

REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. BOREL

Étude sur les marges à prévoir dans les lancements de fabrication pour tenir compte des déchets

Revue de statistique appliquée, tome 7, n° 1 (1959), p. 17-46

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1959__7_1_17_0

© Société française de statistique, 1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE SUR LES MARGES A PRÉVOIR DANS LES LANCEMENTS DE FABRICATION POUR TENIR COMPTE DES DÉCHETS

G. BOREL

Directeur du Contrôle de la Qualité
à la Société "Le Matériel Téléphonique"

Dans les lancements de fabrication on majore les quantités strictement nécessaires pour tenir compte des rebuts de fabrication et d'assemblage. Mais ces déchets présentent un caractère aléatoire qui oblige à prendre une marge plus grande que celle observée en moyenne. Il en résulte en fin de fabrication des reliquats de pièces détachées qui représentent le plus souvent des pertes (de l'ordre de 1 % du chiffre d'affaires dans des fabrications du type radio-professionnelle). Ce caractère aléatoire des déchets est, en général, attribué au fait que les causes de pertes sont imprévisibles, ce qui semble a priori les faire échapper à toute analyse. Mais il est à remarquer que même si les causes de pertes étaient parfaitement connues et parfaitement stables, le fait que le nombre des déchets pour chaque type de pièce détachée soit de l'ordre de la dizaine (1 000 équipements x 1 % de déchet moyen = 10 pièces rebutées) conduit à leur affecter une loi de probabilité binomiale qui ouvre la porte à l'analyse statistique. Et l'on trouve que les reliquats ainsi expliqués sont du même ordre de grandeur que ceux que l'on constate dans la pratique.

Dans ce domaine aussi l'analyse statistique rend compte de phénomènes en apparence absolument fortuits et permet de définir une méthode rationnelle de calcul des marges à inclure dans les lancements. En outre, il apparait qu'il y aurait intérêt du point de vue de l'économie générale à ce qu'une tolérance sur les quantités d'équipements à livrer soit toujours prévue dans les contrats commerciaux.

I - EXPOSE DU PROBLEME

1. 1/ Pendant l'exécution d'une commande, des déchets en matières premières, pièces détachées et organes, se produisent lors des usinages, des inspections, des assemblages, des essais, etc. En particulier, les inspections, qu'elles s'effectuent unitairement ou par échantillonnage, laissent inévitablement passer un certain pourcentage de pièces défectueuses qui se révèlent lors des essais et viennent majorer les déchets propres aux opérations d'assemblage.

Tous ces déchets qui peuvent représenter, selon le type de pièce, de 0,5 % à 3 % des besoins stricts, soit dans des fabrications du type radio professionnelle de 0,25 % à 1,5 % du prix de vente, sont loin d'être négligeables dans l'ensemble du prix de revient.

La première difficulté que l'on rencontre pour les analyser vient du fait que leur importance moyenne est mal connue. Lors du premier lancement d'un équipement donné, l'importance des déchets ne peut être prévue que très approximativement selon le type de pièce (condensateurs, tubes, etc.) d'après l'ex-

périence générale des fabrications. Lorsqu'il s'agit d'un deuxième ou troisième lancement d'un même type d'équipement, l'importance des déchets peut alors être évaluée pièce par pièce avec une meilleure précision. Mais il faudrait avoir fabriqué un très grand nombre d'équipements pour connaître avec une précision satisfaisante la valeur moyenne des déchets. Nous admettons, toutefois, que cette valeur moyenne existe comme une limite théorique plus ou moins bien connue(1).

La tendance naturelle serait alors de prévoir dans l'expression des besoins une majoration égale au pourcentage moyen de déchets. Mais on constate que les déchets se manifestent d'une façon aléatoire. Les déchets réels sont tantôt inférieurs à la moyenne, tantôt supérieurs.

Dans ce dernier cas, il est nécessaire de passer des commandes supplémentaires qui accroissent les frais administratifs, compromettent l'homogénéité des stocks et, en outre, font courir le risque de ne pas pouvoir assembler en temps voulu le nombre d'équipements prévu. Quand les déchets sont inférieurs à la moyenne, il en résulte des reliquats en fin de commande qui représentent toujours une perte. Si aucune nouvelle commande ne fait suite à celle en cause, la perte est totale. Même dans le cas contraire, il y a lieu d'appliquer aux reliquats un coefficient de dépréciation pour diverses raisons (frais de magasinage, frais financiers d'investissements, risques de détérioration et surtout risques techniques de vieillissement, ...).

1.2/ L'objet de la présente étude n'est pas tant d'analyser les causes de déchets pour tenter d'en réduire le pourcentage moyen que d'en analyser le foisonnement dû à leur caractère aléatoire pour tenter de réduire les pertes énumérées ci-dessus.

- (1) En réalité, la notion de valeur moyenne elle-même est discutable. Elle ne conviendrait que si l'expérience passée portait sur un nombre infini ou très grand d'équipements (Si nous avons à lancer 1 000 équipements, il faudrait en avoir déjà fabriqué 10 000 pour en déduire une valeur moyenne de déchets utilisable dans de bonnes conditions). Quand notre expérience passée ne porte que sur 2 000 équipements par exemple, il semble que le problème se présente comme suit. Pour utiliser toutes les "informations" que nous a rapportées la fabrication des 2 000 équipements précédents, nous imaginerons que nous prélevons le nouveau lot de 1 000 pièces dans le lot déjà utilisé de 2 000. Si ce lot déjà utilisé contenait 20 pièces défectueuses, quelle est la probabilité pour que les 1 000 pièces prélevées contiennent ... 8, 9, 10, 11, 12 ... pièces défectueuses ?

Le problème théorique ainsi posé est celui des univers finis qui fait appel à la loi hypergéométrique. Il exige des calculs très lourds et dans la plupart des applications pratiques, on lui substitue le problème approché qui utilise la notion de pourcentage moyen de rebuts.

L'incidence de l'erreur ainsi commise en faisant cette approximation est évidemment de minimiser les sécurités nécessaires dans les marges à prévoir pour faire face aux rebuts. Les chiffres déduits du calcul utilisant cette notion de valeur moyenne seront des chiffres minima.

Si le sens de l'erreur est connu, son importance est plus difficile à chiffrer. En outre, il y aurait peu d'intérêt à le faire car dans la pratique cette importance est moindre que ce que pourrait indiquer la théorie. En effet, quand on estime un pourcentage moyen de rebuts on n'utilise pas seulement les enseignements des lancements précédents mais on utilise aussi l'expérience générale des fabrications qui, elle, résulte de la théorie des univers infinis et à laquelle, par conséquent, la notion de pourcentage moyen est susceptible de s'appliquer.

Encore se bornera-t-on à certaines causes de fluctuation. Bien que les causes de déchets soient multiples et très diverses, on peut tenter de les classer sous trois rubriques allant du purement fortuit au statistiquement prévisible :

a) les causes purement techniques qui ne seraient prévisibles qu'à condition d'effectuer des expériences préalables : insuffisance de performances des pièces détachées nécessitant un tri, fragilité excessive de certaines composantes etc. On a à faire dans ces catégories à une succession de cas particuliers ;

b) les causes plus ou moins fortuites et plus ou moins prévisibles telles que la formation plus ou moins poussée des ouvriers, les aléas dans le nombre des essais à effectuer, les incidents de fabrication, etc. D'une façon générale, on peut classer dans cette catégorie les facteurs qui introduisent un manque de stabilité dans les causes de rebuts ou un manque d'homogénéité dans l'ambiance générale des fabrications ;

c) enfin, interviennent des causes indépendantes de tous les aléas et qui se manifesteraient même si les déchets suivaient des lois rigoureuses et dans l'hypothèse d'une stabilité parfaite des fabrications (qualité des livraisons homogène, habileté des ouvriers stable, fréquence des incidents constante). Ces causes tiennent essentiellement au fait que les quantités d'équipements, même lorsqu'elles s'expriment en milliers, ne sont pas assez importantes pour que la loi des grands nombres puisse leur être appliquée sans correction.

Ce dernier aspect du problème peut être soumis au calcul statistique. On chiffrera l'importance prévisible des fluctuations purement statistiques qui sont de toutes façons inévitables dans les meilleures conditions et ayant trouvé des ordres de grandeur comparables à ceux des variations réelles, on en déduira que ces fluctuations statistiques rendent compte de la majeure partie des variations réelles, ce qui justifiera les méthodes rationnelles de lancement qu'il est possible d'élaborer par le calcul statistique.

D'ailleurs nous indiquerons (au § 3.3) la possibilité de tenir compte des fluctuations inhérentes au manque d'homogénéité des causes de déchets signalées au § b) ci-dessus en ajoutant les deux variations.

1.3/ Avant de poursuivre l'exposé, il semble nécessaire d'expliquer sur des exemples la nature de ces fluctuations statistiques que l'on se propose d'étudier. En effet, elles ne tombent pas sous le sens bien qu'elles expliquent en majeure partie les variations réelles de déchets.

Si une commande est de 100 équipements et si le pourcentage moyen de déchets est de 1 %, que ces déchets résultent de pièces défectueuses ou qu'ils résultent de détériorations intervenues lors des assemblages, on peut considérer que l'on a à faire à une population infinie contenant 1 % de défectueux et dans laquelle on prélève au hasard un échantillon de 100 pièces. Cet échantillon ne comprend pas forcément 1 pièce défectueuse. Avec de la chance, il n'en contiendra aucune. Avec de la malchance, il en contiendra 2, 3 ou plus. Le nombre 1 est simplement le nombre moyen.

On trouve, par exemple :

Echantillon de 100 pièces Pourcentage moyen de défectueux 1 %		
Nombre de défectueux trouvés k	Probabilité de trouver le nombre de défectueux indiqué ci-contre : Pr (k)	Probabilité de trouver un nombre égal ou inférieur à celui indiqué ci-contre : Pr (o-k) (1)
0	0,3679	0,3679
1	0,3679	0,7358
2	0,1839	0,9197
3	0,0613	0,9810
4	0,0153	0,9963
5	0,0031	0,9994
6	0,0005	0,9999
7	0,0001	1

On voit que pour avoir 99 chances sur 100 de ne pas manquer de la composante en cause, il faut prendre une marge de sécurité de 4 unités laissant en moyenne un reliquat de 3 unités en fin de commande.

1. 4/ Les agents de production connaissent bien ces faits, car lorsqu'il s'agit d'une pièce difficile à approvisionner, ils prennent une "sécurité supplémentaire" en doublant ou en triplant la marge de déchets probable afin d'être certains de ne pas courir de risques d'arrêt des fabrications. Leur expérience et leur intuition leur enseignent qu'il convient de prendre une marge d'autant plus grande que la valeur de la pièce est plus faible, c'est-à-dire que le reliquat à déprécier en fin de commande aura moins de valeur. Ils acquièrent ainsi une "sécurité" au moindre prix. Par contre, lorsqu'il s'agit d'organes chers, l'expérience pratique conduit à ne commander que le strict nécessaire et à passer des commandes supplémentaires au fournisseur au fur et à mesure des mises aux rebuts, surtout si les délais de livraison sont brefs et si le manque d'homogénéité des produits livrés n'est pas à craindre. De même, lorsque les lancements portent sur une quantité importante d'équipements, les marges sont prises peu supérieures au pourcentage moyen de déchets, car, intuitivement, on comprend que la loi des grands nombres joue mieux.

