 dimensions donne 4,97%.

D'autre part, Kemphorne donne une liste de 24 séries de résultats de plans complètement randomisés artificiellement construits et dépouillés suivant la méthode classique de l'analyse de variance à 1 dimension (test F) et suivant le test direct. Il constate ainsi que les risques de première espèce déterminés suivant les deux méthodes sont en assez bon accord. Ces risques sont assez régulièrement échelonnés de 0,006 à 0,967 (pour le test F). Notons toutefois que c'est la région des faibles probabilités qui est pratiquement intéressante et qu'une seule probabilité de cette liste est inférieure à 10% (pour le test F).

IV - BASES MATHÉMATIQUES DU DEPOUILLEMENT PAR L'ANALYSE DE VARIANCE -

Dans le cas le plus général, il y a t traitements repérés j ($j=1, 2, \dots, t$) chacun d'eux pouvant être répété un nombre illimité de fois et N plots repérés i ($i=1, 2, \dots, N$).

Un système d'affectation des traitements aux plots peut être représenté par un point de coordonnées $\left. \begin{array}{l} j_1 \\ j_2 \\ \dots \\ j_n \end{array} \right\}$ dans un espace à N dimensions (on affecte un

vecteur de base à chaque plot). Chacune des coordonnées peut prendre les t valeurs, $1, 2, \dots, t$; il y a donc t^n systèmes possibles représentés par t^n points. La loi de distribution de ces systèmes peut être représentée en associant une probabilité ou masse à chaque point, la somme des masses étant égale à 1.

Toutes ces masses sont déterminées par le plan expérimental, par exemple, dans le cas du plan complètement randomisé, il y a $\frac{N!}{(r!)^t}$ masses égales à $\frac{(r!)^t}{N!}$ et $t^n - \frac{N!}{(r!)^t}$ masses nulles.

Kemphorne introduit la variable aléatoire :

$$\delta \begin{matrix} j_1 & j_2 & \dots & j_N \\ 1 & 2 & \dots & N \end{matrix}$$

valant 1 si le traitement j_1 est affecté au plot 1, le traitement j_2 au plot 2, etc. et zéro autrement ; il s'agit donc d'une variable de Bernoulli. On obtient les variantes de cette variable aléatoire en donnant à chacun des indices j_1, j_2, \dots, j_N les t valeurs 1, 2, ..., t. La masse affectée au point de coordonnées

$$\begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_N \end{matrix}$$

sentation envisagée plus haut est donc :

$$P(\delta \begin{matrix} j_1 & j_2 & \dots & j_N \\ 1 & 2 & \dots & N \end{matrix} = 1)$$

La distribution marginale sur l'axe affectée au plot i est constituée de t masses correspondant aux probabilités $P(\delta_i^{j_i} = 1)$, j_i prenant les valeurs 1, 2, ..., t. Nous noterons, comme le fait Kemphorne, δ_i^j au lieu de $\delta \begin{matrix} j \\ i \end{matrix}$.

Les δ_i^j jouissent de la propriété ci-après, très importante pour la suite des calculs : puisque δ_i^j ne peut prendre que la valeur 0 ou 1, on a, en effet :

$$\begin{aligned} E\left[(\delta_i^j)^r\right] &= P(\delta_i^j = 1) \\ E\left[(\delta_i^j)^p\right] \left[(\delta_i^{j'})^q \right] &= P(\delta_i^j = 1, \delta_i^{j'} = 1) \text{ etc.} \end{aligned}$$

pour toutes valeurs non nulles de r, p, q.

Les valeurs de ces probabilités peuvent être calculées pour un type de plan donné. Par exemple, pour le plan complètement randomisé, on a :

$$\begin{aligned} P(\delta_i^j = 1) &= \frac{1}{t} \\ P(\delta_i^{j'} = 1 \mid \delta_i^j = 1) &= \frac{r-1}{rt-1} \text{ etc.} \end{aligned}$$

D'où le calcul de :

$$P(\delta_i^j = 1, \delta_i^{j'} = 1)$$

par application du théorème des probabilités composées, etc.

Ceci permet le calcul des moments de variables aléatoires qui s'expriment en fonction de δ_i^j .

V - DEPOUILLEMENT MATHEMATIQUE DES PLANS ENVISAGES EN I -

A - Plans complètement randomisés (réf. 2 page 952).

Traitements repérés j (j=1, 2, ..., t)

Plots repérés i (i=1, 2, ..., N) N = rt

1/ Modèle avec additivité au sens strict.

Pour introduire les δ_i^j définis plus haut, nous considérerons la somme des résultats observés pour le traitement j déterminé : c'est une variable aléatoire qui s'écrit :

$$(M_1) \quad T_j = r\mu + rt_j + \sum_{i=1}^N \delta_i^j e_i \quad (*)$$

μ , t_j et e_i étant des variables certaines vérifiant les conditions $\left\{ \begin{array}{l} \sum_j t_j = 0 \\ \sum_i e_i = 0 \end{array} \right.$

Les δ_i^j sont les variables aléatoires définies plus haut.

