

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. ROUZET

**Utilisation d'une distribution tronquée pour la variable agissante  $x$  en vue de réduire la dispersion d'une variable stochastiquement résultante  $y$**

*Revue de statistique appliquée*, tome 6, n° 1 (1958), p. 73-90

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1958\\_\\_6\\_1\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_1_73_0)

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# UTILISATION D'UNE DISTRIBUTION TRONQUÉE POUR LA VARIABLE AGISSANTE X EN VUE DE RÉDUIRE LA DISPERSION D'UNE VARIABLE STOCHASTIQUEMENT RÉSUULTANTE Y

par

**G. ROUZET**

*Ingénieur à la Compagnie des Compteurs*

Dans certains problèmes mettant en jeu la liaison entre deux variables aléatoires, l'une de ces variables, soit  $y$ , exprime un résultat de plusieurs actions simultanées, parmi lesquelles est plus spécialement distinguée l'action d'un facteur agissant, caractérisé par l'autre variable, soit  $x$ .

L'étude de la régression de  $y$  en  $x$  conduit à l'équation d'une courbe de régression et à l'expression d'une variance liée, cette dernière étant la conséquence des actions des facteurs autres que  $x$ .

La loi de probabilité de  $y$ , loi marginale de  $y$  de la loi à deux variables, apparait alors comme la répercussion de la distribution des valeurs de  $x$ , par le jeu de la loi de  $y$  liée par  $x$ .

Il en est ainsi lorsqu'on étudie, par exemple, la distribution de l'erreur d'un appareil de mesure en fonction de la distribution de la cote d'une pièce mécanique  $P$  qui intéresse directement son fonctionnement.

Toutes choses restant par ailleurs constantes (donc l'expression de la loi liée restant inchangée), on peut alors songer à réduire la dispersion de l'erreur  $y$  (c'est-à-dire augmenter la précision de l'appareil) en diminuant la dispersion de  $x$ .

Il est quelquefois possible, pour ce faire, d'adopter un processus de fabrication de la pièce  $P$ , ayant une variabilité moindre. De la nouvelle loi de  $x$  se déduira très simplement la nouvelle loi de  $y$ .

Il est d'autres fois impossible de réduire la dispersion de  $x$  en agissant sur le processus de fabrication : soit parce que la technique est complexe, soit parce que l'amélioration serait trop onéreuse, soit encore parce que l'on n'est pas maître d'agir sur le processus (cas de lots reçus de fournisseurs extérieurs). Mais on peut alors envisager de réduire la dispersion de la cote de la pièce  $P$  en éliminant les cotes de valeurs extrêmes, par un tri préalable à l'utilisation. Le problème qui se pose est de déterminer des limites au-delà desquelles les pièces doivent être refoulées pour obtenir la précision désirée.

Revenons au cas général : l'idée consiste donc à tronquer la distribution de  $x$  de façon à obtenir une réduction de la dispersion de  $y$ . Et le problème consiste à déterminer, pour un effet donné, où l'on doit tronquer cette distribution.

C'est ce problème que M. Rouzet se propose d'étudier ici.

Pour  $y$  répondre, il faut commencer par étudier la distribution de  $y$  correspondant à une loi de  $x$  tronquée donnée.

# 1. - BASE DE L'ÉTUDE MATHÉMATIQUE

Nous nous placerons pour l'étude dans le cas de la loi normale à deux variables ; hypothèse classique, assez souvent admissible, correcte dans l'exemple pris ci-dessus.

La loi marginale en  $x$  est normale, de moyenne  $m_x$  et d'écart-type  $\sigma_x$  ; la loi marginale en  $y$  est normale, de moyenne  $m_y$  et d'écart-type  $\sigma_y$ .

La régression est alors linéaire et homoscédastique.

De plus, nous pouvons alors calculer le coefficient de corrélation  $\rho$  entre  $x$  et  $y$ .