Dans cette étude nous ne faisons que préciser ces raisonnements intuitifs.

II - LISTE DES PARAMETRES A PRENDRE EN CONSIDERATION ET BASES DE CALCUL

De l'exposé qui précède, il ressort que nous aurons à tenir compte des paramètres suivants :

2. 1/ Nombre d'équipements à fabriquer. Soit n

Si la pièce entre dans l'équipement avec le coefficient c, le nombre des pièces nécessaires sera n c.

2. 2/ Pourcentage moyen de rebuts. Soit p

Si l'expérience acquise dans les fabrications est suffisamment étendue on a obtenu une valeur suffisamment précise du pourcentage de rebuts concernant

(1) C'est-à-dire probabilité de ne pas manquer de la composante en cause si l'on a approvisionné un nombre de pièces égal à celui indiqué dans la première colonne.

chaque pièce ou chaque type de pièce. Dans le cas contraire, on admettra que ce pourcentage est connu d'après l'expérience générale des fabrications bien qu'entaché de quelque imprécision.

Le nombre moyen des rebuts est alors ncp. C'est la moyenne de la loi de Poisson.

2. 3/ Valeur unitaire de la pièce. Soit u

La valeur unitaire des pièces sera exprimée tantôt en francs et tantôt en prenant pour unité de dépense la valeur d'un équipement, c'est-à-dire que si le prix de vente de l'équipement est de un million de francs, tous les montants seront valorisés en millions.

Les exemples numériques seront établis avec l'hypothèse que le prix de vente de l'équipement qui est égal à 1 se décompose en 3 parties :

- le coût d'un jeu de pièces et d'organes achetés qui vaut 0, 5,
- le coût des frais proportionnels de fabrication et de vente (dépenses de main-d'œuvre directe avec charges sociales correspondantes, frais d'atelier proportionnels, redevances, taxes et frais financiers proportionnels au chiffre d'affaires, etc.).

Le montant de ce poste est évalué à 0, 25 ;

- Les frais fixes (partie fixe des frais d'atelier et des frais d'administration générale). Ils représentent le bénéfice brut, c'est-à-dire le bénéfice net plus les frais fixes absorbés. Si cette partie fixe est de 0, 25, le prix de revient marginal est alors 0, 75 et le bénéfice brut réalisé par la fabrication d'un équipement vaut 0, 25.

2. 4/ Coefficient de dépréciation à appliquer aux reliquats de fin de commande. Soit a.

Pour représenter la dépréciation à appliquer aux reliquats de fin de commande on en multipliera la valeur par un coefficient compris entre 0 et 1. Si l'unité de dépenses est la valeur d'un équipement, ce coefficient s'applique au montant des achats qui vaut lui-même 0, 5 par jeu de pièce.

Dans les exemples d'application, nous prendrons tantôt $a = 0$, ce qui signifie que les reliquats constituent une perte sèche, tantôt $a = 0, 5$ qui paraît être le minimum de dépréciation à faire, même dans le cas de fabrications répétitives.

2. 5/ Coût de la passation d'une commande de rajustement ou d'une remise en fabrication. Soit Ar.

Pour une pièce achetée, le coût d'une commande supplémentaire est la somme de frais à caractère administratif (frais de lancement, d'achats, frais de réception, de magasinage, frais de comptabilisation, de facturation ...) et des frais d'inspection.

Pour une pièce fabriquée, le coût d'une remise en fabrication est la somme des frais supplémentaires d'atelier (réglage de machines, majoration pour petite série), des frais d'inspection et des frais administratifs (frais de lancement, de magasinage, de comptabilisation...).

Les frais administratifs seuls, peuvent être estimés au minimum à 10 000 fr. Dans le cas de livraisons complexes Ar peut atteindre 30 à 50 000 fr, surtout si les frais d'inspection sont importants. Cependant ces chiffres ne tiennent pas compte du risque de non homogénéité des lots dû au fractionnement des livraisons.

2. 6/ Pénalité pour "chute de contrat". Soit Ach

Dans le cours de notre étude, nous serons amenés à introduire la notion de pénalité à payer dans le cas où le nombre d'équipements prévu au contrat n'est pas réalisé. Cette pénalité qui chiffre le "risque calculé" joue le même rôle que le coût de la passation d'une commande de rajustement. Elle peut être exprimée soit en francs, soit en nombre d'équipements.

En réalité, cette pénalité à payer comprend deux parties :

- la pénalité proprement dite correspondant à une sorte "d'amende",
- les pertes correspondant à la non absorption des frais fixes sur les équipements qui ne sont pas livrés.

2. 7/ Délai de réapprovisionnement t et durée d'exécution de la commande T

Soient t le délai de réapprovisionnement et T la durée d'exécution d'une commande.

Durant une première phase de durée (T - t) le réapprovisionnement reste possible et la pénalité à payer en cas de marge initiale insuffisante est le coût de la passation d'une commande supplémentaire Ar. Pendant une seconde phase de durée t, le réapprovisionnement n'est plus possible et la pénalité à payer dans le cas d'une marge initiale insuffisante est la pénalité pour chute de contrat Ach.

Si la politique générale d'exécution de la commande exclut toute faculté de rajustement des quantités, la seconde phase est seule à prendre en considération.

2. 8/ Nombre de pièces critiques. Soit N.

Le nombre des pièces pour lesquelles la possibilité d'un rajustement en quantité est exclue sera appelé N. Ce nombre croît évidemment au fur et à mesure que le temps s'écoule depuis le début de la commande. En fin de commande, ce nombre atteint le nombre des pièces entrant dans l'équipement.

2. 9/ Plan de l'exposé.

Nous allons examiner successivement les deux cas évoqués ci-dessus :

a) Dans la première phase où la passation d'une commande de rajustement reste possible, le problème est de faire la balance entre le coût de la passation d'une commande supplémentaire et le coût des reliquats en fin de commande.

b) Dans la seconde phase où l'éventualité d'une commande supplémentaire est exclue, il faut calculer la marge de sécurité de façon à être sûrs de satisfaire au contrat avec une probabilité donnée ; ou plutôt, il faut faire la balance entre les reliquats de fin de commande d'une part et, d'autre part, les pertes résultant d'une pénalité à payer en cas de non réalisation du contrat, y compris les pertes résultant d'une réduction éventuelle du nombre d'équipements livrés.

Nous commencerons par étudier ce second cas.

III - CAS OU LE RAJUSTEMENT DES COMMANDES EST EXCLU.

3. 1/ Formule générale

Lorsqu'il n'est pas possible de lancer un complément de commande, soit parce que les délais de réapprovisionnement sont trop longs, soit parce que cette impossibilité résulte de la politique générale retenue pour l'exécution de la com-

mande et si l'on n'admet pas de tolérances dans les quantités à livrer, les marges pour rebuts doivent être fortement majorées. On détermine ces marges par le raisonnement suivant :

Pour un nombre de rebuts moyen np donné, soit $Pr(k)$ la probabilité d'avoir k rebuts. La probabilité de ne pas avoir plus de k rebuts est la somme de 0 à k des probabilités partielles.

$$Pr(0 - k) = \sum_0^k Pr(k)$$

C'est la probabilité de pouvoir faire au moins le nombre d'équipements prévu au contrat si l'on a pris k pièces supplémentaires.

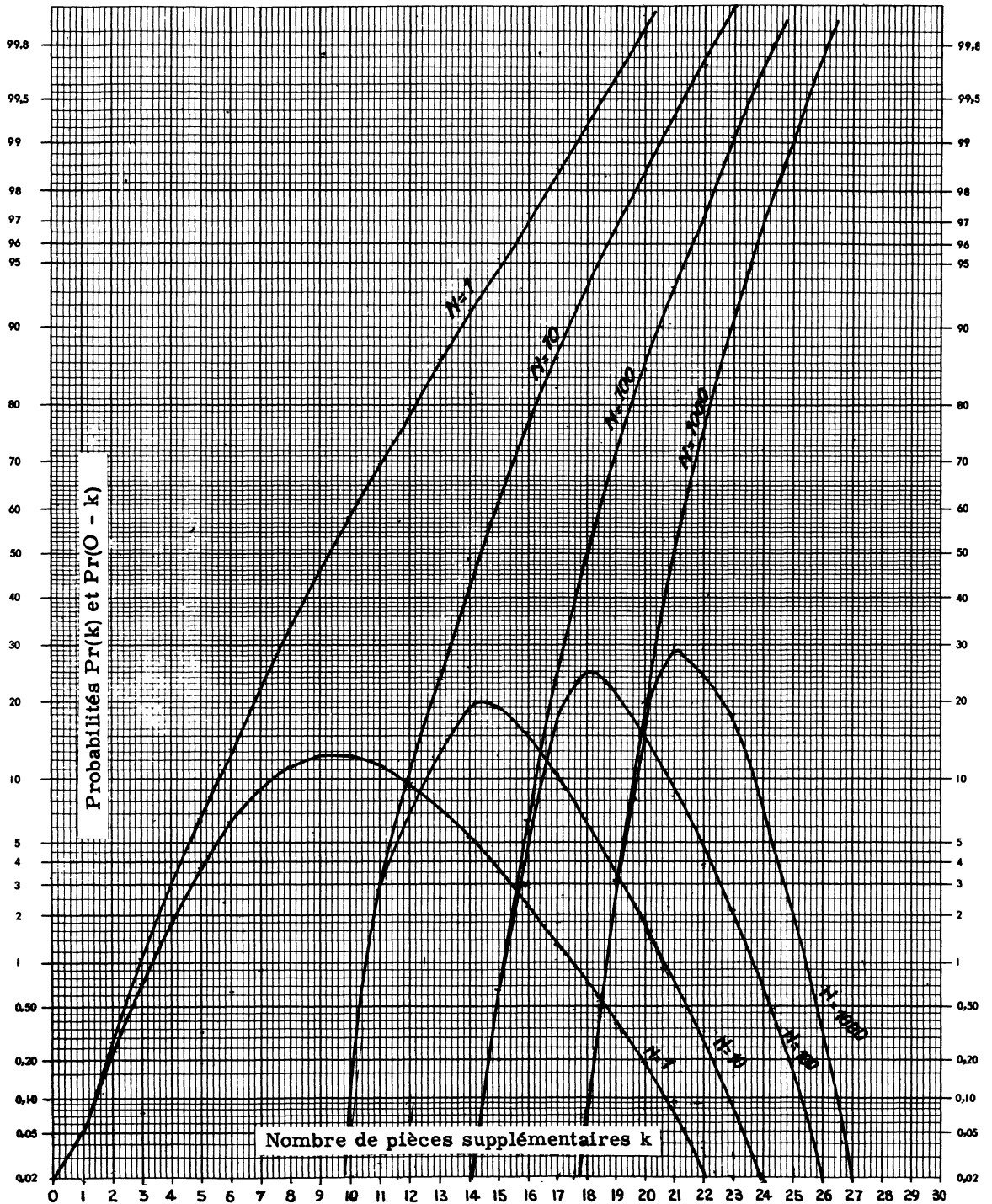
Le nombre N des types de pièces auxquelles cette formule s'applique est le nombre des composants entrant dans l'équipement, la probabilité de faire le contrat s'obtient en élevant l'expression précédente à la puissance N puisqu'il faut pouvoir faire le contrat avec chacune des N pièces.