On montre facilement que l'on a :

$$E\left(\frac{T_j}{r}\right) = \mu + t_j \quad (\text{ceci résulte immédiatement du fait que } E(\delta_i^j) \text{ est constant})$$

$$\text{var}\left(\frac{T_j}{r}\right) = \frac{t-1}{t} \frac{1}{r} \sigma^2 \quad \text{en posant } \sigma^2 = \frac{1}{rt-1} \sum_i e_i^2$$

On montre qu'on a :

$$\text{cov}\left(\frac{T_j}{r}, \frac{T_{j'}}{r}\right) = -\frac{\sigma^2}{rt}$$

Une telle corrélation négative entre les moyennes de traitement existe dans tous les problèmes de modèles finis. Sa connaissance peut présenter un certain intérêt lorsqu'on veut compléter l'analyse de variance envisagée ci-après par des comparaisons des traitements 2 à 2 (Une telle comparaison pose d'ailleurs d'autres problèmes sur la distribution des $T_j - T_{j'}$ dans l'hypothèse nulle).

Test de l'hypothèse nulle $t_j = 0$.

Ce test s'effectue par une analyse de variance à une dimension. La partie algébrique de la méthode : décomposition de la somme de carrés totale centrée entre observations et degrés de liberté attachés aux diverses formes quadratiques figurant dans cette décomposition est la même que lorsqu'on adopte le modèle normal classique (M_0 ci-après) :

$$(M_0) \quad y_{jk} = \mu + t_j + \varepsilon_{jk} \quad E(\varepsilon_{jk}) = 0 \quad \sum_j t_j = 0$$

$$\varepsilon_{jk} = N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

L'indice k ($k = 1, 2, \dots, r$) repérant les répétitions du traitement j .

 (*) On pourrait songer à écrire le modèle pour une observation individuelle. Cela suppose qu'on se définisse un second système de repérage des plots i^* ($i^* = 1, 2, \dots, N$) basé, par exemple, sur l'ordre dans lequel ils sont écrits après permutation aléatoire. On peut évidemment mettre i^* sous la forme $i^* = jk$, l'indice k repérant les répétitions des traitements j . Il faut alors se définir des δ_i^{jk} de la même façon que plus haut et le résultat sera une variable aléatoire pouvant s'écrire :

$$x_{jk} = \mu + t_j + \sum_i \delta_i^{jk} e_i$$

Il est plus simple de raisonner directement sur les sommes $T_j = X_j$.

Par contre, les lois de distribution des diverses statistiques considérées ne sont pas les mêmes pour les modèles (M₀) et (M₁).

La décomposition est :

Tableau 1

Source de variation	Somme de carrés	d. d. l	E(carré moyen)
Entre traitements	$T = \frac{1}{r} \sum_j T_j^2 - (TC)$	t-1	$E(Q_T) = \sigma^2 + \frac{r}{t-1} \sum_j t_j^2$
Résiduelle	R = (par différence)	t(r-1)	$E(Q_R) = \sigma^2$
Totale	$S_2 = \sum (\text{observ.})^2 - (TC)$	rt-1	$E(Q_{S_2}) = \frac{1}{rt-1} (\sum_i e_i^2 + r \sum_j t_j^2)$

$$(TC) = \frac{1}{rt} (\sum_j T_j)^2$$

σ^2 est défini plus haut dans le cas du modèle (M₁) et dans le cas du modèle (M₀), on a $\sigma^2 = \sigma_E^2$.

On voit que dans l'hypothèse nulle $t_j = 0$: $E(Q_T) = E(Q_R)$.

Il reste à étudier dans cette hypothèse, la distribution de $\frac{Q_T}{Q_R}$.

Il est plus facile de passer par l'intermédiaire du rapport $\frac{T}{S_2}$ car avec le modèle (M₁), S_2 n'est pas aléatoire dans l'hypothèse nulle, le hasard ne jouant que sur le partage de S_2 entre T et R. (Dans l'hypothèse nulle $S_2 = \sum_i e_i^2$).

Dans le cas du modèle normal (M₀), T, R et S_2 sont aléatoires et $\frac{Q_T}{Q_R}$ est distribué comme $F_{t(r-1)}^{t-1}$; on en déduit que $\frac{T}{S_2}$ suit une distribution dite "distribution bêta" dont la densité de probabilité est :

$$\beta(x; p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \text{ en posant } \begin{cases} x = \frac{T}{S_2} \\ p = \frac{t-1}{2} \\ q = \frac{t(r-1)}{2} \end{cases}$$

Si $\frac{T}{S_2}$ est distribué comme bêta, $\frac{Q_T}{Q_R}$ est distribué comme F.