Pour simplifier l'étude, sans nullement nuire d'ailleurs à la généralité, nous étudierons le phénomène à partir des variables normées  $\xi$  et  $\eta$ , c'est-à-dire des variables :

$$\xi = \frac{x - m_x}{\sigma_x} \qquad \eta = \frac{y - m_y}{\sigma_y}$$

Dans ces conditions, la droite de régression (figure 1) a pour équation

$$\eta = \rho \xi$$

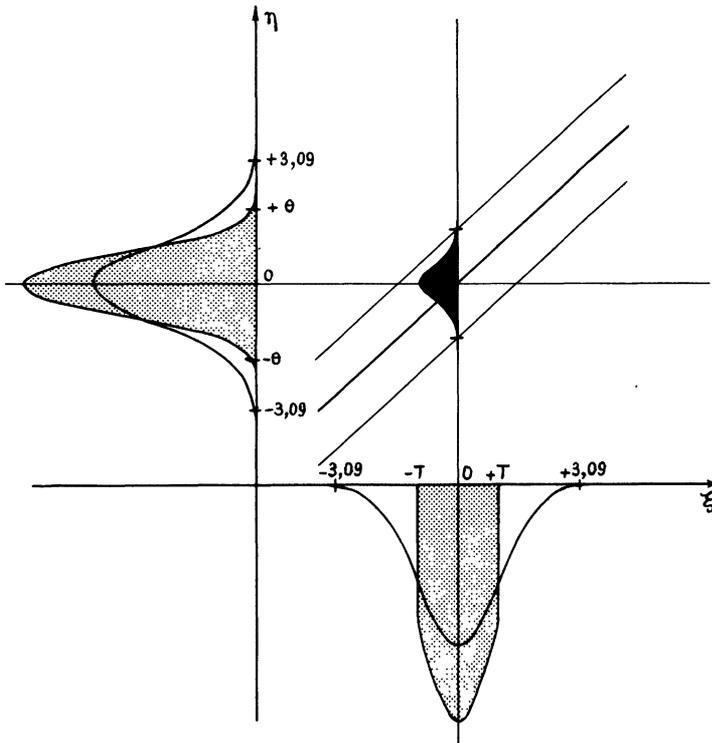


Figure 1

Loi normale à 2 variables. Loi de  $\eta$  correspondant à une loi de  $\xi$  tronquée en  $T$ . Limite  $\theta$  en probabilité

et la variance liée a pour valeur :

$$\sigma_{\eta|\xi}^2 = 1 - \rho^2$$

de sorte que la régression est entièrement définie par la valeur du coefficient de corrélation  $\rho$ .

Enfin, nous nous bornerons ici à l'étude de la loi de  $\eta$  correspondant à une loi de  $\xi$  tronquée symétriquement (figure 1); la loi étant symétrique, il suffit alors de préciser la valeur absolue T de la distance entre l'origine et les bornes de la loi tronquée. Il est important de noter que T représente une distance de la moyenne, en nombre d'écart-types de la loi normale initiale non bornée.

Nous nous intéresserons aux limites en probabilité de la loi de  $\eta$ . Et comme l'intervalle à 998 o/oo est généralement admis comme définissant les bornes "pratiques" d'une distribution, en matière d'applications, nous nous intéresserons plus spécialement aux limites à 998 o/oo. Là encore, la loi étant symétrique, il suffira de définir la distance  $\theta$  entre l'origine et ces limites. Donc  $\theta$  est une distance de la moyenne, en nombre d'écart-types de la loi normale initiale non bornée.

Tout ceci étant posé, nous pouvons alors réénoncer le problème :

Etudier  $\theta$  en fonction de T, pour une valeur donnée de  $\rho$ .

(La figure 1 représente exactement le processus étudié, dans le cas numérique particulier de  $\rho = 0,9$  et  $T = 1$ ; seule la loi liée à été représentée à une échelle différente, quant à la densité de probabilité, pour la clarté du graphique).

