Revue de statistique appliquée

R. Meigniez

Le test du nombre de maxima

Revue de statistique appliquée, tome 6, n° 2 (1958), p. 97-106
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_2_97_0>

LE TEST DU NOMBRE DE MAXIMA

par

R. MEIGNIEZ

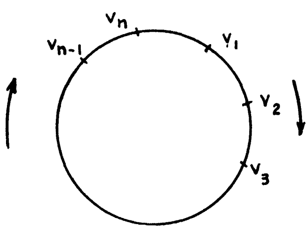
Psychologue à Ebauches S. A. (Neuchâtel,Suisse)

BUT DU TEST -

Le test du nombre de maxima est un test non paramétrique destiné à mettre en évidence le fait qu'une suite temporelle n'est pas au hasard.

PRINCIPE -

Soit une suite temporelle S de n valeurs inégales quelconques v_1, v_2 ..v_n,



On suppose que la suite est circulaire, c'est-à dire que v_n précède v_1. Par exemple, la suite des points disposés sur le cercle ci-contre, sans origine privilégiée et pour lequel on a défini un sens de lecture positif, est une suite circulaire v_1, v_2, ..., v_n.

On nomme maximum toute valeur v_q telle que l'on ait simultanément $v_q > v_{q-1}$ et $v_q > v_{q+1}$.

Soit k le nombre de maxima de la suite circulaire S. Si F_n (k) représente la fonction des probabilités cumulées de k pour une valeur donnée constante de n, le test consiste à éprouver k par rapport à cette distribution à un seuil donné. Autrement dit, pour des valeurs trop fortes ou trop faibles de k par rapport à F_n (k), on concluera que l'hypothèse nulle de la suite au hasard est à rejeter à ce certain seuil.

FORMULE FONDAMENTALE -

On sait que le nombre de permutations différentes de m valeurs inégales disposées circulairement est (m - 1)!

Considérons toutes les (n - 2)! suites circulaires possibles formées par n - 1 valeurs inégales. En ajoutant de toutes les façons possibles à chacune de ces suites une valeur V supérieure à toutes les autres, on aura obtenu toutes les

----

(1) L'étude de ce test a été réalisée dans le cadre du Service Psychologique d'Ebauches S.A., dirigé par Philippe de COULON, dans le but d'étudier la succession des temps dans les travaux répétitifs simples de l'industrie. Nous remercions également le Pr. BADER, de l'Université de Neuchâtel, pour ses précieuses suggestions, et l'Institut für angewandte Mathematik de Zürich qui a calculé les distributions de F_n (k) pour des valeurs de n allant de 4 à 500.

suites circulaires possibles S formées par n valeurs inégales.

En effet, chacune des (n - 2)! suites originelles a pu recevoir V en n - 1 positions différentes. On a donc obtenu (n - 1)! suites S, qui sont évidemment toutes différentes entre elles. Or, (n - 1)! est précisément le nombre des permutations différentes pour une suite circulaire de n valeurs. Il en résulte qu'on a bien obtenu ainsi toutes les suites circulaires possibles formées par n valeurs inégales.

Considérons ces (n - 1)! suites S obtenues, et demandons-nous comment se sont formées toutes celles qui comprennent un nombre donné k de maxima. Il est clair qu'elles n'ont pu être produites que de deux façons :

Cas A : A partir de suites originelles S_1, de (n - 1) valeurs et k maxima, et où l'adjonction de V n'a pas ensuite introduit de maximum supplémentaire.

Cas B : A partir de suites originelles S_2, de n - 1 valeurs et k - 1 maxima, et où l'adjonction de V a ensuite introduit un maximum supplémentaire.

Ces deux cas sont les seuls possibles pour l'obtention de k maxima selon le procédé décrit. En effet, l'adjonction de V ne peut ni accroître de plus qu'un, ni abaisser le nombre de maxima d'une suite. Les suites S_1 de k maxima et S_2 de k - 1 maxima sont donc bien les seules à intervenir dans la création de suites S à k maxima. Reprenons donc de plus près les cas A et B.

