REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

F. CHARTIER

Note sur une méthode de contrôle basée sur les valeurs extrêmes de l'échantillon

Revue de statistique appliquée, tome 6, n° 4 (1958), p. 33-36
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_4_33_0>

NOTE SUR UNE MÉTHODE DE CONTROLE BASÉE SUR LES VALEURS EXTRÊMES DE L'ÉCHANTILLON

par

F. CHARTIER

Administrateur à l'I. N. S. E. E.

Test de l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse "alternative" H_1 :

H_0 : x est une variable normale de moyenne <u>nulle</u> et d'écart-type unité,
H_1 : x est une variable normale de moyenne $\lambda \neq 0$ et d'écart-type unité.

Pour cela Madame Zaludova définit quatre valeurs :

$$x_{1L} \leqslant x_{2L} < 0 < x_{2U} \leqslant x_{1U}$$

$$x_{1L} = - x_{1U}, \qquad x_{2L} = - x_{2U}$$

Madame Zaludova convient d'accepter H_0 si les n observations de x ont l'une des quatre dispositions suivantes par rapport à x_{1L}, x_{2L}, x_{2U} et x_{1U}:

		x_{1L}	x_{2L}	x_{2U}	x_{1U}
I	0	0	n	0	0
II	0	1	n - 1	0	0
III	0	0	n - 1	1	0
IV	0	1	n - 2	1	0

et de rejeter H_0 dans tous les autres cas.

DETERMINATION DES VALEURS x_{1L}, x_{2L}, x_{2U} et x_{1U} -

Il y a deux paramètres. Il faut donc deux conditions.

La première est que, l'hypothèse H_0 étant vraie, la probabilité d'accepter H_0 soit $1 - \alpha$ (par exemple 0,95) :

$$(1) \qquad Pr(I|H_0) + Pr(II|H_0) + Pr(III|H_0) + Pr(IV|H_0) = 1 - \alpha$$

où, en posant :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt, \quad F(-x) = 1 - F(x)$$

on a :

$$Pr(I|H_0) = [F(x_{2U}) - F(x_{2L})]^n = [2F(x_{2U}) - 1]^n ,$$

$$Pr(II|H_0) = Pr(III|H_0) = n [F(x_{2U} - 1]^{n-1} \; [F(x_{1U}) - F(x_{2U})] ,$$

$$Pr(IV|H_0) = n(n - 1) \; [2F(x_{2U}) - 1]^{n-2} \; [F(x_{1U}) - F(x_{2U})]^2$$

Il y a intérêt à fixer la deuxième condition de manière qu'elle détermine x_{2U}. Alors x_{1U} est obtenu en résolvant (1), équation du second degré en $F(x_{1U}) - F(x_{2U})$.

Dans son étude, Madame Zaludova fixe x_{2U} par la condition que, H_o étant vérifiée, la probabilité que 0 ou 1 des n observations soit supérieure à x_{2U} soit égale à $1 - \alpha_1$ avec α_1 petit :

$$(2) \qquad [F(x_{2U})]^n + n\,[F(x_{2U})]^{n-1}\,[1 - F(x_{2U})] = 1 - \alpha_1 .$$

$1 - \alpha_1$ est aussi la probabilité que 0 ou 1 des n observations soit inférieure à x_{2L}.

L'inconvénient de cette condition est que la résolution de l'équation (2) entraîne des calculs assez lourds, à moins que l'on ne dispose de la table de Fontanyi, Sardaki et Vas (Hongrie, 1953).

Une autre condition déterminant x_{2U} et conduisant à une équation plus facile à résoudre est que la probabilité d'avoir les n points entre x_{2L} et x_{2U} quand H_o est vérifiée soit égale à $1 - \alpha'$:

$$(3) \qquad Pr(I\,|H_o) = [2F(x_{2U}) - 1]^n = 1 - \alpha' ,$$

d'où

$$F(x_{2U}) = \frac{1}{2}\,[1 + (1 - \alpha')^{1/n}]$$

Si α' est petit, il suffit de peu de termes du développement de $(1 - \alpha')^{1/n}$ pour connaître $F(x_{2U})$ au centième, voire au millième ou au dix millième près.

RELATION ENTRE $1 - \alpha$ et $1 - \alpha'$ -

On doit évidemment avoir :

$$(1 - \alpha) - (1 - \alpha') = Pr(II|H_o) + Pr(III|H_o) + Pr(IV|H_o) \geqslant 0$$

Si $1 - \alpha' = 1 - \alpha$, x_{1L} et x_{2L} sont confondus et de même x_{2U} et x_{1U}. Il n'y a plus qu'un cas d'acceptation de H_o : la disposition I des n observations, les trois autres ayant une probabilité nulle.

Quand $1 - \alpha'$ décroît, l'intervalle x_{2L} à x_{2U} diminue, tandis que celui x_{1L} à x_{1U} augmente. Il existe une limite inférieure de $1 - \alpha'$ telle que x_{2L} à x_{2U} soit minimum, x_{1L} étant rejeté à $-\infty$ et x_{1U} à $+\infty$.

PUISSANCE DU TEST -

C'est $1 - \beta$ = Pr de rejeter H_o quand H_1 varie.

Le test est d'autant plus satisfaisant que $1 - \beta$ est plus grand ou β plus petit pour une différence donnée entre H_o et H_1, ici entre 0 et λ.

On a calculé β pour diverses valeurs de λ et de α', les deux autres paramètres, α et n, étant constants ($\alpha = 0,05$ et $n = 4$ - table 1). On constate que pour les valeurs élevées de λ, la variation de β en fonction de α' n'est pas monotone. En particulier, β atteint son minimum pour une valeur de α' inférieur à la limite rejetant x_{1L} et x_{1U} à l'infini.