## 2. - LOI NORMALE A 2 VARIABLES

### LOI DE $\eta$ CORRESPONDANT A UNE LOI TRONQUÉE DE $\xi$ LIMITE EN PROBABILITÉ DE LA LOI DE $\eta$

#### 2-1. - Rappel des caractéristiques de la loi normale à deux variables

La loi normale à 2 variables normées  $\xi$  et  $\eta$  s'écrit :

$$\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{1-\rho^2}} d\xi d\eta \quad (1)$$

les loi marginales sont respectivement :

$$g(\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (2)$$

$$h(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta \quad (3)$$

et la loi de  $\eta$  liée par  $\xi$  s'exprime par

$$h_{\xi}(\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\eta - \rho\xi}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)^2} d\eta \quad (4)$$

## 2-2. - Loi tronquée de $\xi$

L'élimination des valeurs de  $\xi$  extérieures à l'intervalle  $(-T, +T)$  transforme la loi marginale (2) en la loi tronquée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi < -T \\ \xi > +T \end{array} \right\} g(\xi, T) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -T \leq \xi \leq +T : g(\xi, T) d\xi = \frac{\int_{-T}^{+T} g(\xi) d\xi}{\int_{-T}^{+T} g(\xi) d\xi} = \frac{f(\xi) d\xi}{F(+T) - F(-T)} \end{array} \right.$$

où  $f$  et  $F$  représentent respectivement la densité de probabilité et la fonction de répartition de la loi normale en variable centrée réduite.

Si l'on remarque que :

$$F(-T) \equiv 1 - F(T)$$

on pourra encore écrire :

$$-T \leq \xi \leq +T \quad g(\xi, T) d\xi = \frac{f(\xi)}{2F(T) - 1} d\xi \quad (5)$$

## 2-3. - Loi de $\eta$ liée par $\xi$

Cette loi est restée identique à elle-même. Les relations (4) et (5) sont donc la base de l'étude mathématique.

## 2-4. - Loi à deux variables en $\xi$ et $\eta$

La nouvelle loi à deux variables s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, T) d\xi d\eta &= g(\xi, T) d\xi \cdot h(\eta) d\eta \\ &= \frac{g(\xi) d\xi h_\xi(\eta) d\eta}{2F(T) - 1} \\ &= \frac{\varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta}{2F(T) - 1} \\ \varphi(\xi, \eta, T) d\xi d\eta &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{1-\rho^2}}}{2F(T) - 1} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6)$$

## 2-5. - Loi marginale en $\eta$

La nouvelle loi de  $\eta$ , loi marginale en  $\eta$  de la précédente (6) a donc pour expression :

$$h(\eta, T) d\eta = d\eta \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{2F(T) - 1} e^{-\frac{1}{2} \frac{\xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2}{1-\rho^2}} d\xi$$

Si l'on remarque que :

$$\begin{aligned} \xi^2 - 2\rho\xi\eta + \eta^2 &= (\xi - \rho\eta)^2 - \rho^2\eta^2 + \eta^2 \\ &= (\xi - \rho\eta)^2 + \eta^2(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

on peut encore écrire :

$$\begin{aligned}
 h(\eta, T) &= \frac{1}{2F(T)-1} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\xi - \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 + \eta^2 \right]} d\xi \\
 &= \frac{1}{2F(T)-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{-T}^{+T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\xi - \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}} \right)^2} d\xi
 \end{aligned}$$

ou en posant :

$$\frac{\xi - \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}} = z$$

$$h(\eta, T) = \frac{1}{2F(T)-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \int_{\frac{-T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}}^{\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

soit, avec nos notations :

$$h(\eta, T) = \frac{1}{2F(T)-1} f(\eta) \left[ F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - F\left(\frac{-T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right]$$

ou finalement :

$$\boxed{h(\eta, T) = f(\eta) \frac{F\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1}{2F(T)-1}} \quad (7)$$

## 2-6. - Formes limites de $h(\eta, T)$

En fait,  $f(\eta)$  représente aussi bien ici la loi marginale initiale  $h(\eta)$  que l'on pourrait écrire  $h(\eta, \infty)$ , et l'on a encore :

$$h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1}{2F(T)-1} \quad (7')$$

Sous cette forme, on retrouve bien les deux expressions limites :