3.2/ Exemples numériques

Si l'on veut avoir une bonne garantie de faire le contrat (99,9 % de chances par exemple), et si le nombre de pièces en cause N est élevé, on est conduit à prévoir des marges importantes laissant en fin de commande des reliquats non négligeables. Le graphique n° 1 donne les probabilités élémentaires $Pr(k)$ et cumulées $Pr(0 - k)$ en fonction du nombre de pièces supplémentaires k pour diverses valeurs du nombre des composants critiques $N = 1, 10, 100$ et $1\ 000$. On s'est placé dans le cas où le nombre des rebuts probables est $np = 10$ (par exemple $1\ 000$ équipements et 1 % de déchet moyen, ou encore 500 équipements et 2 % de déchet moyen).

Nombre de déchets moyen $np = 10$ Probabilité de réaliser le contrat $Pr = 99,9 \%$	Nombre d'équipements	
	1 000	500
	Pourcentage moyen de rebut	
	1 %	2 %
<u>Marge à prendre</u>		
pour $N = 10$ $k = 23$	2,3 %	4,6 %
$N = 100$ $k = 25$	2,5 %	5 %
$N = 1\ 000$ $k = 26$	2,6 %	5,2 %
<u>Reliquats de fin de commande</u>		
pour $N = 10$ $r = 13$	1,3 %	2,6 %
$N = 100$ $r = 15$	1,5 %	3 %
$N = 1\ 000$ $r = 16$	1,6 %	3,2 %

Etant donné l'importance de ces indications sur les marges nécessaires, nous allons donner d'autres exemples numériques de leur valeur dans le cas où le pourcentage moyen de rebuts est de 1 % mais où le nombre des équipements à livrer n est de 100, 200, 500 ou 1 000, ce qui donne des chiffres de rebuts moyens de 1, 2, 5 ou 10 et où le nombre des types de pièces en cause N est de 1, 10, 100 ou 1 000, ce qui correspond à des probabilités unitaires par pièce $P(k)$ de 0,999, 0,9999, 0,99999 ou 0,999999. Le tableau carré ci-après donne les marges nécessaires correspondant à ces $4 \times 4 = 16$ cas.



Graphique n°1 - Probabilités élémentaires et cumulées de pouvoir assembler le nombre d'équipements prévu en fonction du nombre des pièces supplémentaires commandées. Pour diverses valeurs N du nombre des composants critiques et dans le cas où le nombre des rebus probables $np = 10$.

Majorations à prévoir dans les lancements Probabilité de réaliser le contrat de 99,9 %					
Nom- bre de types de pièces critiques N	Nombre d'équi- pements n = nombre de rebut moyen k proba- bilité par pièce	100	200	500	1 000
		1	2	5	10
1	0,999	5 %	3,5 %	2,6 %	2,1 %
10	0,9999	6 %	4 %	3 %	2,3 %
100	0,99999	7 %	4,5 %	3,2 %	2,5 %
1 000	0,999999	8 %	5 %	3,4 %	2,6 %

On voit que si l'on veut obtenir une grande probabilité de réaliser le contrat, pour les lancements importants, le pourcentage de rebuts moyen doit être doublé ou triplé et pour les lancements de faible importance, il doit être multiplié par 6 ou 8. En effet, la loi des grands nombres joue d'autant moins bien que le nombre des équipements à fabriquer est plus réduit. Enfin, plus les équipements sont complexes, c'est-à-dire plus N est élevé, plus la marge de sécurité à prendre est importante.

3.3/ Majoration des marges quand les causes de rebuts ne sont pas stabilisées.

Rappelons que les marges de sécurité indiquées ci-dessus sont des marges minima correspondant au cas où les causes de rebuts sont parfaitement stabilisées. Elles sont inévitables et ne proviennent que des fluctuations statistiques de phénomènes parfaitement homogènes.

Si les causes de rebuts ne sont pas parfaitement stabilisées, par exemple si l'habileté du personnel est susceptible de varier par suite d'embauches nouvelles ou si l'on admet la possibilité de changer de fournisseur ou de méthode de travail, etc., ainsi que nous l'avons déjà dit au § 1.2, il convient de majorer les chiffres ci-dessus. Pour faire un calcul approximatif, nous supposons que les phénomènes suivent une loi normale de moyenne np et de variance np (1 - p) # np.

Si nous supposons que ces deux catégories de phénomènes ont la même importance, la variance est multipliée par 2 sans que la valeur moyenne soit changée.

La marge de sécurité k' tenant compte de cette hypothèse se déduit de la marge k précédemment calculée par la formule suivante :

$$\frac{k - np}{\sqrt{np}} = \frac{k' - np}{\sqrt{2np}} \quad \text{soit}$$

$$k' = 1,4 - 0,4 np$$

Par exemple :

- pour $n = 1\ 000$ $N = 1\ 000$, $p = 1\%$, il faut remplacer la marge $k = 26$ par $k' = 33$
- pour $n = 100$ $N = 100$, $p = 1\%$, il faut remplacer la marge $k = 7$ par $k' = 10$.

Dans tout notre développement, cette éventualité de l'augmentation du nombre des déchets restera sous-entendue.

3. 4/ Prise en considération du fait que les pièces composantes ont des valeurs différentes.

Les N pièces critiques ayant des valeurs différentes, le problème se pose d'obtenir une probabilité donnée de faire le contrat avec la moindre dépense. Cette probabilité globale est le produit des probabilités correspondant à chaque pièce.

$$Pr = Pr(0 - k_1) Pr(0 - k_2) \dots$$

La dépense à rendre minimum est $D = k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 + \dots$. Si nous dérivons arithmétiquement D par rapport à k_1, k_2, k_3, \dots et si nous dérivons logarithmiquement Pr par rapport à ces mêmes variables, nous obtenons deux formes linéaires en dk_1, dk_2, dk_3, \dots . La dérivée de $Pr(0 - k)$ étant $Pr(k)$ ces formes linéaires seront équivalentes si :

$$\frac{Pr(0 - k_1)}{Pr(k_1)} u_1 = \frac{Pr(0 - k_2)}{Pr(k_2)} u_2 = \dots = A$$

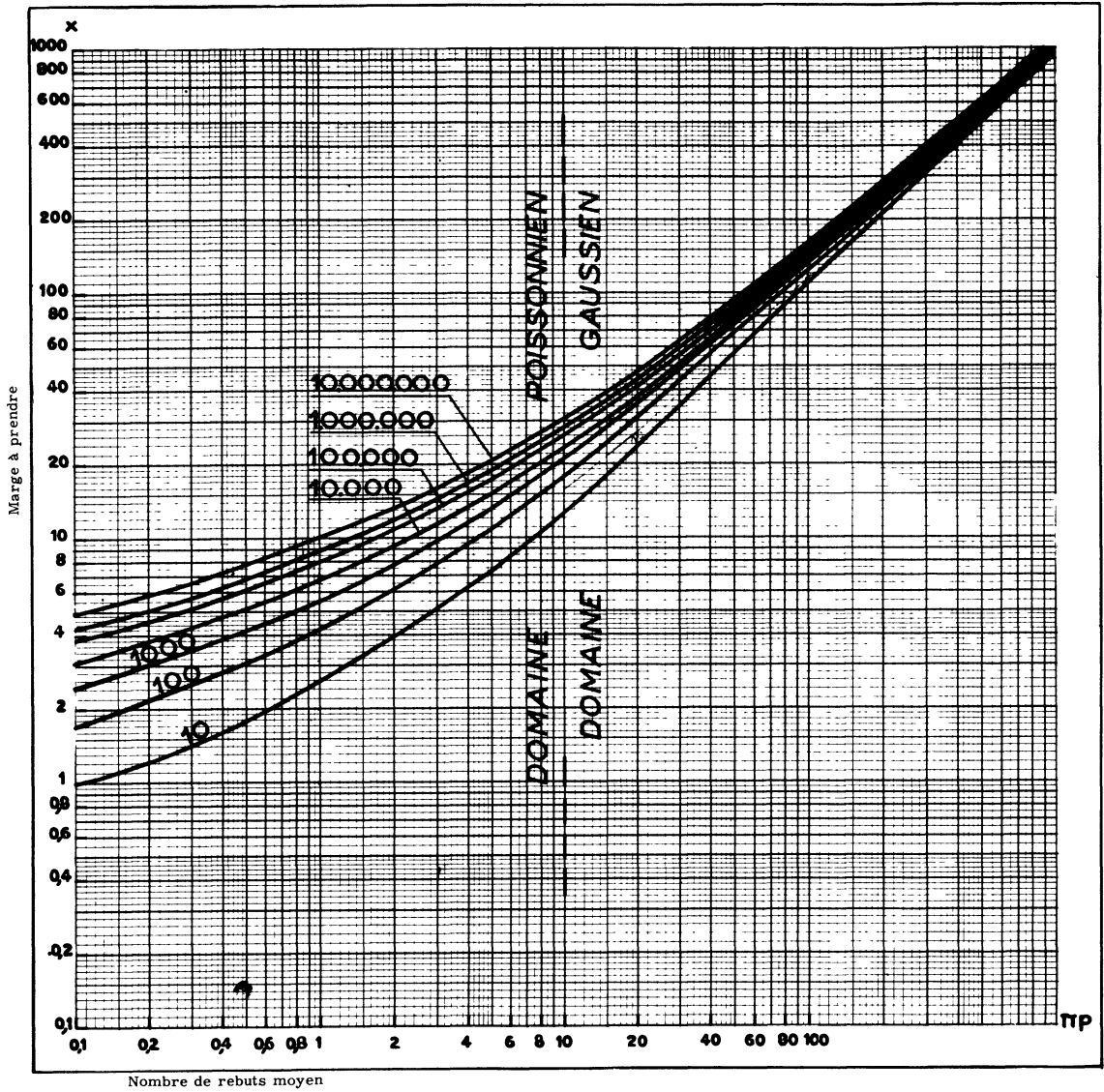
Ce coefficient A qui est homogène à u représente un prix. Nous retrouvons la même expression au § 4. 1 relatif au cas où le rajustement en quantité est possible et où A représentera le coût de la passation d'une nouvelle commande. Dans le cas actuel, ce paramètre (que nous désignerons par Ach pour le distinguer de celui correspondant au cas précédent désigné par Ar) représente "le risque calculé" de ne pas réaliser la commande ou la pénalité à payer si le contrat n'est pas satisfait.

On voit qu'il convient d'attribuer une même pénalité Ach à toutes les pièces pour le cas où chacune d'elles viendrait à manquer, ce qui est normal puisque la carence d'une pièce quelconque, quelle qu'en soit la valeur, suffit à compromettre l'exécution du contrat. Mais plus la valeur unitaire u est élevée, plus le rapport des deux probabilités doit être faible pour une pénalité Ach donnée, c'est-à-dire plus la marge de sécurité k peut être réduite.

Le raisonnement qui vient d'être effectué peut être illustré de la façon suivante : la probabilité 98 % de faire un équipement avec 2 pièces, peut s'obtenir de plusieurs façons différentes : par exemple, on peut écrire $0,98 = 0,99 \times 0,99$ ou $0,98 = 0,9999 \times 0,98$.