Cas A : D'après la définition du maximum, il est clair que le nombre de maxima de S_1 ne variera pas, chaque fois que V sera introduit en contiguité à un des maxima de S_1, ce qui peut se faire pour chacun de ceux-ci de deux façons, soit sur sa droite, soit sur sa gauche. Autrement dit, l'ancien nombre de maxima étant aussi égal à k, on peut écrire qu'à partir de chaque suite S_1 on a pu former 2k nouvelles suites possédant chacune k maxima.

Cas B : Il est également clair que le nombre de maxima de S_2 se sera accru d'une unité chaque fois que V n'aura pas été introduit en contiguité à un maximum de S_2. (k - 1) étant le nombre de maxima de S_2, V sera introduit en contiguité à l'un d'eux dans 2(k - 1) cas. Puisque V peut être introduit de (n - 1) façons différentes dans S_2, il en résulte que V n'aura pas été introduit en contiguité à un maximum dans :

$$(n - 1) - 2(k - 1) = n - 2k + 1 \text{ cas.}$$

Autrement dit, à partir de chaque suite S_2 on a pu former (n - 2k + 1) nouvelles suites possédant chacune k maxima.

Toutes les suites différentes possibles de n valeurs et k maxima ont été obtenues, comme on l'a vu, par notre procédé et à partir des seules suites de type S_1 et S_2.

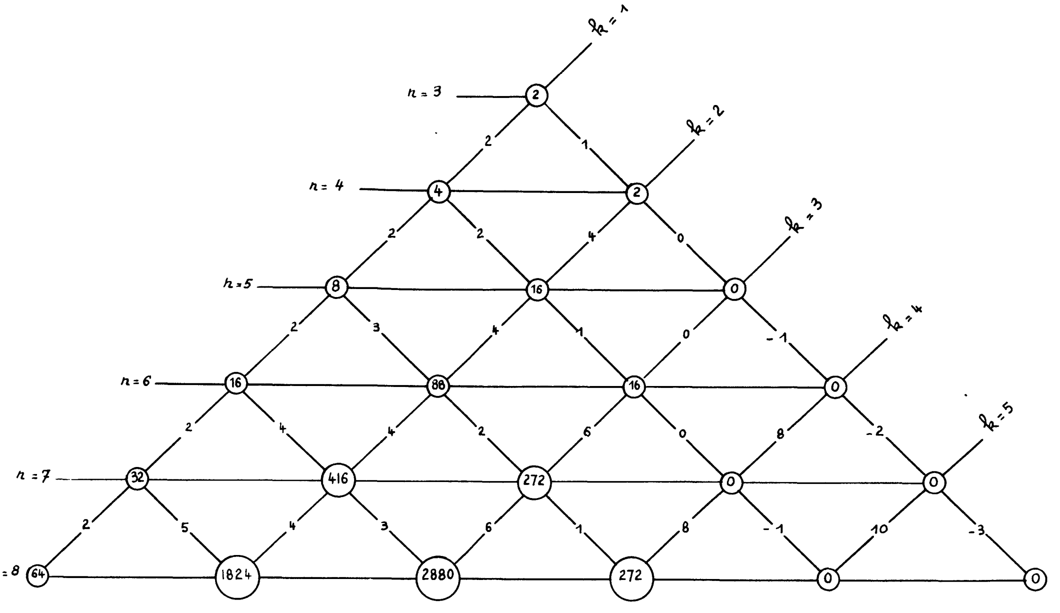
Si donc $\Delta_{(\alpha,\beta)}$ représente en général le nombre de façons différentes de disposer circulairement α valeurs de manière à obtenir β maxima, on peut écrire :

$$\Delta_{(n,k)} = 2k\,\Delta_{(n-1,k)} + (n - 2k + 1)\Delta_{(n-1,k-1)} \qquad (3)$$

Comme valeur particulière de $\Delta_{(n,k)}$, on obtient facilement $\Delta_{(3,1)} = 2$, nombre de façons différentes de disposer circulairement 3 valeurs de manière à avoir un maximum (ce qui en l'occurence a lieu dans tous les cas).