VARIANTE DANS LA DEFINITION DES CAS FAVORABLES A H_0 -

Madame Zaludova en considère quatre, notés I, II, III et IV au début de la présente note, ce qui conduit à une équation (1) du second degré en $F(x_{1U}) - F(x_{2U})$.

Si on ne retient comme favorables à H_0 que les trois premiers cas, I, II, III, l'équation (1) est du premier degré en $F(u_{1U}) - F(x_{2U})$, donc plus facile à résoudre. Pour x_{2U} donné, la valeur de x_{1U} est peu différente de celle obtenue en retenant le cas IV, quoique systématiquement un peu plus grande. La puissance du test est aussi un peu moins forte (table 2). Même remarque en ce qui concerne sa variation en fonction de α' :

Tableau 1

Valeurs de β pour $n = 4$; $\alpha = 0,05$ et quatre cas d'acceptation de H_0
(Cas envisagés par Madame Zaludova)

	$\alpha' = 0,05$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,4412
x_{2U} =		2,226	2,056	1,925	1,818	1,721	1,635	1,555	1,493
	2,489								
x_{1U} =		2,495	2,506	2,531	2,570	2,633	2,738	2,954	
$\lambda = 0$	$\beta = 0,950$	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950
0,5	905	904	901	897	892	886	880	875	874
1	753	747	731	712	691	671	650	634	632
1,5	495	478	445	411	379	349	324	305	308
2	224	203	172	145	123	105	092	083	088
2,5	060	049	036	027	021	016	013	011	014

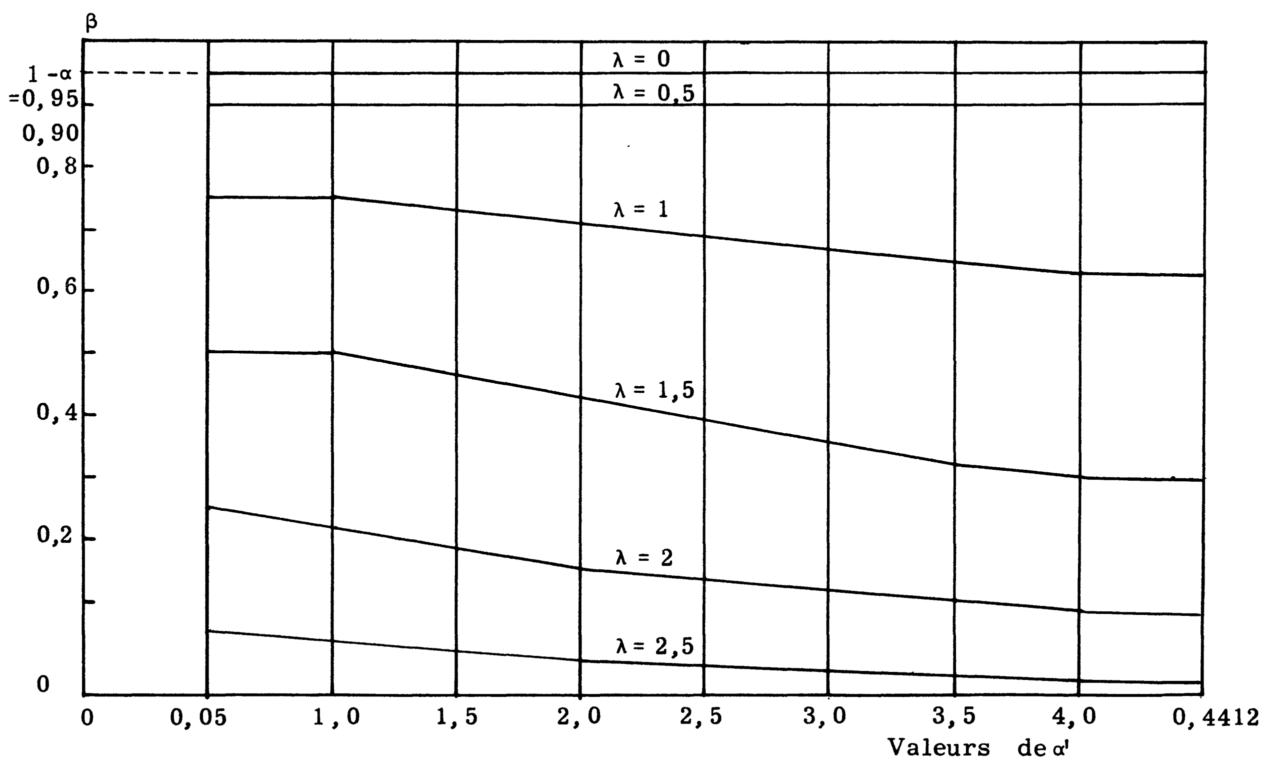

Tableau 2

Valeurs de β pour $n = 4$, $\alpha = 0,05$ et trois cas d'acceptation de H_o

	$\alpha' = 0,05$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,3369
$x_{2U} =$	2,489	2,226	2,056	1,925	1,816	1,721	1,657
$x_{1U} =$		2,501	2,504	2,576	2,678	2,911	
$\lambda = 0$	$\beta = 0,950$	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950
$= 0,5$	905	905	902	900	899	900	904
$= 1$	753	749	736	723	712	708	722
$= 1,5$	495	480	451	423	400	389	403
$= 2$	224	205	176	152	134	125	142
$= 2,5$	060	050	037	029	023	021	027