Dans le premier cas, nous répartissons la probabilité en deux parties égales, dans le second nous faisons porter la sécurité principalement sur la première pièce, ce qui est avantageux lorsque cette pièce est de peu de valeur tandis que celle qui sera approvisionnée avec une probabilité plus faible est une pièce chère.

Le graphique n° 2 ci-contre porte en abscisse le nombre de rebuts probable np et en ordonnée l'importance numérique de la marge de sécurité à prévoir k . Les diverses courbes correspondent aux diverses valeurs du rapport $\frac{A}{u}$ de la



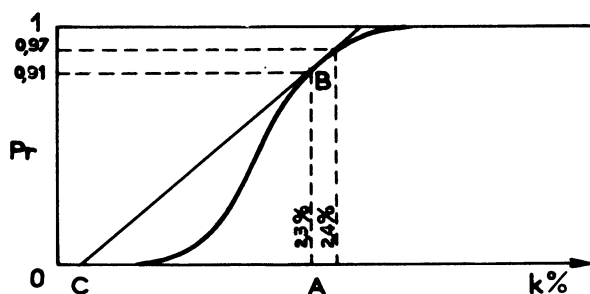
Graphique n°2 - Marge à prendre en fonction du nombre des rebuts moyen pour diverses valeurs du rapport $\frac{A}{u}$ de la pénalité de chute à la valeur unitaire de la pièce.

pénalité pour chute du contrat à la valeur unitaire de la pièce.

L'annexe n° 1 chiffre l'avantage qu'il y a à proportionner la marge de sécurité prise sur chaque pièce à la valeur unitaire de cette pièce. Dans le cas d'une distribution des valeurs unitaires correspondant à celle que l'on rencontre pour un équipement donné, cet avantage pour un chiffre d'affaires de 2 milliards varie de 4 à 10 millions par an selon le nombre des équipements lancés par commande.

3. 5/ Réflexions sur la notion de pénalité.

Que signifie cette notion de pénalité à payer en cas de chute du contrat ou de risque calculé qui s'est introduite dans le calcul comme une constante mathématique ? Nous donnerons d'abord un raisonnement plus intuitif permettant de montrer la relation entre cette pénalité et la probabilité souhaitée de réaliser le contrat.



La figure ci-contre porte en abscisse le pourcentage de sécurité prévu k % et en ordonnée la probabilité de réaliser le contrat. Par exemple, si l'on a pris k = 2,3 % on a Pr = 91 %.

Si nous prenons une unité de plus k = 2,4 %, Pr atteint 97 %.

Nous avons 91 % de chances de réaliser le contrat, c'est-à-dire 91 % de chances que l'approvisionnement d'une unité supplémentaire soit inutile, donnant 91 % de chances de réaliser une perte de 1 jeu de pièces. En passant de 91 à 97 % de chances de réaliser le contrat, on acquiert 6 % de chances de plus d'éviter la pénalité Ach. Le point d'indifférence est celui correspondant au cas où la perte et le gain ci-dessus sont égaux : 0,91 u = 0,06 Ach.

$$\frac{\text{Ach}}{u} = \text{approximativement } 15 \text{ jeux soit } 7,5 \text{ millions}^{(1)}.$$

Dans ce calcul, nous n'avons pas tenu compte du fait qu'en prenant un jeu de plus nous pouvons avoir dans certaines circonstances 6 % de chances de livrer un équipement de plus et de récupérer les frais généraux correspondants. Le calcul complet sera effectué au § 3. 8.

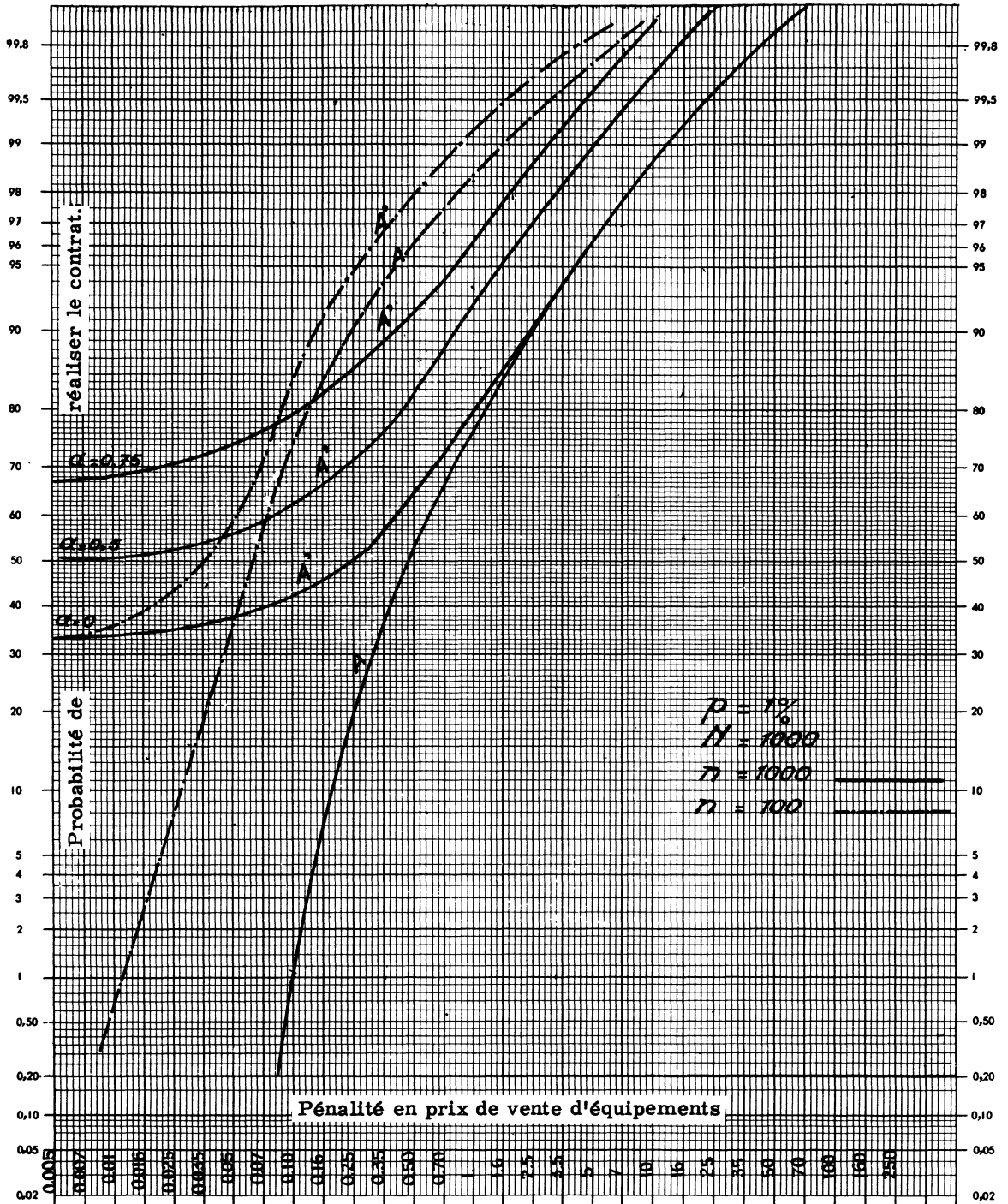
Le graphique n° 3 ci-joint tient compte de cette correction. Il donne la correspondance entre la valeur de la pénalité et la probabilité de réaliser le contrat.

On voit, par exemple, que pour une commande de 1 000 équipements :

- une probabilité de réaliser le contrat de 90 % correspond à une pénalité de 2,3 équipements,

(1) Sur la figure ci-dessus on voit que la pénalité Ach est égale à la sous-tangente de la courbe des probabilités cumulées. En effet :

$$\text{AC} = \frac{\text{AB}}{d \text{ AB}/dk} = \frac{\text{Pr} (0 - k)}{\text{Pr} (k)}$$



Graphique n°3 - Relation entre la probabilité de réaliser le contrat et la pénalité de chute. Les courbes A' tiennent compte de la non-absorption des frais fixes ainsi que du coefficient α de dépréciation des reliquats de fin de commande.

- une probabilité de réaliser le contrat de 99 % correspond à une pénalité de 14 équipements,
- une probabilité de réaliser le contrat de 99,6 % correspond à une pénalité de 70 équipements.

Au § 3.10 nous reprendrons cette discussion quand nous aurons chiffré l'avantage escompté du choix du chiffre de pénalité le plus opportun et montré que ce choix est peu critique.

3.6/ Cas où il n'y a pas de pénalité en cas de chute du contrat.

S'il n'y a pas de pénalité en cas de chute du contrat mais seulement un nombre maximum d'équipements à vendre (cas de tolérances commerciales sur le nombre des postes à livrer au client), il y a naturellement intérêt à fabriquer le plus grand nombre possible d'équipements pour récupérer le plus possible de frais généraux. La balance est à faire entre l'augmentation du nombre des équipements livrés et, par conséquent, l'augmentation des frais généraux absorbés d'une part et, d'autre part, le coût des jeux de pièces commandés en supplément. Soient :

$n + k$ le nombre de jeux de pièces commandés valant : $0,5 (n + k)$

n le nombre d'équipements qu'il est possible de fabriquer avec ces jeux.

a) Si n est inférieur ou égal à une limite n_0 , on vend n équipements et on dépense :

- pour les achats : $0,5 (n + k)$
- pour les frais proportionnels : $0,25 n$.

Le bénéfice brut est :

$$B_1 = n - 0,5 (n + k) - 0,25 n = 0,25 n - 0,5 k$$

b) Si n est supérieur à n_0 on ne vend plus que n_0 équipements et on dépense :

- pour les achats $0,5 (n + k)$
- pour les frais proportionnels $0,25 n_0$.

Il reste en fin de commande $(n - n_0)$ jeux utilisables valant $0,5 (n - n_0)$ et auxquels on applique le coefficient de dépréciation a .

Le bénéfice brut est :

$$\begin{aligned} B_2 &= n_0 - 0,5 (n + k) - 0,25 n_0 + 0,5 (n - n_0) a \\ &= (0,75 - 0,25 a) n_0 - 0,5 k - 0,5 (1 - a) n \end{aligned}$$

c) Lorsque le nombre n d'équipements qu'il est possible d'assembler avec $(n + k)$ jeux varie de 0 à $n + k$ avec pour chaque valeur la probabilité $Pr (n)$, le bénéfice brut probable est :

$$B = \sum_{n=0}^{n_0} B_1 Pr (n) + \sum_{n_0}^{n+k} B_2 Pr (n)$$

d) la valeur optimum du nombre de jeux supplémentaires commandés k est celle qui donne le bénéfice brut maximum. Avec des valeurs discontinues de n il serait trop laborieux d'effectuer les calculs, nous remplacerons les sommes \sum par des intégrales et nous dériverons B par rapport à k en remarquant que la dérivée de $Pr (n)$ par rapport à k a la même valeur mais le signe con-

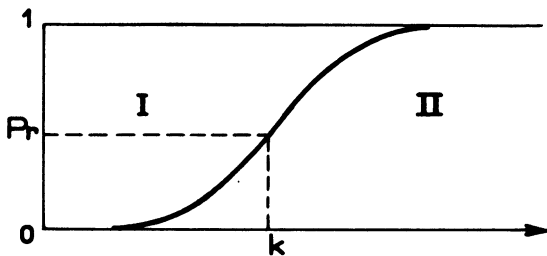
traire que la dérivée par rapport à n , car avoir un jeu de rebuts de plus revient à faire un équipement de moins.