REPRESENTATION DE (3) SOUS FORME DE RESEAU -

Soit le réseau R suivant :



Le mode de formation de ce réseau est le suivant :

- A la pointe supérieure de R, on porte 2, valeur de $\Delta_{(3,1)}$.
- Le long des obliques k = 1, k = 2, etc..., on porte les valeurs 2k.
- Le long de chacune des obliques perpendiculaires aux précédentes, on porte la suite décroissante des nombres entiers en commençant par 1 pour la première oblique, par 2 pour la deuxième, etc.
- Les valeurs nodales sont égales à la somme des produits des nombres portés sur les deux segments obliques supérieurs qui y aboutissent par les valeurs nodales situées à l'autre extrémité de ces segments. Si nous considérons par exemple la valeur nodale située à l'intersection de (k = 2) et (n = 6), nous la calculerons ainsi $(3 \times 8) + (4 \times 16) = 88$.

Ces quatre conventions sont suffisantes et nécessaires pour déterminer R.

On vérifie facilement que, si $\Delta'_{(n,k)}$ est la valeur nodale située à l'intersection de l'oblique k et de l'horizontale n, on a effectivement vérifié (3) pour les Δ'. Puisque d'autre part on a pris la précaution d'introduire au sommet du réseau la valeur particulière $\Delta'_{(3,1)} = \Delta_{(3,1)} = 2$, on en conclut que les $\Delta'_{(n,\ k)}$ sont identiques aux $\Delta_{(n,k)}$. Autrement dit, les valeurs situées sur une même horizontale n représentent bien le nombre de façons différentes de disposer n valeurs circulairement de façon à obtenir des quantités k données de maxima.

On peut faire deux remarques intéressantes sur le réseau. Tout d'abord, que le nombre de nœuds non nuls pour un n donné est égal à $\frac{n}{2}$ pour n pair et à $\frac{(n-1)}{2}$ pour n impair. Ceci reflète simplement la même nécessité où se trouve la limite supérieure de k, d'après la définition même des maxima.

La seconde remarque, c'est que la somme des valeurs nodales pour chaque ligne horizontale est évidemment égale à $(n-1)!$, nombre des permutations possibles de n valeurs circulaires. On a donc, pour la probabilité d'obtenir k maxima pour une suite au hasard de n valeurs :

$$P\ (k) = \frac{\Delta(n,\ k)}{(n-1)!} \qquad (4)$$

Le réseau R et la formule (4) permettent le calcul de proche en proche des $P_n\ (k)$. Nous donnons ci-après un extrait de la table des $F_n\ (k) = \sum_{p=1}^{k} P_n\ (p)$, c'est-à-dire de la table des probabilités d'obtenir k maxima ou moins pour n valeurs. Cet extrait porte sur des valeurs de n allant de 1 à 46.

ESPERANCE MATHEMATIQUE DU NOMBRE DE MAXIMA

En général, l'espérance $E_n\ (k)$ du nombre de maxima pour une suite de n valeurs se calcule facilement.

En effet, si les n valeurs v sont rangées dans l'ordre croissant, leurs rangs étant 1, 2, . . . , q, . . . , (n - 1), n, la probabilité que la valeur de rang q soit un maximum dans la suite S au hasard est le produit de la probabilité qu'elle ait dans cette suite une valeur plus petite à sa droite par la probabilité qu'elle en ait une à sa gauche lorsqu'elle en a déjà une à sa droite. Autrement dit, on a :

$$P\ (q \text{ maximum}) = \frac{(q-1)(q-2)}{(n-1)(n-2)}$$

D'où :

$$E_n(k) = \sum \frac{(q-1)(q-2)}{(n-1)(n-2)} = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \sum_{q=1}^{n} [(q-1)^2 - (q-1)]$$

Soit, d'après les formules connues d'addition des premiers nombres :

$$E_n(k) = \frac{n}{3} \qquad (5)$$

Nous ne connaissons malheureusement pas les moments d'ordre supérieur au premier pour $P_n\ (k)$.