Les deux premiers moments de la distribution bêta sont :

$$\begin{aligned} \left[E \left(\frac{T}{S_2} \right) \right]_{M_0} &= \frac{p}{p+q} = \frac{t-1}{rt-1} \\ \left[\text{Var} \left(\frac{T}{S_2} \right) \right]_{M_0} &= \frac{2(r-1)(t-1)t}{(rt-1)^2 (rt+1)} \end{aligned}$$

On voit que :

$$\left[\text{Var} \left(\frac{T}{S_2} \right) \right]_{M_0} \sim \frac{2(t-1)}{r^2 t^2} \quad \text{pour } r \text{ grand}$$

Or Kempthorne a calculé les moments de $\frac{T}{S_2}$ dans le cas du modèle (M_1) et il a trouvé, toujours dans l'hypothèse nulle $t_j = 0$, qu'on avait :

$$\begin{aligned} \left[E\left(\frac{T}{S_2}\right) \right]_{M_1} &= \frac{t-1}{rt-1} = \left[E\left(\frac{T}{S_2}\right) \right]_{M_0} \\ \left[\text{Var}\left(\frac{T}{S_2}\right) \right]_{M_1} &\sim \frac{2(t-1)}{r^2 t^2} \quad \text{pour } r \text{ grand} \end{aligned}$$

Reste à savoir à partir de quelle valeur r peut être considéré comme grand. Kempthorne indique qu'il a étudié quelques cas avec $r=4$ (qu'il considère comme une valeur petite de r) et qu'il a trouvé que même dans ce cas, le test suivant le modèle normal (M_0) pouvait constituer une approximation acceptable.

On peut évidemment se demander encore si l'identité des deux premiers moments constitue un critère suffisant de similitude des distributions surtout dans les régions des faibles probabilités utilisées pour les tests.

2/ Modèle avec additivité au sens large.

Admettons maintenant qu'il y ait en plus des variations entre plots e_i une erreur de mesure ϵ'_{jk} (l'indice k repérant la répétition du traitement j) et que $\epsilon'_{jk} = N(0, \sigma_{\epsilon'}^2)$ les ϵ'_{jk} étant indépendants. (*)

Il est bien clair qu'avec ce modèle, il faudra ajouter $\sigma_{\epsilon'}^2$ aux espérances mathématiques des carrés moyens du tableau 1.

Si les ϵ'_{jk} sont grands devant les e_i , on se trouvera pratiquement dans le cas du modèle (M_0) et la randomisation n'a plus qu'une importance secondaire. On conçoit donc bien que le modèle avec additivité au sens large (qu'il semble raisonnable d'admettre dans beaucoup de cas pratiques) est intermédiaire entre le modèle normal (M_0) et le modèle de randomisation (M_1).

On peut donc penser que le test de $t_j = 0$ en utilisant une loi de F est alors une approximation encore meilleure dans ce modèle que dans (M_1).

Bien entendu, il n'est pas possible d'estimer $\sigma_{\epsilon'}^2$.

B - Blocs randomisés complets (réf. (1) p. 136 et suite)
(réf. (2) p. 958)

Les traitements sont repérés j ($j=1, 2, \dots, t$)

Les blocs sont repérés u ($u=1, 2, \dots, r$)

Les plots à l'intérieur des blocs sont repérés v ($v=1, 2, \dots, t$)

1/ Modèle avec additivité au sens strict.

Le résultat du traitement déterminé j observé sur le bloc déterminé u est une variable aléatoire qui s'écrit :

$$(M_1) \quad y_{uj} = \mu + b_u + t_j + \sum_v \delta_{uv}^j e_{uv}$$

(*) Nous n'envisagerons pas dans cette note le cas où les ϵ'_{jk} ne seraient pas distribués normalement.

Les grandeurs μ , b_u , t_j et e_{uv} sont des variables certaines vérifiant les conditions :

$$\begin{aligned} \sum_u b_u &= 0 & \sum_v e_{uv} &= 0 \text{ quel que soit } u \\ \sum_j t_j &= 0 \end{aligned}$$

Les δ_{uv}^j sont les variables aléatoires déjà définies, les plots étant repérés par uv (au lieu de i). On a évidemment $\sum_j \delta_{uv}^j = 1$ quel que soit uv .

La moyenne observée du traitement j est une variable aléatoire qui s'écrit :

$$y_{.j} = \frac{Y_{.j}}{r} = \mu + t_j + \frac{1}{r} \sum_{uv} \delta_{uv}^j e_{uv}$$

On trouve facilement que l'on a :

$$\begin{aligned} E(y_{.j}) &= \mu + t_j \\ \text{var}(y_{.j}) &= \frac{t-1}{t} \frac{\sigma^2}{r} \text{ en posant } \sigma^2 = \frac{1}{r(t-1)} \sum_{uv} e_{uv}^2 \end{aligned}$$

Test de l'hypothèse nulle $t_j = 0$.