On trouve que la valeur optimum de k est donnée par l'expression

$$\Pr(0 - n_0) = \frac{1}{3 - 2a}$$

Le premier terme représente la probabilité de faire au moins n_0 équipements. Cette probabilité doit être égale à $1/3$ si la dépréciation des reliquats est totale ($a = 0$). Elle doit être égale à $1/2$ si la dépréciation est de 50 % ($a = 0,5$). Enfin, s'il n'y a pas de dépréciation ($a = 1$) on vérifie que la probabilité est égale à l'unité, c'est-à-dire que l'on peut commander autant de jeux de pièces que l'on désire, ce qui était évident a priori.

e) On peut tenter de donner une interprétation graphique du raisonnement, analogue à celle donnée au § 3.5.



La figure ci-contre comporte également en abscisse la marge prise pour les déchets et en ordonnée la probabilité de faire le contrat. Elle définit deux zones : la zone I où les pertes résultent de la non absorption des frais fixes et la zone II où les pertes résultent des reliquats en fin de commande. Quand le nombre des jeux de pièces supplémentaires k augmente d'une unité :

- il y a une probabilité $\Pr(k)$ pour que le contrat soit déjà fait et donc que la dépense soit inutile, ce qui représente une perte de valeur $0,5(1 - a)$;
- il y a une probabilité $[1 - \Pr]$ pour que le contrat ne soit pas fait, donc que l'on réalise un gain supplémentaire par l'absorption de frais fixes valant $0,25$.

Si l'on est arrivé au point d'équilibre, le gain et la perte s'annulent et l'on a :

$$0,5(1 - a) \Pr = 0,25(1 - \Pr)$$

$$\Pr = \frac{1}{3 - 2a}$$

3.7/ Tolérances sur les quantités d'équipements à livrer.

Le calcul précédent où il n'y a pas de pénalité à payer pour chute de contrat correspond au cas où une tolérance commerciale sur les quantités à livrer a été prévue.

Quelle est la valeur de cette tolérance à prévoir dans les contrats qui permet de réaliser cette condition ? Le tableau ci-dessous donne d'une part la marge à prendre dans les lancements de pièces détachées et, d'autre part, la valeur de la tolérance à prévoir dans le nombre d'équipements livrables.

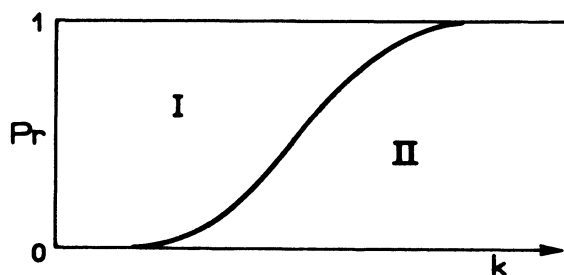
Marge à prendre pour $Pr = 0,33$ et tolérances sur le nombre d'équipements livrés pour $0,02 < Pr < 0,98$ lorsque le pourcentage moyen de rebuts $p = 1\%$					
Nombre de pièces N	Nombre d'équipements à livrer n				
	100	200	500	1 000	
1	marge	0 %	0,5 %	0,6 %	0,8 %
	tolérance	- 3 % + 0 %	- 2 % + 0,5 %	- 1,4 % + 0,6 %	- 0,9 % + 0,4 %
10	marge	2 %	2 %	1,8 %	1,4 %
	tolérance	- 3 % + 2 %	- 1,5 % + 1 %	- 0,6 % + 0,8 %	- 0,6 % + 3 %
100	marge	4 %	3 %	2,2 %	1,8 %
	tolérance	- 2 % + 2 %	- 1 % + 0,5 %	- 0,6 % + 0,2 %	- 0,5 % + 0,2 %
1 000	marge	5 %	4 %	2,4 %	2,1 %
	tolérance	- 2 % + 1 %	- 0,5 % + 0,5 %	- 0,4 % + 0,4 %	- 0,4 % + 0,2 %

On voit que les marges à prendre sont sensiblement inférieures à celles données au § 3.2 pour le cas où le contrat doit être réalisé à 99,9 % (par exemple 2,1 % au lieu de 2,6 %, ou encore 5 % au lieu de 8 %). En outre, la tolérance commerciale sur les quantités d'équipements à livrer doit avoir une ouverture totale qui varie de 0,6 % à 3 ou 4 %. L'avantage escompté de l'introduction de de cette tolérance commerciale sera chiffré au § 3.9.

Comme nous l'avons indiqué au § 3.3, si l'on tient compte de la non homogénéité des causes de déchets, les marges dans le lancement des pièces détachées doivent être majorées. Les tolérances commerciales sont également élargies. Elles sont multipliées au total par 1,4, si la variance due à la non homogénéité des causes de déchets est égale à la variance due aux fluctuations statistiques.

3.8/ Prise en considération de la non absorption des frais fixes dans le cas où une pénalité est prévue.

Au paragraphe 3.5, nous avons évalué le coût de la pénalité à prévoir pour chute du contrat, sans tenir compte de la non absorption des frais fixes sur le nombre d'équipements chutés. Il est intéressant de voir dans quelle mesure ce fait affecte les valeurs retenues.



La figure ci-contre qui, comme les précédentes, comporte en abscisse la marge prise pour les rebuts et en ordonnée la probabilité de réaliser le contrat Pr définit deux zones : la zone I dans laquelle les pertes se produisent par non absorption des frais fixes et par risque d'en-

courir la pénalité A' ; la zone II dans laquelle les pertes proviennent des reliquats en fin de commande dépréciés au coefficient a .

Lorsque k augmente d'une unité le gain est pour la zone I :

$$0,25 [1 - Pr (0 - k)] + A' Pr (k)$$

et pour la zone II la perte est :

$$0,5 (1 - a) Pr (o - k)$$

le point d'indifférence s'obtient si ces deux quantités sont égales :

$$A' = \frac{(3 - 2a) Pr (o - k) - 1}{4 Pr (k)}$$

En négligeant la non absorption des frais fixes et en supposant la dépréciation totale, nous aurions obtenu :

$$A = \frac{Pr (o - k)}{2 Pr (k)}$$

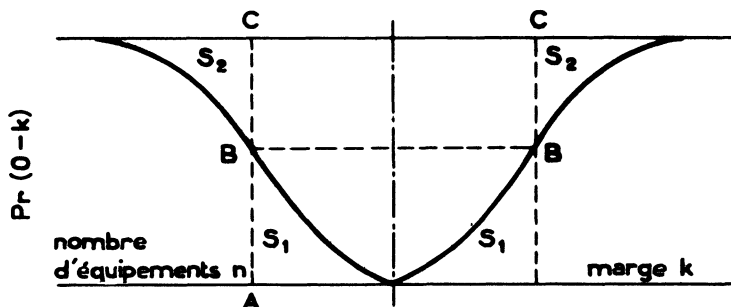
Donc, la pénalité A' qui tient compte de ces deux facteurs s'obtient à partir de la pénalité A qui en fait abstraction par la formule suivante :

$$A' = \frac{A (3 - 2a) Pr (o - k) - 1}{2 Pr (o - k)}$$

Ce coefficient correctif a été introduit sur le graphique n° 3 qui permet de calculer la pénalité A à utiliser dans le graphique n° 2 en fonction de la pénalité réelle A'.

3.9/ Economies réalisées.

Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires pour chiffrer l'avantage attendu de l'application des diverses méthodes exposées ci-dessus.



Le graphique ci-dessus comporte deux parties symétriques par rapport à un axe vertical et représentant la même relation sous deux formes équivalentes. Dans la partie droite, la marge prise pour les rebuts k est portée en abscisse et la probabilité de réaliser le contrat en ordonnée. Dans la partie gauche l'abscisse est le nombre n d'équipements livrés pour une marge de sécurité fixe donnée, et l'ordonnée est la probabilité de fabriquer le nombre d'équipements.

Le bénéfice pour n équipements à assembler est :

- + 0,25 n pour les frais généraux absorbés
- 0,5 k pour les majorations d'achat de pièces
- $[1 - Pr(o - k)] A'$ pour le risque de pénalité
- + 0,5 $a S_1 = 0,5 a \sum_{k=0}^n Pr(o - k)$ pour la valeur des reliquats de fin de commande.

- $0,75 S = 0,75 \sum_k^n [1 - \text{Pr}(o - k)]$ pour les risques de manquer des ventes, déduction faite des frais proportionnels non engagés sur les jeux manquants.

On vérifie aisément que cette formule se relie à celle donnée au paragraphe précédent et qui en est la dérivée.

A l'aide de cette formule le graphique n° 4 a été établi, comportant en ordonnée le bénéfice chiffré avec pour unité le prix de vente d'un équipement et en abscisse le nombre de jeux de pièces commandés. Diverses courbes correspondent aux diverses valeurs A' accordées à la pénalisation en cas de non réalisation des commandes (ou ce qui revient au même à la probabilité Pr de réaliser la commande).

Pour chaque valeur de A' , il y a un nombre optimum de jeux à commander qui donne le bénéfice brut maximum. Ce bénéfice brut maximum décroît quand la pénalité A' croît :

- pour $A' = 0$, $\text{Pr} = 0,30$, on trouve $B = 238,9$
 - pour $A' = 5$, $\text{Pr} = 0,97$ " " $B = 237,7$
 - pour $A' = 70$, $\text{Pr} = 0,999$ " " $B = 236,9$

Ceci permet de chiffrer l'avantage qu'il y a à introduire une tolérance commerciale sur les quantités à livrer permettant alors de considérer que la pénalité de chute A' est nulle. Ce bénéfice ressort à 1 ou 2 équipements soit 0,1 à 0,2 % du chiffre d'affaires.

De même, ces courbes permettent de chiffrer l'importance qu'il y a à ajuster le mieux possible la marge à prendre dans le nombre de jeux de pièces commandés en fonction de la valeur retenue pour la pénalité A' ou pour la probabilité Pr de réaliser le contrat.

Quand cette probabilité est nulle, si au lieu d'une marge optimum de 2,1 % on prend une marge de 1,5 %, la perte est de 1,4 équipement et pour une marge de 2,7 % elle est de 2,4 équipements.

Quand cette pénalité est forte $A = 13$ et $\text{Pr} = 0,99$, si au lieu d'une marge optimum de 2,5 % on prend une marge de 1,5 % la perte atteint 12,9 équipements.

Si l'on estime que l'utilisation d'une méthode rationnelle à la place d'une méthode empirique permet d'éviter des erreurs de 0,5 % dans la détermination des marges optima, le bénéfice qui en résulte peut être chiffré de 3 à 10 équipements, soit de 0,3 à 1 % du chiffre d'affaires.