APPROXIMATION DE LA DISTRIBUTION DES $P_n\ (k)$ POUR n ELEVE -

Il semble que la distribution tende assez rapidement vers la normalité lorsque n croit. Cette hypothèse a été vérifiée jusque pour n = 500.

Pour n grand, on pourra proposer l'approximation suivante : la quantité

$$z = \frac{3k + 1,5 - n\ ^{(1)}}{\sqrt{0,4\ n}}$$

peut alors être approximativement considérée comme une variable normale réduite. Par exemple, pour n = 70 et k = 30, on obtient z = 4,06, valeur normale qui admet à sa droite une fraction de la courbe de Gauss égale à 2/100.000 (par un calcul exact, on peut voir que la surface de fréquence correspondante serait pour $F_n\ (k)$ en réalité de 1/100.000).

Diverses comparaisons que nous avons fait entre l'approximation normale et les fréquences réelles de $F_n\ (k)$, sur des valeurs de n comprises entre 30 et 500, nous ont montré que l'approximation est assez bonne à partir de n = 40. Jusque là, il est conseillé d'utiliser la table de $F_n\ (k)$.

---

(1) Formule proposée par le Prof. Dr. RUTISHAUSER de l'Institut de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich.

APPLICATION PRATIQUE DU TEST -

Un exemple pratique d'application fera voir le but du test et sa manipulation. Nous l'empruntons à Hald[1] à travers la citation qu'en fait E. Morice[2].

Deux solutions de concentration différente d'une même substance ont été placées l'une au-dessus de l'autre dans un mélangeur, la solution la plus concentrée ayant été versée la première. Après mélange, un robinet, placé à la partie inférieure du mélangeur, a permis de recueillir à intervalles réguliers 58 éprouvettes successives dont on a mesuré la concentration.

Les chiffres successifs sont donnés dans le tableau ci-après. (A lire horizontalement. Nous avons souligné les maxima en traits pleins, et souligné en pointillés un maximum rendu douteux par un ex-aequo).

$\underline{38}$	33	29	16	$\underline{44}$	21	16	17	$\underline{19}$	1
22	$\underline{28}$	22	14	7	13	$\underline{21}$	15	$\underline{34}$	23
15	19	$\underline{32}$	24	14	13	$\underline{22}$	8	$\underline{30}$	11
15	24	$\underline{26}$	14	11	$\underline{25}$	17	10	$\underline{19}$	5
6	$\underline{16}$	7	$\underline{10}$	1	$\underline{5}$	2	8	$\underline{14}$	14
15	$\underline{16}$	13	11	9	11	19	21		

Selon Hald, un mélange insuffisamment réalisé pourra être testé par la présence d'une concentration trop élevée, en général, pour les premières observations, trop basse pour les dernières. Notre point de vue ici sera évidemment légèrement différent : nous pourrons par exemple penser qu'un mélange insuffisant amènera la concentration des éprouvettes voisines à représenter des variations graduelles, typiques du passage progressif d'une zone de concentration à une autre dans le mélangeur. Ces variations graduelles, ou tendances, doivent nécessairement se traduire par un abaissement du nombre de maxima obtenu par rapport au nombre qu'on en attendrait dans le cas d'un mélange parfait, c'est-à-dire du hasard.

Notre ex-aequo nous pose une question : notre suite circulaire de 58 valeurs possède-t-elle 16 ou 17 maxima ?

Proposons, comme toujours en pareil cas, la solution de prudence : toujours se mettre dans la situation la moins favorable. Autrement dit, si mon intention était de prouver que le mélange est mal fait, donc qu'il y a des tendances, j'adopterai 17 maxima. Si au contraire je veux prouver la perfection du mélange, je considérerai qu'il n'y en a que 16.

Ceci est évidemment valable lorsqu'il n'y a pas trop de maxima douteux. Sinon, nous pensons que la question des ex-aequos mérite d'être traitée théoriquement à part.