La somme de carrés totale centrée peut être décomposée en une somme de 3 termes comme dans le cas d'une analyse de variance classique à 2 dimensions. On trouve que l'on a :

Tableau 2 (modèle M_1)

Source de variation	Somme de carrés	ddl	E(carré moyen)
Entre blocs	$B = \frac{\sum_u Y_u^2}{t} - (TC)$	$r-1$	$Q_B = \frac{t}{r-1} \sum_u b_u^2$ (non aléatoire)
Entre traitements	$T = \frac{\sum_j Y_{.j}^2}{r} - (TC)$	$t-1$	$E(Q_T) = \sigma^2 \times \frac{r}{t-1} \sum_j t_j^2$
Résiduelle	R (par différence)	$(r-1)(t-1)$	$E(Q_R) = \sigma^2$
Totale	$S_2 = \frac{\sum_{uj} Y_{uj}^2}{rt} - (TC)$	$rt-1$	$E(Q_{S_2}) = \frac{1}{rt-1} (\sum_{uv} e_{uv}^2 + r \sum_j t_j^2 + t \sum_u b_u^2)$ (non aléatoire si $t_j = 0$ q. q. soit j)

La somme $S_1 = T + R = S_2 - B$ n'est pas aléatoire dans l'hypothèse nulle et le hasard ne joue que sur le fractionnement de S_1 entre T et R .

Au lieu d'étudier la distribution de $\frac{Q_T}{Q_R}$, il est donc plus simple d'étudier la distribution de $\frac{T}{S_1}$ dans l'hypothèse nulle.

C'est ce qu'ont fait Welch et Pitman dans des articles exposés dans *Biometrika* en 1937 et 1938 ; nous ne possédons pas pour l'instant ces articles mais Kempthorne en expose les principales conclusions dans le cas particulier où $\sum_v e_{uv}^2$ est constant, c'est-à-dire, le cas où les variances entre plots sont les mêmes dans tous les blocs.

Le calcul montre que, dans l'hypothèse nulle, on a alors :

$$\left[E \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_1} = \frac{1}{r}$$

$$\left[\text{var} \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_1} = \frac{2(r-1)}{(t-1)r^3}$$

Considérons maintenant le modèle factoriel normal à 2 dimensions :

$$(M_0) \quad y_{uj} = \mu + b_u + t_j + \epsilon_{uj} \quad \epsilon_{uj} = N(0, \sigma_\epsilon^2)$$

$$\sum b_u = 0$$

$$\sum t_j = 0$$

On admettra un tel modèle si on considère par exemple que les blocs sont homogènes mais que les mesures se font avec une erreur.

Le dépouillement des résultats suivant une analyse de variance à 2 dimensions correspond au tableau précédent mais les espérances mathématiques des carrés moyens sont

Tableau 3 (Modèle M_0)

Source de variation	Somme de carrés	ddl	E(carré moyen)
Entre blocs	B	r-1	$E(Q_B) = \sigma_\epsilon^2 + \frac{t}{r-1} \sum_u b_u^2$
Entre traitements	T	t-1	$E(Q_T) = \sigma_\epsilon^2 + \frac{r}{t-1} \sum_j t_j^2$
Résiduelle	R	(r-1)(t-1)	$E(Q_R) = \sigma_\epsilon^2$
Totale	S_2	rt-1	

Notons qu'avec ce modèle, les 4 termes B, T, R et S_2 sont considérés comme aléatoires.

Dans l'hypothèse nulle $t_j = 0$, le rapport $\frac{Q_T}{Q_R}$ est distribué comme $F_{(r-1)(t-1)}^{t-1}$ et le rapport $\frac{T}{T+R} = \frac{T}{S_1}$ suit une distribution bêta. (Cf. plus haut) de paramètres :

$$\left| \begin{array}{l} p = \frac{t-1}{2} \\ q = \frac{(t-1)(r-1)}{2} \end{array} \right.$$

On en déduit que toujours dans l'hypothèse nulle :

$$\left[E \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_0} = \frac{t-1}{(r-1)(t-1)+(t-1)} = \frac{1}{r} = \left[E \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_1}$$

$$\left[\text{var} \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_0} = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \sim \frac{2(r-1)}{(t-1)r^3} = \left[\text{var} \left(\frac{T}{S_1} \right) \right]_{M_1}$$

si $r(t-1) \gg 2$

Pitman a vérifié de plus que les moments centrés d'ordre 3 et 4 de $\frac{T}{S_1}$ dans l'hypothèse nulle étaient voisins pour (M_0) et (M_1) .