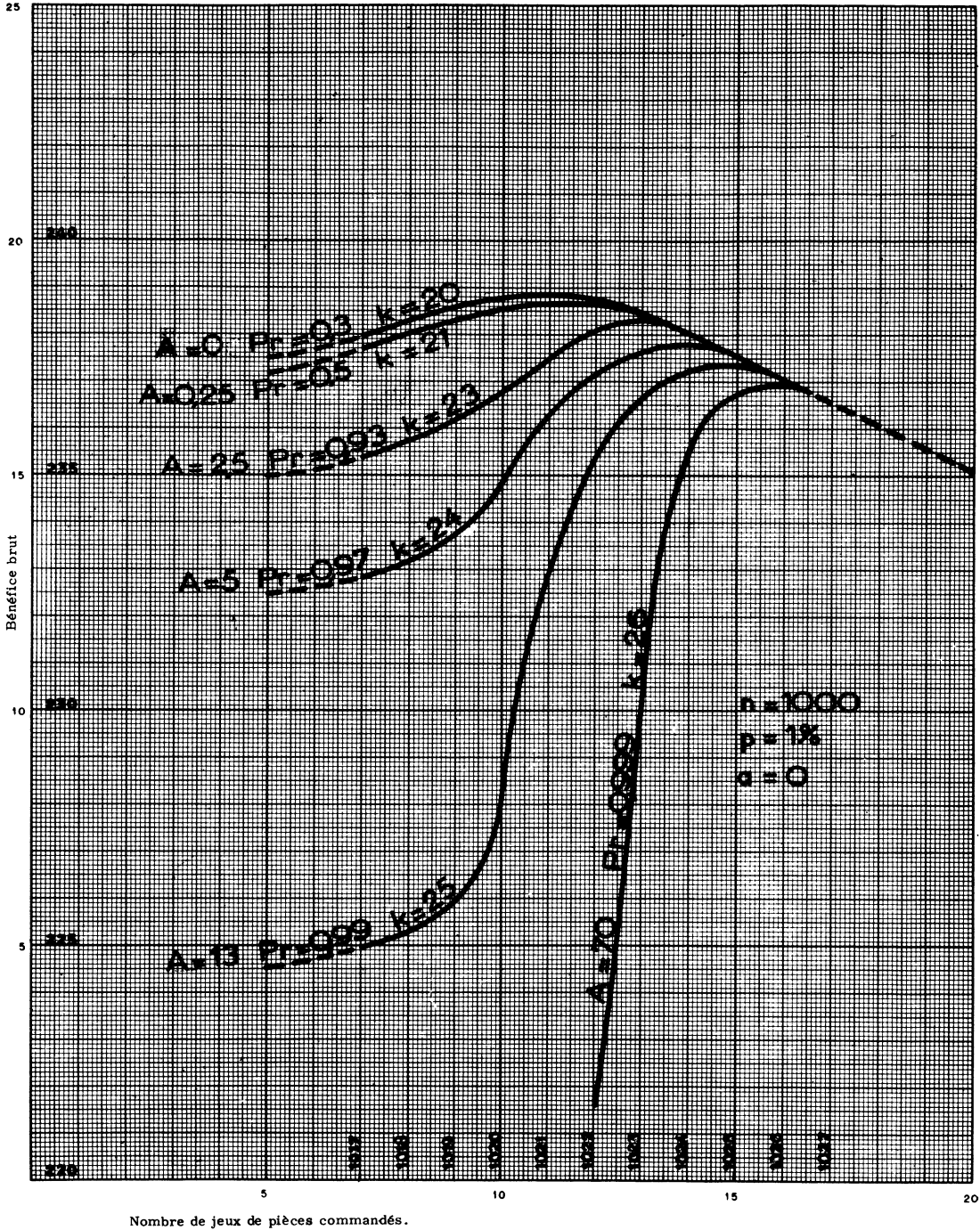
L'annexe n° 1 chiffre l'avantage qu'il y a à proportionner la marge de sécurité à la valeur unitaire des pièces. On trouve de 0,12 à 0,5 % du chiffre d'affaires.

Au total, l'avantage escompté de l'application de l'ensemble des mesures ci-dessus, compte tenu du fait que les économies ne se cumulent pas complètement, peut raisonnablement être évalué à 0,25 % ou 0,5 % du chiffre d'affaires. Si celui-ci est de 2 milliards, l'économie sera de 5 à 10 millions par an.

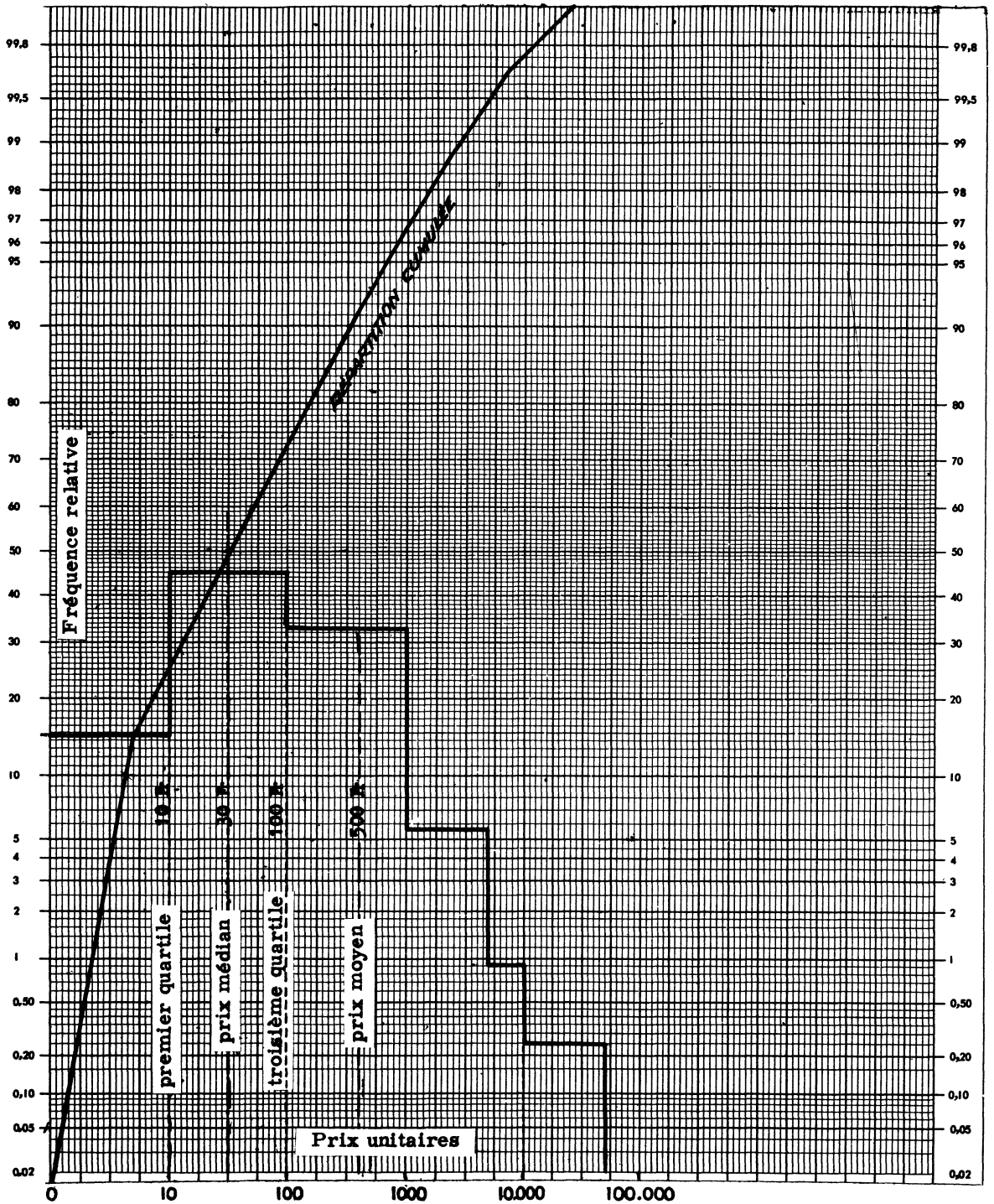
3. 10/ Discussion sur le choix de la pénalité à retenir.

Les calculs précédents permettent également d'achever la discussion commencée au § 3. 5 sur les valeurs à retenir pour le chiffre de pénalité A' (ou pour la probabilité avec laquelle on veut réaliser le contrat Pr).

A l'aide du graphique n° 4, le graphique n° 5 a été établi avec les valeurs



Graphique n°4 - Variation du bénéfice brut en fonction du nombre de jeux de pièces commandés pour diverses valeurs de la pénalité de chute A ou de la probabilité de réaliser le contrat Pr.



Graphique n°5 - Répartition des prix unitaires des pièces pour un équipement type an/grc. 5 utilisée dans les exemples numériques.

de la pénalité (ou la probabilité de réaliser le contrat) réelles en abscisse et les valeurs utilisées à priori en ordonnées.

Diverses courbes correspondent aux diverses valeurs de la perte (0, 5, 1, 2, 5, et 10 équipements ou millions). On voit que si l'on prend à priori une pénalité nulle, la perte est de 0,5 lorsque la pénalité réelle est de 1,6, de 1 lorsque la pénalité réelle est de 3, 2 et atteint 10 lorsque la pénalité réelle est 22.

Si l'on prend à priori une pénalité de 5 (probabilité 0,966), lorsque la pénalité réelle est de zéro, la perte est d'environ 0,75, elle décroît puis s'annule ensuite quand la probabilité réelle est de 5 pour croître ensuite et atteindre 1 pour 70 (Probabilité 0,999). Pratiquement elle reste inférieure à 1. Cette valeur de la probabilité ou toute valeur voisine (de 2 à 7) est à recommander en l'absence de toute indication.

D'une façon générale, si l'on considère le graphique comme un "col", la "vallée" des valeurs réelles supérieures aux valeurs utilisées est plus abrupte que la "vallée" des valeurs réelles inférieures aux valeurs utilisées.

A se tromper, il y a moins de risque à le faire par excès que par défaut.

IV - CAS OU LE RAJUSTEMENT DES COMMANDES EST POSSIBLE

Lorsque la politique générale de gestion de la commande le permet, un rajustement des quantités à livrer est possible, bien que présentant de nombreux inconvénients, dans le courant des premiers mois de fabrication, ce qui nous place dans le cas où la pénalité correspond au coût de la passation d'une commande de rajustement. Puis ce rajustement devient impossible lorsque le délai restant à courir jusqu'à la fin de la commande est égal au délai de réapprovisionnement et nous sommes alors dans le cas où la pénalité A est le coût de la chute du contrat (coût qui, rappelons le, comprend deux parties : un risque calculé correspondant à une amende et une perte pour non absorption de frais fixes). Pour distinguer les deux pénalités, nous les appelons Ar et Ach.

Nous allons d'abord procéder à l'étude algébrique du problème, puis nous discuterons de l'opportunité qui s'attache à prévoir une possibilité de rajustement des quantités commandées.

4.1/ Le problème peut se poser comme suit. Soient :

n + x le nombre d'équipements commandés,

k' le nombre des rebuts pendant la première période d'une durée T - t

k'' le nombre des rebuts pendant la seconde période de durée t.

Les nombres de pièces nécessaires pendant ces périodes sont : $n \frac{(1-t)}{T}$ et nt/T , et les probabilités Pr sont fonction de ces deux chiffres.

Si $k' < x - k''$ il ne sera pas nécessaire de passer de commande et le reliquat sera $(x - k' - k'')$.

Si $k' > x - k''$ la dépense sera Ar.