Supposons donc d'abord que mon hypothèse m'entraîne à admettre 17 maxima. Nous savons que la formule de z : $z = \dfrac{3k + 1,5 - n}{\sqrt{0,4\,n}}$ obéit approximativement à une loi normale réduite. En remplaçant, il vient $z = \dfrac{51 + 1,5 - 58}{4,82} = -1,14$ valeur pour laquelle nous lisons dans la table intégrale de la loi de Gauss qu'elle laisse à sa gauche 12,7% de la distribution (le chiffre exact fourni par la loi du

----

(1) Hald : "Statistical theory with engineering applications", J. WILEY, 1952

(2) E. MORICE : "Quelques tests non-paramètriques", in Revue de Statistique appliquée, Vol IV, n°4, de 1956.

nombre de maxima serait 12,4%). Si nous travaillons au seuil de .05 (c'est-à-dire 5%) l'existence de tendances n'a donc pas été démontrée.

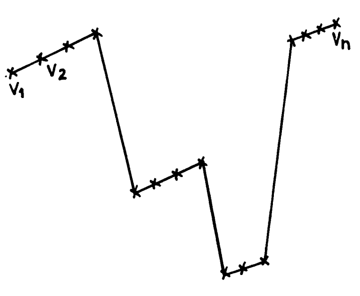
Voyons maintenant le cas où j'admettrais 16 maxima dans ma donnée. Nous obtenons cette fois : $z = \frac{48 + 1,5 - 58}{\sqrt{23,2}} = -1,76$ valeur qui laisse à sa gauche 3,9% de la surface de Gauss(1). Autrement dit, l'existence de tendances est cette fois démontrée au seuil de .05.

On remarquera que nous n'avons considéré que la gauche de la distribution parce que nous nous posions le problème de l'existence ou non de tendances ayant abaissé le nombre de maxima, et non le problème plus général de la non conformité de notre donnée à une suite au hasard (ce qui aurait pu se réaliser aussi bien par un excès de maxima).

CONCLUSIONS -

Le test du nombre de maxima (ou de minima, les deux quantités étant identiques) est un test non paramétrique d'application très rapide. Il suffit en effet de compter le nombre de maxima de la suite en la bouclant circulairement. Cette dernière procédure ne distort que d'une manière négligeable la signification qu'on peut accorder au test.

Il est bien évident que le test laisse échapper une importante quantité de l'information incluse dans les données. Aussi parait-il tout indiqué de l'utiliser là où ces dernières sont abondantes, et gagnent à être considérées à grande échelle, comme par exemple en ce qui concerne les temps courts de travail répétitif dans l'industrie.



Le test semble également intéressant pour s'appliquer à la recherche de tendances au sein d'une donnée d'autre part instable. Autrement dit, étant donné un phénomène aléatoire soumis à de brusques irrégularités qui en déplace l'ensemble des valeurs, existe-t-il d'autre part des tendances localement mais constamment à l'œuvre ? On aura une idée d'un tel phénomène d'après le schéma ci-contre. Notre test n'est en effet que peu influencé par un changement général de niveau des valeurs (au contraire par exemple des tests de médiane), alors qu'il enregistre bien les tendances locales répétées.

En règle générale, puisque $E_n(k) = \frac{n}{3}$, comme nous l'avons vu, on peut poser que des k supérieurs à cette quantité tendent à détecter l'existence de cycles brefs sur le mode d'une alternance de valeurs fortes et de valeurs faibles. Inversement, les k inférieurs signalent l'existence de tendances. Il y a lieu de se méfier des phénomènes de compensation entre périodes marquant la prédominance de l'un ou l'autre de ces phénomènes.

----

(1) En réalité 3,7% pour F_n (k) en valeur exacte.