Kemphorne a étudié ce qui se passait si les variances entre plots étaient différentes. Sa conclusion est que le test F risque alors de sous-estimer le niveau de signification, c'est-à-dire, que le risque de première espèce "vrai" serait plutôt inférieur au risque nominal.

2/ Modèle avec additivité au sens large.

Le nouveau modèle s'obtient en ajoutant au modèle (M_1) une erreur $\epsilon'_{uj} = N(0, \sigma_E^2)$. Nous pouvons répéter les remarques déjà faites à propos des plans complètement randomisés : si les ϵ'_{uj} sont grands devant les e_{uv} , on se trouve pratiquement dans le cas du modèle (M_0) . Dans le cas général, le nouveau modèle est intermédiaire entre (M_0) et (M_1) . Notons cependant qu'avec ce modèle, il n'est toujours pas possible de tester l'effet bloc car les e_{uv} n'interviennent pas dans le carré moyen Q_b alors qu'ils interviennent dans Q_R .

C - Plan du type split-plot (Réf. (1), p. 370 et suite).

Les traitements sont repérés j ($j = 1, 2, \dots, t$)

Les sous-traitements sont repérés k ($k = 1, 2, \dots, s$)

Les blocs sont repérés u ($u = 1, 2, \dots, r$)

Les plots à l'intérieur des blocs sont repérés v ($v = 1, 2, \dots, t$)

Les split-plots à l'intérieur des plots sont repérés w ($w = 1, 2, \dots, s$)

1/ Modèle avec additivité au sens strict.

Le résultat observé pour le bloc u avec le traitement j et le sous-traitement k s'écrit :

$$(M_1) \quad y_{ujk} = \mu + b_u + t_j + \sum_v \delta_{uv}^j e_{uv} + s_k + (ts)_{jk} + \sum_{vw} \delta_{uvw}^{jk} e'_{uvw}$$

Dans ce modèle figurent les variables certaines $\mu, b_u, t_j, e_{uv}, s_k, (ts)_{jk}$ et e'_{uvw} vérifiant les conditions :

$$\left. \begin{array}{l} \sum_j t_j = 0 \\ \sum_u b_u = 0 \text{ etc.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \sum_j (ts)_{jk} = 0 \text{ q. q. soit } k \\ \sum_k (ts)_{jk} = 0 \text{ " " " } j \\ \sum_v e_{uv} = 0 \text{ q. q. soit } v \\ \sum_w e'_{uvw} = 0 \text{ " " " } uv \end{array}$$

et les variables aléatoires :

δ_{uv}^j déjà définie dans le cas de blocs randomisés complets,
 δ_{uvw}^{jk} telle que $\delta_{uvw}^{jk} = 1$ si le traitement j et le sous-traitement k sont appliqués au split-plot uvw .

Le calcul des espérances mathématiques des expressions faisant intervenir les δ_{uvw}^{jk} s'effectue en utilisant les relations générales et en remarquant que l'on a :

$$P(\delta_{uvw}^{jk} = 1) = \frac{1}{ts}$$

$$P(\delta_{uvw'}^{jk} = 1 \mid \delta_{uvw}^{jk} = 1) = 0 \quad (w' \neq w)$$

$$P(\delta_{uvw'}^{jk'} = 1 \mid \delta_{uvw}^{jk} = 1) = \frac{1}{s-1} \quad (k' \neq k)$$

etc.

Par exemple, on voit immédiatement que :

$$E(y_{ujk}) = \mu + b_u + t_j + s_k + (ts)_{jk}$$

puisque $E(\delta_{uv}^j) = P(\delta_{uv}^j = 1) = \frac{1}{t}$

et $E(\delta_{uvw}^{jk}) = P(\delta_{uvw}^{jk} = 1) = \frac{1}{ts}$

sont constants.

Test des hypothèses nulles.

Tableau 4 (modèle M₁)