Lorsque k' varie de 0 à x, la dépense totale est :

$$D = \sum_{k'=0}^{x-k''} (x - k' - k'') Pr(k') + \sum_{k'=x-k''}^x A Pr(k')$$

Elle est minimum lorsque :

$$\frac{dD}{dx} = 0$$

ce qui se produit lorsque :

$$\frac{A}{u} = \frac{\text{Pr} [0 - (x - k'')]}{\text{Pr} (x - k'')} \quad \text{pour } n (1 - t/T)$$

Nous retrouvons bien la même expression qu'au paragraphe 3.4.

On pourra utiliser le graphique n°2 pour déterminer le nombre k' de pièces supplémentaires à prendre pendant la première période en multipliant les abscisses par $(1 - t/T)$ et en utilisant Ar (coût de la passation d'une nouvelle commande).

Pour déterminer le nombre k'' de pièces supplémentaires à prévoir pour la seconde commande, on multipliera les abscisses par t/T et on utilisera Ach (pénalité pour chute du contrat). La quantité des pièces np sera majorée de $(k' + k'')$.

Lorsqu'on sera arrivé au moment où le délai restant à courir avant la fin de la commande est égal au délai de réapprovisionnement, on fera le point des déchets réels que l'on comparera aux déchets prévus pour la première période, soit k' . Si ce déchet réel est supérieur à k' on passera une commande de complément.

4.2/ Dans quel cas est-il avantageux d'utiliser cette faculté de rajustement des quantités commandées ?

Sans donner de formule générale, nous allons montrer comment chaque cas particulier peut être traité.

L'avantage provient de ce que dans les premières phases, lorsque le rajustement reste possible, les marges sont calculées à partir d'une pénalité Ar , correspondant au coût de la passation d'une nouvelle commande, qui est, en général, inférieure à la pénalité Ach pour chute du contrat applicable dans les secondes phases.

Il est donc évident que lorsqu'il est prévu des tolérances commerciales sur les quantités d'équipements à livrer, c'est-à-dire lorsque la pénalité en cas de chute d'un contrat est nulle, ou même faible, il n'y a aucun intérêt à envisager un rajustement systématique. Au contraire, le fait de diviser les nombres d'équipements en 2 lots entraîne une majoration des sécurités puisqu'elles jouent sur des quantités (np) inférieures.

a) Par exemple, pour $np = 10$ $N = 1\ 000$ $t = T/2$ $u = 500$ fr $Ar = 10\ 000$ fr
 $Ach = 3\ 500\ 000$ fr $Pr = 0,33$, on trouve :

$$\text{Sans rajustement } np = 10 \quad \frac{Ach}{u} = 700 \quad k = 20$$

$$\text{Avec rajustement } np = 5 \quad \frac{Ach}{u} = 700 \quad k'' = 12$$

$$np = 5 \quad \frac{Ar}{u} = 20 \quad k' = \underline{9} \quad k = 21$$

Ily a donc un avantage de $21 - 20 = 1$ pièce à passer commande en une seule foi. En outre on économise $Ar = 10\ 000$ fr.

b) La différence est d'autant plus grande que le délai d'approvisionnement est plus court. Avec $t = T/5$ on trouve :

$$\text{Sans rajustement} \quad k = 22$$

$$\text{Avec rajustement } np = 2 \quad \frac{A}{u} = 10\ 000 \quad k'' = 9$$

$$np = 8 \quad \frac{A}{u} = 20 \quad k' = \underline{15} \quad k = 24$$

L'économie est de 2 pièces plus Ar.

On voit qu'il n'y a pas toujours intérêt à prévoir la possibilité d'un rajustement même en faisant abstraction des inconvénients techniques (manque d'homogénéité des fabrications).

Le problème général n'a pas été étudié, non plus que la possibilité suivante : on pourrait envisager de calculer les marges sans prévoir de possibilité de rajustement, quitte à faire cependant le point pour chaque pièce à la date limite de réapprovisionnement, afin de "repêcher" les défaillances accidentelles qui doivent être peu nombreuses. Cette méthode doit permettre de retenir des pénalités de chute très faibles et peut être même nulles.

V - METHODE PRATIQUE DE CALCUL

L'annexe n° II due à M. Klipfel propose une méthode pratique pour le calcul des marges à prévoir dans les lancements.

ANNEXE N° 1

EXEMPLES NUMERIQUES DE L'AVANTAGE QU'IL Y A A ADAPTER LA MARGE DE SECURITE SUR CHAQUE PIECE A LA VALEUR UNITAIRE DE CETTE PIECE.

Nous nous proposons de comparer le coût des marges obtenues d'une part en majorant d'un coefficient fixe le pourcentage moyen de rebuts et, d'autre part, en utilisant la méthode indiquée dans l'étude ci-contre. Pour comparer des situations comparables, la probabilité totale de réaliser la commande sera la même dans les deux cas, mais elle sera obtenue par des voies différentes : en tenant ou en ne tenant pas compte de la valeur unitaire des pièces.

En ce qui concerne cette valeur unitaire, nous avons utilisé le graphique n° 6 qui donne la répartition des prix unitaires des composantes dans une commande type AN/GRC. 5. 500 des composantes valent de 0 à 30 fr, 250 valent de 30 à 100 fr, 220 valent de 100 à 1 000 fr et 30 valent de 1 000 à 25 000 fr.

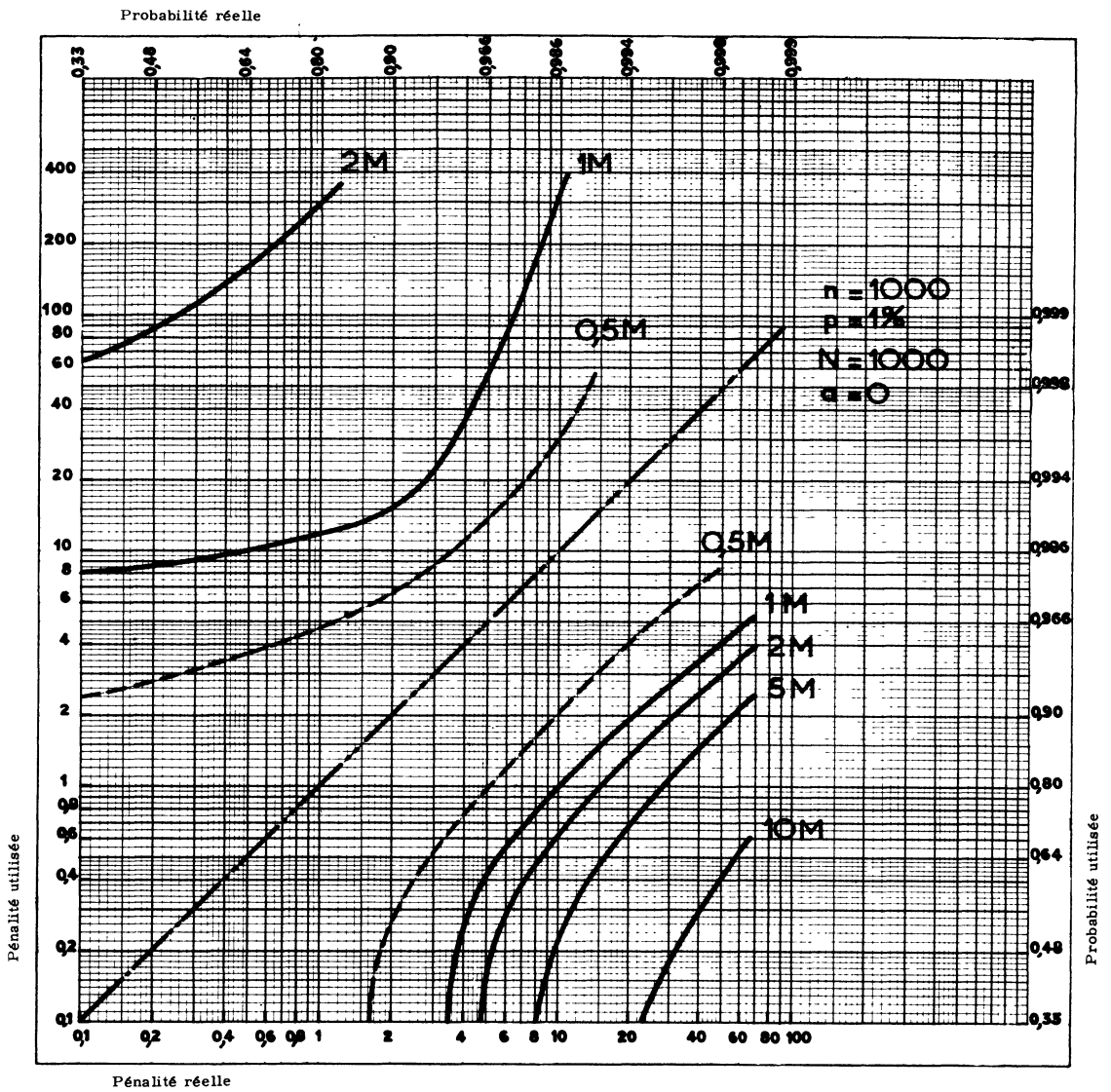
Remarquons cependant que nous avons pris pour simplifier un pourcentage de rebuts réels uniforme de 1 %, ce qui doit cependant suffire pour donner une idée de grandeur du bénéfice.

Deux cas ont été étudiés :

1/ Cas d'une commande de 1 000 équipements.

1/ Si nous multiplions uniformément par 2,2 le pourcentage moyen de rebuts de 1 %, le graphique n° 1 montre que nous aurons 75 % de chances de réaliser le contrat, ce qui nous coûtera : 2,2 % x 1 000 équipements x 500 000 fr par jeu de pièces = 11 millions.

2/ Si nous tenons compte des valeurs unitaires des pièces, le graphique n° 3 montre que pour la probabilité de réaliser le contrat de 75 %, la pénalité A' est de 0,8 millions et la pénalité A de 1 million. Nous avons donc :



Graphique n°6 - Variation du bénéfice brut en fonction des pénalités de chute (ou des probabilités de réaliser le contrat) réelles et des pénalités (ou des probabilités) utilisées.

- pour 500 pièces $\frac{A}{u} = \frac{1\ 000\ 000}{0,5(0+30)} = 67\ 000$
- pour 250 pièces $\frac{A}{u} = \frac{1\ 000\ 000}{0,5(20+100)} = 15\ 300$
- pour 220 pièces $\frac{A}{u} = \frac{1\ 000\ 000}{0,5(100+1\ 000)} = 1\ 820$
- pour 30 pièces $\frac{A}{u} = \frac{1\ 000\ 000}{0,5(1\ 000+25\ 000)} = 77$

Le graphique n° 2 permet d'évaluer les marges de sécurité à prendre (np = 10)

- pour 500 pièces	25 unités valent	15 fr coût	187 500 fr
- pour 250 "	22 " "	65 fr "	357 500 fr
- pour 220 "	19 " "	550 fr "	2 300 000 fr
- pour 30 "	16 " "	1 360 fr "	6 240 000 fr
			9 085 000 fr

3/ Les rebuts réels représentent dans les deux cas une dépense de :

1 % x 1 000 x 500 000 = 5 millions.

Les reliquats de fin de commande représentent une dépense de :

11 - 5 = 6 millions dans le premier cas,

9 - 5 = 4 millions dans le second.