TABLE DE $F_n(k) = \sum_{p=1}^{k} P_n(p)$

n = 4[1]

1	0,666 666 667
2	1,000 000 000

n = 5

1	0,333 333 333
2	1,000 000 000

n = 6

1	0,133 333 333
2	0,866 666 667
3	1,000 000 000

n = 7

1	0,044 444 444
2	0,622 222 222
3	1,000 000 000

n = 8

1	0,012 698 413
2	0,374 603 175
3	0,946 031 746
4	1,000 000 000

n = 9

1	0,003 174 603
2	0,193 050 794
3	0,803 174 603
4	1,000 000 000

n = 10

1	0,000 705 467
2	0,087 830 688
3	0,600 000 000
4	0,978 130 511
5	1,000 000 000

n = 11

1	0,000 141 093
2	0,035 555 556
3	0,395 132 275
4	0,902 504 409
5	1,000 000 000

n = 12

1	0,000 025 653
2	0,013 019 080
3	0,231 688 312
4	0,764 130 191
5	0,991 136 764
6	1,000 000 000

n = 13

1	0,000 004 276
2	0,004 356 795
3	0,122 353 696
4	0,586 649 564
5	0,953 302 336
6	1,000 000 000

n = 14

1	0,000 000 658
2	0,001 343 512
3	0,058 816 903
4	0,408 074 230
5	0,868 690 158
6	0,996 407 872
7	1,000 000 000

n = 15

1	0,000 000 094
2	0,000 384 331
3	0,025 974 966
4	0,258 392 519
5	0,737 085 607
6	0,978 162 484
7	1,000 000 000

n = 16

1	0,000 000 013
2	0,000 102 557
3	0,010 620 585
4	0,149 930 994
5	0,577 521 244
6	0,929 947 109
7	0,998 544 166
8	1,000 000 000

n = 17

1	0,000 000 002
2	0,000 025 649
3	0,004 046 817
4	0,080 275 789
5	0,417 174 900
6	0,841 840 643
7	0,989 969 534
8	1,000 000 000

n = 18

1	0,000 000 000
2	1,000 006 036

n = 18

3	0,001 444 885
4	0,039 919 275
5	0,278 451 737
6	0,716 938 954
7	0,963 829 141
8	0,999 409 973
9	1,000 000 000

n = 19

1	0,000 000 000
2	0,000 001 342
3	0,000 485 652
4	0,018 544 614
5	0,172 437 309
6	0,570 776 548
7	0,908 964 655
8	0,995 456 547
9	1,000 000 000

n = 20

1	0,000 000 000
2	0,000 000 282
3	0,000 154 282
4	0,008 089 426
5	0,099 540 769
6	0,424 019 986
7	0,819 967 785
8	0,981 799 932
9	0,999 760 871
10	1,000 000 000

n = 21

1	0,000 000 000
2	0,000 000 050
3	0,000 046 482
4	0,003 328 339
5	0,053 815 097
6	0,294 228 300
7	0,701 183 445
8	0,949 433 503
9	0,997 964 777
10	1,000 000 000

n = 22

1	0,000 000 000
2	0,000 000 011
3	0,000 013 321
4	0,001 296 713

----

(1) En tête de chaque ligne se trouve la valeur de la variable k.

n = 22	
5	0, 027 369 653
6	0, 191 194 070
7	0, 565 531 730
8	0, 890 326 346
9	0, 991 031 738
10	0, 999 903 085
11	1,000 000 000

n = 23	
1	0, 000 000 000
2	0, 000 000 002
3	0, 000 003 641
4	0, 000 480 009
5	0, 013 148 049
6	0, 116 728 426
7	0, 429 408 945
8	0, 801 745 996
9	0, 972 721 667
10	0, 999 096 599
11	1, 000 000 000

n = 24	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 951
4	0, 000 169 334
5	0, 005 987 853
6	0, 067 189 985
7	0, 307 055 698
8	0, 688 426 024
9	0, 935 553 043
10	0, 995 656 390
11	0, 999 960 722
12	1, 000 000 000

n = 25	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 238
4	0, 000 057 079
5	0, 002 593 717
6	0, 036 588 919
7	0, 207 111 651
8	0, 561 302 582
9	0, 873 771 288
10	0, 985 639 165
11	0, 999 602 027
12	1, 000 000 000

n = 26	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 057
4	0, 000 018 427
5	0, 001 071 734
6	0, 018 911 414
7	0, 132 081 649
8	0, 433 793 847
9	0, 786 280 050
10	0, 963 265 590
11	0, 997 926 484
12	0, 999 984 081
13	1, 000 000 000