$$(TC) = \frac{(Y_{...})^2}{rts}$$

	Source de variation	Somme de carrés	ddl	E(carré moyen)
I - Décomposition de la somme de carrés entre plots	Entre blocs	$B = \sum_u \frac{Y_{u..}^2}{ts} - (TC)$	r-1	$Q_B = \frac{st}{r-1} \sum_u b_u^2$ (non aléatoire)
	Entre traitements	$T = \sum_j \frac{Y_{.j.}^2}{rs} - (TC)$	t-1	$E(Q_T) = \sigma^2 + \frac{rs}{t-1} \sum_j t_j^2$
	Intra-bloc	$IB = \sum_{uj} \frac{Y_{uj.}^2}{s} - B - T - (TC)$	(r-1)(t-1)	$E(Q_{IB}) = \sigma^2$
	Totale entre plots	$S_2^p = \sum_{uj} \frac{Y_{uj.}^2}{s} - (TC)$	rt-1	$E(Q_{S_2^p})$ non aléatoire si $t_j = 0$ q. q. soit j
II - Décomposition de la somme de carrés entre split-plots	Totale entre plots	$S_2^p = \sum_{uj} \frac{Y_{uj.}^2}{s} - (TC)$	rt-1	$E(Q_{S_2^p})$
	Entre sous-traitements	$T' = \sum_k \frac{Y_{.k.}^2}{rt} - (TC)$	s-1	$E(Q_{T'}) = \sigma^2 + \frac{rt}{s-1} \sum_k s_k^2$
	Interaction T x T'	$TT' = \sum_{jk} \frac{Y_{.jk.}^2}{st} - T - T' - (TC)$	(t-1)(s-1)	$E(Q_{TT'}) = \sigma^2 + \frac{r}{(t-1)(s-1)} \sum_{jk} (st^2)_{jk}$
	Intra-plot	IP = (par différence)	(r-1)t(s-1)	$E(Q_{IP}) = \sigma^2$
	Totale entre splits-plots	$S_2 = \sum_{ujk} Y_{ujk}^2 - (TC)$	rst-1	$E(Q_{S_2})$

Ceci en posant : $\sigma^2 = \frac{s}{r(t-1)} \sum_{uv} e_{uv}^2$

$$\sigma^2 = \frac{1}{rt(s-1)} \sum_{uvw} e_{uvw}^2$$

La somme de carrés totale $S_2 = \sum_{u,j,k} (y_{ujk} - \bar{y} \dots)^2$ peut être décomposée de la manière habituelle en une somme de sommes de carrés partiels. Pour plus de clarté, nous scinderons cette décomposition en deux parties : (voir tableau 4).

La somme $S_1^p = T + IB = S_2^p - B$ n'est pas aléatoire si $t_j = 0$ quel que soit j et le hasard ne joue alors que sur le fractionnement de cette somme entre T et IB .

La somme $S_1 = T' + T\Gamma' + IP = S_2 - S_2^p$ n'est pas aléatoire si :

$$s_k = 0 \text{ quel que soit } k$$

$$(ts)_{jk} = 0 \text{ quels que soient } j \text{ et } k$$

et le hasard ne joue alors que sur le fractionnement de cette somme entre T' , $T\Gamma'$ et IP .

Le dépouillement des résultats suivant le modèle hiérarchique mixte classique :

$$(M_0) \quad y_{ujk} = \mu + b_u + t_j + \eta_{uj} + s_k + (ts)_{ik} + \epsilon_{ujk}$$

dans lequel μ , b_u , t_j , s_k , $(ts)_{jk}$ sont définis comme plus haut alors que η_{uj} et ϵ_{ujk} sont des variables aléatoires normales indépendantes supposées tirées de populations infinies avec :

$$E(\eta_{uj}) = 0 \quad \text{var}(\eta_{uj}) = \sigma_p^2$$

$$E(\epsilon_{ujk}) = 0 \quad \text{var}(\epsilon_{ujk}) = \sigma_E^2$$

conduit à la même décomposition de la somme des carrés totale et des degrés de liberté mais avec les espérances mathématiques :

$$E(Q_B) = \sigma_E^2 + s \sigma_p^2 + \frac{st}{r-1} \sum_u b_u^2$$

$$E(Q_T) = \sigma_E^2 + s \sigma_p^2 + \frac{st}{t-1} \sum_j t_j^2$$

$$E(Q_{IB}) = \sigma_E^2 + s \sigma_p^2$$

$$E(Q_{T'}) = \sigma_E^2 + \frac{rt}{s-1} \sum_k s_k^2$$

$$E(Q_{TT'}) = \sigma_E^2 + \frac{r}{(t-1)(s-1)} \sum_{jk} (ts)_{jk}^2$$

$$E(Q_{IP}) = \sigma_E^2$$

Dans ce modèle (M_0), on teste l'effet Γ par rapport à Q_{IB} et les effets T' et TT' par rapport à Q_{IP} en utilisant le test F . On peut également tester l'effet B en formant $\frac{Q_B}{Q_{IB}}$ ou tester l'hypothèse $\sigma_p^2 = 0$ en formant $\frac{Q_{IB}}{Q_{IP}}$. Dans quelle mesure de tels tests sont-ils encore possibles dans le modèle de randomisation ?