L'économie est de $\frac{2}{500} = 0,4\%$

2/ Cas d'une commande de 100 équipements

1/ Si nous multiplions uniformément par 6 le pourcentage moyen de rebuts de 1 %, nous aurons 92 % de chances de réaliser le contrat, ce qui nous coûtera :

6 % x 100 équipements x 500 000 fr par jeu de pièces = 3 000 000.

2/ Si nous tenons compte des valeurs unitaires des pièces, le graphique n° 3 montre que la pénalité A' est de 0,16 million et A de 0,38. Nous avons donc :

- pour 500 pièces $\frac{A}{u} = 25\ 000$
- pour 250 pièces $\frac{A}{u} = 5\ 900$
- pour 22 pièces $\frac{A}{u} = 690$
- pour 3 pièces $\frac{A}{u} = 29$

Le graphique n°2 permet d'évaluer les marges de sécurité à prendre (np = 1)

- pour 500 pièces	8 unités valent	15 fr coût	60 000 fr
- pour 250 "	7 " "	65 fr "	113 750 fr
- pour 220 "	5 " "	550 fr "	605 000 fr
- pour 30 "	3 " "	13 000 fr "	1 170 000 fr
			1 950 000 fr

3/ Les rebuts réels dans les deux cas sont de :

$1 \% \times 100 \times 500\,000 = 0,5$ million.

Les reliquats de fin de commande représentent une dépense de :

$2 - 0,5 = 2,5$ millions dans le premier cas,

$2 - 0,5 = 1,5$ million dans le second.

L'économie est de $\frac{1}{100} = 1\%$ du montant des achats et $0,5\%$ du chiffre d'affaires.

Cette économie est d'autant plus grande en valeur relative que le nombre de postes à fabriquer est moins important.

ANNEXE N° 2

METHODE PRATIQUE POUR LE CALCUL DES MARGES A PREVOIR DANS LES LANCEMENTS POUR TENIR COMPTE DES DECHETS DE FABRICATION par M. H. Klipfel Ingénieur à la Société "LE MATERIEL TELEPHONIQUE"

I - GENERALITES

Les formules trouvées aux § 3.4 et 4.1 de l'étude précédente sont de la forme :

$$\frac{\text{Pr}(0 - x)}{\text{Pr}(x)} = \alpha \quad (1)$$

où

x est la marge économique à prévoir,
 $\text{Pr}(x)$ la probabilité d'avoir un déchet de x pièces
 $\text{Pr}(0 - x)$ la probabilité d'avoir un déchet de x ou de moins de x pièces,
 α une constante.

Le calcul pratique de x peut être effectué soit en utilisant un abaque, soit en consultant des tables numériques, soit encore en se servant d'un calculateur analogique dont le modèle le plus simple est une règle à calcul.

La présente étude a pour but de comparer les différents modes de calcul et d'exposer celui qui paraît le plus pratique.

II - CONSTRUCTION D'UN ABAQUE

(voir la définition des paramètres au chapitre II de l'étude de M. G. Borel).

La distribution de la probabilité de déchets est une distribution binomiale. x est fonction de n , c , p , u , A_r ou A_{ch} , T et t , donc au total de sept paramètres. L'abaque n°2 a été réalisé en partant des paramètres composés $\frac{A}{u}$ et $\tau n c p$

où τ est tantôt égal à 1, tantôt à $\frac{t}{T}$, tantôt à $1 - \frac{t}{T}$. Son tracé a été fait en remplaçant la loi binomiale par la loi de Poisson de moyenne $\tau n c p$ pour les valeurs de $\tau n c p$ inférieures à 10, et par la loi de Laplace-Gauss de moyenne $\tau n c p$ et d'écart-type $\sqrt{\tau n c p}$ pour les valeurs de $\tau n c p$ supérieures à 10. Ces simplifi-

cations permettent difficilement de trouver des courbes $\frac{A}{u} = Cte$ se prolongeant les unes les autres au voisinage de $\tau ncp = 10$ (ceci est particulièrement significatif pour les valeurs faibles de $\frac{A}{u}$). D'autre part, les calculs préliminaires sont importants et il faut compter pour chaque article, une fois les différents paramètres déterminés, deux à trois minutes de calcul. La réalisation d'un abaque plus complexe tenant compte de trois ou de quatre paramètres composés au lieu de deux, peut être envisagée. Cependant son utilisation par un agent de production non initié paraît difficile.

III - REALISATION D'UNE TABLE NUMERIQUE

Pour établir une table numérique simple, il faut également se limiter à deux paramètres composés, facilement calculables à partir des paramètres primaires. L'utilisation des composantes $\frac{A}{u}$ et τncp conduit aux mêmes difficultés que celles rencontrées lors de la construction de l'abaque n° 2. L'emploi de trois paramètres entraînerait l'édition d'un ensemble de tables trop important (en prenant les paramètres τnc , p et $\frac{A}{u}$, il faudrait environ vingt cinq tables, à dix lignes et seize colonnes chacune).

IV - UTILISATION D'UNE REGLE A CALCUL

4.1. Résolution de l'équation générale(1)

$$\frac{\text{Pr}(0 - x)}{\text{Pr}(x)} = \alpha \quad (1)$$

D'après sa définition

$$\text{Pr}(0 - x) = \sum_0^x \text{Pr}(x) \quad (2)$$

L'équation générale peut donc encore s'écrire sous la forme :

$$\sum_0^x \text{Pr}(x) = \alpha \text{Pr}(x) \quad (1')$$

En écrivant cette même équation pour $x-1$, on obtient :

$$\sum_0^{x-1} \text{Pr}(x) = \alpha \text{Pr}(x-1) \quad (1'')$$

et en retranchant membre à membre (1'') de (1')

$$\text{Pr}(x) = \alpha [\text{Pr}(x) - \text{Pr}(x-1)]$$

ou
$$\begin{cases} \text{Pr}(x) = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \text{Pr}(x-1) \\ \alpha \neq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Le calcul par récurrence conduit à :

$$\boxed{\text{Pr}(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^x \text{Pr}(0)} \quad (4)$$

Nous avons vu que la distribution de x était une distribution binomiale :

$$\text{Pr}(x) = \frac{(\tau nc)!}{x! (\tau nc - x)!} p^x (1 - p)^{(\tau nc - x)}$$

$$\text{Pr}(0) = (1 - p)^{\tau nc}$$

L'équation (4) s'écrit donc :

$$\frac{(\tau nc)!}{x! (\tau nc - x)!} \left(\frac{p}{1 - p} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^x = 1$$

En général x , nombre de pièces supplémentaires à prévoir, est négligeable devant τnc , nombre de pièces strictement nécessaires. Dans ces conditions:

$$(\tau nc)! \approx (\tau nc - x)! (\tau nc)^x$$

Pour $\tau nc = 100$ et $x = 5$ par exemple,

$$(\tau nc)! = 0,905 (\tau nc - x)! (\tau nc)^x$$

Pour $\tau nc = 1\,000$ et $x = 20$,

$$(\tau nc)! = 0,825 (\tau nc - x)! (\tau nc)^x$$

En remplaçant

$$\frac{(\tau nc)!}{(\tau nc - x)!}$$

par

$$(\tau nc)^x$$

dans l'équation (5), x est légèrement surestimé, mais la différence n'est guère sensible lorsque x ne représente qu'un faible pourcentage de τnc . Ainsi dans le premier exemple, on trouve $x = 5,13$ au lieu de $x = 5$, dans le second 20,23 au lieu de $x = 20$ (calcul par interpolation logarithmique).

Cette approximation permet de simplifier l'écriture de l'équation (5). On obtient en effet :

$$\frac{(\tau nc)^x}{x!} \left(\frac{p}{1 - p} \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right)^x = 1 \quad (6)$$

Lorsque $\alpha > 1$, toutes les grandeurs de l'équation (6) étant positives, il est possible de passer par les logarithmes :

$$\boxed{\frac{\log x!}{x} = \log \tau nc - \frac{p}{1 - p} \frac{\alpha - 1}{\alpha}} \quad (7)$$

C'est sous cette forme que l'équation générale paraît la plus exploitable.

4.2/ Réalisation d'un calculateur

La fonction de la seule variable x :

$$\frac{\log x!}{x}$$

est la somme de cinq fonctions biunivoques à une seule variable chacune :

$$\frac{\log x!}{x} = \log n + \log \tau + \log c + \log \frac{p}{1-p} + \log \frac{\alpha - 1}{\alpha} \quad (8)$$

Il est donc possible de réaliser une règle à calcul à deux règles mobiles permettant de déterminer rapidement x en fonction de n , τ , c , p , et α . Une telle règle se présenterait sous la forme indiquée sur la figure 7 ci-après.

V - CONCLUSION

Le mode de calcul par utilisation d'une règle spéciale paraît à priori le plus commode. Il donne des résultats plus précis que celui par lecture d'abaques. Il ne nécessite que deux calculs partiels simples au lieu de trois.

Il est également plus aisé que l'utilisation de tables importantes et ne nécessite pas de calcul d'interpolation. Il permet de se rendre facilement compte de l'influence des différents paramètres et donne donc ainsi à l'agent de production une indication sur l'importance ou le peu d'importance d'une détermination précise des variables.

Toutefois, cette méthode de calcul présente l'inconvénient de ne plus être applicable lorsque x n'est plus négligeable par rapport à τnc , c'est-à-dire lorsque la marge atteint par exemple 10 % du nombre des pièces nécessaires.

En définitive, il semble cependant que la solution d'une règle à calcul soit celle à retenir.

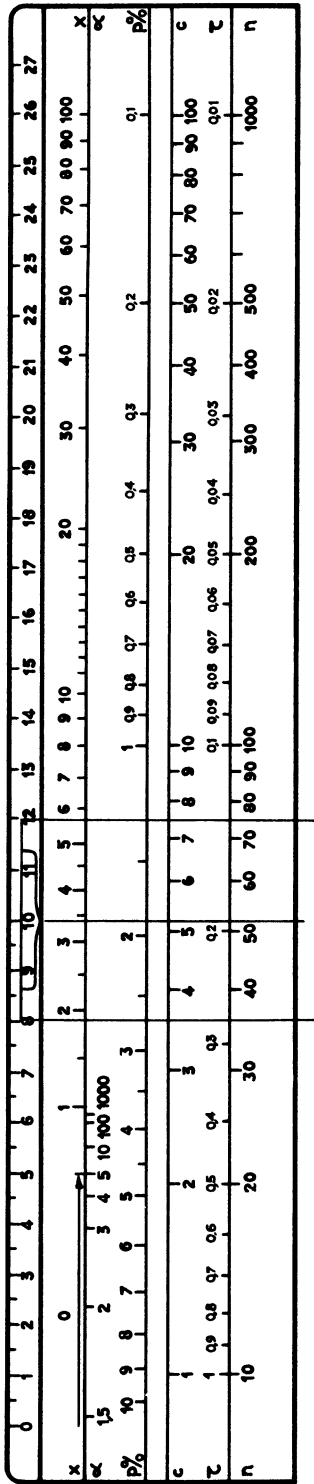


Fig. 7 - Schéma de la règle à calcul utilisée pour déterminer les marges de rebuts x en fonction :

- du nombre d'équipements à fabriquer n
- du coefficient représentatif du délai de réapprovisionnement r
- du coefficient de présence de la pièce dans l'équipement c
- du pourcentage de rebuts moyen p
- du rapport $\frac{A}{U}$ de la pénalité de chute à la valeur unitaire des pièces a