n = 27	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 013
4	0, 000 005 709
5	0, 000 423 545
6	0, 009 305 432
7	0, 079 849 233
8	0, 317 750 694
9	0, 677 822 757
10	0, 922 422 773
11	0, 992 594 039
12	0, 999 825 804
13	1, 000 000 000

n = 28	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 003
4	0, 000 001 701
5	0, 000 160 463
6	0, 004 371 051
7	0, 045 883 699
8	0, 220 827 876
9	0, 557 798 736
10	0, 859 007 954
11	0, 979 599 360
12	0, 999 022 275
13	0, 999 993 548
14	1, 000 000 000

n = 29	
2	0, 000 000 000
3	0, 000 000 001
4	0, 000 000 488
5	0, 000 058 402
6	0, 001 965 001
7	0, 025 127 375
8	0, 145 851 800
9	0, 437 452 000
10	0, 772 948 178
11	0, 953 758 344
12	0, 996 247 573
13	0, 999 924 172
14	1, 000 000 000

n = 30	
3	0, 000 000 000
4	0, 000 000 135
5	0, 000 020 458
6	0, 000 847 339
7	0, 013 146 837
8	0, 091 733 955
9	0, 326 845 028
10	0, 668 828 674
11	0, 910 114 511
12	0, 988 921 844
13	0, 999 543 834
14	0, 999 997 385
15	1, 000 000 000

n = 31	
3	000 000 000
4	0, 000 000 036
5	0, 000 006 910
6	0, 000 351 211
7	0, 006 587 105
8	0, 055 059 966
9	0, 232 800 599
10	0, 554 834 125
11	0, 845 771 621
12	0, 973 160 377
13	0, 998 127 568
14	0, 999 967 148
15	0, 000 000 000

n = 32	
3	0, 000 000 000
4	0, 000 000 009
5	0, 000 002 253
6	0, 000 140 187
7	0, 003 167 421
8	0, 031 605 356
9	0, 158 264 204
10	0, 440 564 164
11	0, 761 305 897
12	0, 944 395 174
13	0, 994 100 602
14	0, 999 789 125
15	0, 999 998 940
16	1, 000 000 000

n = 33	
3	0, 000 000 000
4	0, 000 000 002
5	0, 000 000 711
6	0, 000 053 979
7	0, 001 464 602
8	0, 017 386 388
9	0, 102 850 958

n = 33

10	0,334 701 679
11	0,661 074 105
12	0,898 622 855
13	0,984 780 834
14	0,999 078 059
15	0,999 985 827
16	1,000 000 000

n = 34

3	0,000 000 000
4	0,000 000 001
5	0,000 000 217
6	0,000 020 081
7	0,000 652 425
8	0,009 184 256
9	0,064 003 426
10	0,243 366 547
11	0,552 283 297
12	0,833 836 832
13	0,966 504 899
14	0,996 911 813
15	0,999 903 302
16	0,999 999 571
17	1,000 000 000

n = 35

4	0,000 000 000
5	0,000 000 064
6	0,000 007 228
7	0,000 280 458
8	0,004 667 404
9	0,038 206 170
10	0,169 511 144
11	0,443 253 855
12	0,751 026 969
13	0,935 288 884
14	0,991 545 887
15	0,999 551 363
16	0,999 993 908
17	1,000 000 000

n = 36

4	0,000 000 000
5	0,000 000 018
6	0,000 002 520
7	0,000 116 520
8	0,002 285 919
9	0,021 915 912
10	0,113 237 584
11	0,341 577 991
12	0,654 298 276

n = 36

13	0,887 907 248
14	0,980 294 486
15	0,998 407 723
16	0,999 955 975
17	0,999 999 826
18	1,000 000 000

n = 37

4	0,000 000 000
5	0,000 000 005
6	0,000 000 852
7	0,000 046 853
8	0,001 080 697
9	0,012 100 916
10	0,072 650 174
11	0,252 778 944
12	0,550 058 181
13	0,823 015 867
14	0,959 763 989
15	0,995 388 850
16	0,999 783 947
17	0,999 997 390
18	1,000 000 000