Tout d'abord, comme le fait remarquer Kempthorne, il n'y a aucune raison pour que l'on ait $\sigma^2 > \sigma'^2$ car les variations entre e'_{uvv} ne s'introduisent pas dans les variations entre e_{uv} ; il n'est donc pas question de comparer Q_{IB} à Q_{IP} . Les seuls tests que l'on peut envisager sont les suivants :

1/ Nullité en moyenne de l'effet T en formant $\frac{Q_T}{Q_{IB}}$

2/ Nullité en moyenne de l'effet T' en formant $\frac{Q_{T'}}{Q_{IP}}$

3/ Nullité de l'interaction T x T', c'est-à-dire nullité au sens strict, des effets T et T' si 1/ et 2/ sont vérifiés en formant $\frac{Q_{TT'}}{Q_{IP}}$

La décomposition de la somme de carrés entre plots exposée plus haut (décomposition I) est exactement celle des blocs randomisés complets que nous avons étudiée plus haut. L'étude effectuée dans ce cas restant donc valable, nous admettrons qu'on peut, dans l'hypothèse nulle, approcher la loi de $\frac{Q_T}{Q_{IB}}$ par une loi de F avec (r-1) et (r-1)(t-1) degrés de liberté si $r(t-1) \gg 2$.

Le problème de la validité de l'approximation des lois de $\frac{Q_{T'}}{Q_{IP}}$ et $\frac{Q_{TT'}}{Q_{IP}}$ par des lois de F ne semble pas avoir été traité mais il paraît très voisin du précédent ; il faudrait montrer que les lois de $\frac{T}{T+TT'+IP}$ et $\frac{TT'}{T+TT'+IP}$ suivent à peu près des distributions bêtas ce qui, toujours par analogie avec le cas précédent, semble assez naturel, si on prend comme hypothèse nulle $s_k = 0$ et $(ts)_{jk} = 0$. En est-il de même quand on suppose, par exemple $s_k \neq 0$ et qu'on veut tester $(ts)_{jk} = 0$?

2/ Modèles avec additivité au sens large.

On obtient un tel modèle en ajoutant une erreur ϵ'_{ujk} au modèle (M_1). $\epsilon'_{ujk} = N(0, \sigma_\epsilon'^2)$. Si les ϵ'_{ujk} sont grands devant les e'_{uvw} , on voit immédiatement qu'il suffit de remplacer dans les tableaux précédents σ^2 par $\sigma_\epsilon'^2$ et l'analyse de variance au niveau inférieur (c'est-à-dire, tout le test résultant de la décomposition II) se fera comme dans le cas du modèle M_0 . On pourrait imaginer qu'il y ait en plus une autre erreur aléatoire η'_{uj} liée à un plot donné et due, par exemple, à des variations aléatoires dans les applications des traitements aux plots, ces variations pouvant être considérées comme tirées au hasard dans une population normale infinie.

Si les η'_{uj} sont grands devant les e_{uv} , on se ramène pratiquement au modèle M_0 . On conçoit donc bien que les modèles de randomisation avec additivité au sens large sont intermédiaires entre les modèles M_0 et M_1 .

Etant donné que les modèles de randomisation au sens large semblent à priori les plus aptes à représenter convenablement la réalité, on peut penser le test des effets T, T' et T x T' peut-être effectué convenablement de la façon habituelle. Nous serons, par contre, plus réservé en ce qui concerne le test de l'effet "bloc" ou la comparaison de Q_{IB} à Q_{IP} qui ne sont justifiés que dans le cas du modèle M_0 ; ces tests n'ont d'ailleurs, en général, qu'un intérêt pratique réduit.

D - Carrés latins. Réf. (1) p. 189
Réf. (2) p. 962

Les traitements sont repérés $j \quad j = (1, 2, \dots, t)$

Les lignes sont repérées $u \quad u = (1, 2, \dots, t)$

Les colonnes sont repérées $v \quad v = (1, 2, \dots, t)$

Un plot est donc repéré uv.

La somme des résultats observés pour le traitement j peut s'écrire dans le modèle d'additivité au sens strict :

(M₁) $T_j = \mu + l_u + c_v + t_j + \sum_{uv} \delta_{uv}^j e_{uv}$
 μ, l_u, c_v, t_j et e_{uv} étant des variables certaines vérifiant les conditions $\sum_u l_u = 0$

$$\left| \begin{array}{l} \sum_u e_{uv} = 0 \text{ quel que soit } u \\ \sum_v e_{uv} = 0 \text{ quel que soit } v \end{array} \right. \text{ etc.}$$

Les δ_{uv}^j sont, comme plus haut, des variables aléatoires dont on connaît les lois de probabilité :

$$P(\delta_{uv}^j = 1) = \frac{1}{t}$$

$$P(\delta_{u',v}^j = 1 \mid \delta_{uv}^j = 1) = 0 \quad u' \neq u$$

$$P(\delta_{uv,v'}^j = 1 \mid \delta_{uv}^j = 1) = 0 \quad v' \neq v$$

etc.

Test de l'hypothèse nulle $t_j = 0$.

La somme de carrés centrée entre observations peut être décomposée en une somme de 4 termes comme lorsqu'on utilise le modèle normal :

$$(M_0) \quad y_{uvj} = \mu + l_u + c_v + t_j + \epsilon_{uvj}$$

$$\epsilon_{uvj} = N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad \sum_u l_u = 0 \quad \text{etc.}$$

Mais avec le modèle (M₁), on trouve pour espérances mathématiques des carrés moyens :

Tableau 5

Source de variation	Somme de carrés	Degrés de liberté	E(carrés moyens)
Entre lignes	L	t-1	$Q_L = \frac{t}{t-1} \sum_u l_u$ (non aléatoire)
Entre colonnes	C	t-1	$Q_C = \frac{t}{t-1} \sum_v c_v^2$ (non aléatoire)
Entre traitements	T	t-1	$E(Q_T) = \frac{t}{t-1} \sum_j t_j^2 + \frac{1}{(t-1)} \sum_{uv} e_{uv}^2$
Résiduelle	R	(t-1)(t-2)	$E(Q_R) = \frac{1}{(t-1)^2} \sum_{uv} e_{uv}^2$
Totale	S ₂	t ² - 1	$E(Q_{S_2})$ (non aléatoire si $t_j = 0$ q. q. soit j)

$$(\text{Nous poserons } \sigma^2 = \frac{1}{(t-1)^2} \sum_{uv} e_{uv}^2)$$

alors qu'avec le modèle (M_0), les espérances mathématiques des carrés moyens sont :

$$E(Q_L) = \frac{t}{t-1} \sum_u l_u^2 + \sigma_E^2$$

$$E(Q_C) = \frac{t}{t-1} \sum_v c_v^2 + \sigma_E^2$$

$$E(Q_T) = \frac{t}{t-1} \sum_j t_j^2 + \sigma_E^2$$

$$E(Q_R) = \sigma_E^2$$

Pour justifier l'assimilation du rapport $\frac{Q_T}{Q_R}$ à une distribution de F dans l'hypothèse nulle pour le modèle M_1 , on est conduit, comme dans le cas précédent, à comparer à une distribution bêta la distribution du rapport :

$$U = \frac{T}{T+R} = \frac{T}{S_1} \quad \text{avec } S_1 = S_2 - L - C \text{ constant dans l'hypothèse nulle.}$$

On montre facilement que $E(U) = \frac{1}{t-1}$, mais l'étude de $\text{var}(U)$ est beaucoup plus difficile.

Le problème a été étudié pour $t = 5$ et $t = 6$ par Welch qui a trouvé que cette variance dépendait notamment du groupe de carrés latins dont le carré latin utilisé provient (pour $t \geq 4$, on peut distinguer des groupes de transformation dans l'ensemble des carrés latins possibles).

Dans un cas particulier Welch a trouvé en utilisant des données artificiellement construites que la proportion de valeurs de U dépassant la valeur correspondant à $F_{0,05}$ variait entre 2,7 à 6,2%.

L'opinion de Kempthorne peut se résumer ainsi :

- pour $t \geq 7$, l'utilisation du test F semble devoir être assez satisfaisante,
- pour $t = 6$ ou $t = 5$, on ne peut rien dire de bien net. (C'est le problème qu'a étudié Welch ; nous n'avons pas actuellement les articles en question) ;
- pour $t \leq 4$, il y a intérêt à recourir à des tests non paramétriques directs du genre de ceux envisagés au paragraphe III.

Par exemple, on peut se baser sur le fait que la somme $T + R$ est constante pour étudier dans l'hypothèse nulle la distribution des divers $\frac{Q_T}{Q_R}$ possibles et lui comparer le $\frac{Q_T}{Q_R}$ observé. Kempthorne arrive d'ailleurs à la conclusion qu'un unique carré randomisé 3×3 est sans valeur et qu'il faut des répétitions.

Quand il y a une erreur de mesure (additivité au sens large), on peut penser comme plus haut qu'on doit se rapprocher du modèle (M_0) et que le test F est alors mieux justifié.

V - CONCLUSION -

L'utilisation du test F pour le dépouillement de plans d'essais faisant intervenir des processus de randomisation semble se justifier assez bien dans les cas suivants :

<u>Type de plan</u>	<u>Tests</u>	<u>Conditions</u>
(A) Plans complètement randomisés	Effet traitement T	r grand
(B) Blocs randomisés complets	Effet traitement T	$r(t-1) \gg 2$
(C) Split-plot	Effet traitement T " sous-traitement T' " interaction TT'	$r(t-1) \gg 2$
(D) Carré latin	Effet traitement T	$t \geq 7$

Par contre, certains tests, tels que celui de l'effet bloc dans le plan (B) où la comparaison des 2 résiduelles dans le plan (C) ne se justifient pas dans la théorie de la randomisation. Ces tests n'ont d'ailleurs pas, en général, d'intérêt pratique.

Par ailleurs, on peut penser que l'approximation par le test F doit être encore meilleure quand il y a une erreur de mesure normale (additivité au sens large).

Les conclusions concernant les carrés latins semblent peu nettes et le problème mériterait d'être étudié de plus près.