n = 38

4	0,000 000 000
5	0,000 000 001
6	0,000 000 280
7	0,000 018 258
8	0,000 493 921
9	0,006 441 885
10	0,044 830 245
11	0,179 753 767
12	0,445 608 719
13	0,741 866 285
14	0,926 500 932
15	0,988 649 012
16	0,999 190 015
17	0,999 980 084
18	0,999 999 929
19	1,000 000 000

n = 39

5	0,000 000 000
6	0,000 000 089
7	0,000 006 903
8	0,000 218 537
9	0,003 311 377
10	0,026 646 285
11	0,122 943 863
12	0,347 662 158

n = 39

13	0,648 311 264
14	0,877 912 867
15	0,975 565 206
16	0,997 525 646
17	0,999 896 919
18	0,999 998 885
19	1,000 000 000

n = 40

5	0,000 000 000
6	0,000 000 028
7	0,000 002 535
8	0,000 093 728
9	0,001 646 002
10	0,015 277 996
11	0,080 967 995
12	0,261 232 044
13	0,548 094 895
14	0,813 153 441
15	0,953 030 051
16	0,993 584 029
17	0,999 592 909
18	0,999 991 041
19	0,999 999 971
20	1,000 000 000

n = 41

5	0,000 000 000
6	0,000 000 008
7	0,000 000 905
8	0,000 039 012
9	0,000 792 251
10	0,008 461 999
11	0,051 407 496
12	0,189 126 425
13	0,447 692 898
14	0,733 635 877
15	0,918 060 898
16	0,985 473 233
17	0,998 691 577
18	0,999 951 228
19	0,999 999 525
20	1,000 000 000

n = 42

5	0,000 000 000
6	0,000 000 002
7	0,000 000 315
8	0,000 015 776
9	0,000 369 702

n = 42

10	0, 004 533 592
11	0, 031 505 924
12	0, 132 023 454
13	0, 353 095 408
14	0, 642 971 030
15	0, 868 581 014
16	0, 970 675 403
17	0, 996 434 787
18	0, 999 797 612
19	0, 999 995 991
20	0, 999 999 988
21	1, 000 000 000

n = 43

5	0, 000 000 000
6	0, 000 000 001
7	0, 000 000 107
8	0, 000 006 205
9	0, 000 167 459
10	0, 002 352 507
11	0, 018 661 956
12	0, 088 944 513
13	0, 268 877 521
14	0, 546 345 822
15	0, 804 121 019
16	0, 946 367 216
17	0, 991 528 238
18	0, 999 317 209
19	0, 999 977 098
20	0, 999 999 798
21	1, 000 000 000

n = 44

6	0, 000 000 000
7	0, 000 000 036
8	0, 000 002 376
9	0, 000 073 707
10	0, 001 183 760
11	0, 010 696 876
12	0, 057 889 430
13	0, 197 741 215
14	0, 449 554 553
15	0, 726 188 981
16	0, 909 978 651
17	0, 982 075 929
18	0, 998 049 235
19	0, 999 900 364
20	0, 999 998 212
21	0, 999 999 993
22	1, 000 000 000

n = 45

6	0, 000 000 000
7	0, 000 000 011
8	0, 000 000 886
9	0, 000 031 557
10	0, 000 578 276
11	0, 005 940 318
12	0, 036 438 269
13	0, 140 529 121
14	0, 357 986 067
15	0, 638 168 937
16	0, 859 854 198

n = 45

17	0, 965 690 186
18	0, 995 144 999
19	0, 999 647 940
20	0, 999 989 319
21	0, 999 999 914
22	1, 000 000 000

n = 46

6	0, 000 000 000
7	0, 000 000 004
8	0, 000 000 322
9	0, 000 013 154
10	0, 000 274 543
11	0, 003 199 719
12	0, 022 205 892
13	0, 096 579 650
14	0, 275 835 665
15	0, 544 774 647
16	0, 795 811 789
17	0, 939 819 167
18	0, 989 254 036
19	0, 998 947 482
20	0, 999 951 388
21	0, 999 999 208
22	0, 999 999 998
23	1, 000 000 000