- Pour  $\rho = 0$ , on a :

$$h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F(T) + F(T) - 1}{2F(T)-1}$$

donc :

$$h(\eta, T) \equiv h(\eta)$$

il ne sert à rien de tronquer la loi de  $\xi$  si les deux variables sont sans corrélation

- Pour  $\rho = 1$ , on a :

$$h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F\left(\frac{T+\eta}{0}\right) + F\left(\frac{T-\eta}{0}\right) - 1}{2F(T)-1}$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \text{ si } \eta < -T : \\ \quad h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F(-\infty) + F(+\infty) - 1}{2F(T) - 1} = h(\eta) \frac{0 + 1 - 1}{2F(T) - 1} = 0 \\ - \text{ si } \eta > T \\ \quad h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F(+\infty) + F(-\infty) - 1}{2F(T) - 1} = h(\eta) \frac{1 + 0 - 1}{2F(T) - 1} = 0 \\ - \text{ si } -T < \eta < +T \\ \quad h(\eta, T) = h(\eta) \frac{F(+\infty) + F(+\infty) - 1}{2F(T) - 1} = h(\eta) \frac{1 + 1 - 1}{2F(T) - 1} = \frac{h(\eta)}{2F(T) - 1} \end{array} \right.$$

on retrouve en  $\eta$  la même expression de loi tronquée que celle que l'on a adoptée pour  $\xi$ . Les bornes absolues  $(-T, +T)$  de la distribution de  $\xi$  se retrouvent intégralement sur la distribution de  $\eta$  dans le cas où il y a liaison fonctionnelle entre ces deux variables.

Revenons à l'expression (7). Pour  $\rho$  quelconque on peut obtenir la forme limite de  $h(\eta, T)$  pour  $T \rightarrow 0$  et pour  $T \rightarrow \infty$ .

Faisons d'abord  $T \rightarrow 0$ , nous obtenons (voir annexe I) :

$$h(\eta, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{1-\rho^2}}$$

on retrouve bien l'expression (4) de la loi liée de  $\eta$  par  $\xi$ , au point  $\xi = 0$ .

Faisons maintenant  $T \rightarrow \infty$ . Nous avons :

$$h(\eta, T) = f(\eta) \frac{F(+\infty) + F(+\infty) - 1}{2F(+\infty) - 1} = f(\eta)$$

d'où encore :

$$h(\eta, T) \equiv h(\eta)$$

Ces considérations limites ne font que vérifier que  $h(\eta, T)$  y prend des formes évidentes par ailleurs. Malheureusement, là sont les seuls cas où  $h(\eta, T)$  prend une expression sinon simple, du moins calculable. Dans les autres cas, on ne pourra que construire  $h(\eta, T)$  par points, à l'aide des tables de la loi normale.

Pour les calculs, on pourra encore mettre (7) sous la forme :

$$h(\eta, T) = f(\eta) \frac{F\left(\frac{\eta + \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right) - F\left(\frac{\eta - \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right)}{2F(T) - 1} \quad (7'')$$

## 2-7. - Limites $\theta$ en probabilité

Si nous appelons  $H(\eta, T)$  la fonction de répartition de  $\eta$ , nous avons, par définition :

$$H(\eta, T) = \int_{-\infty}^{\eta} f(\eta) \frac{F\left(\frac{T + \rho\eta}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) + F\left(\frac{T - \rho\eta}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - 1}{2F(T) - 1} d\eta$$

Cette fonction n'est évidemment pas algébriquement calculable. Il s'ensuit que la limite en probabilité  $\theta$ , au seuil  $\alpha$ , sera définie par la seule fonction :

$$H(\theta, T) = \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) \frac{F\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1+\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1}{2F(T) - 1} d\eta = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (8)$$

que nous laisserons sous la forme :

$$H(\theta, T) = \int_{-\infty}^{\theta} h(\eta, T) d\eta = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad (9)$$

On peut alors songer à donner au problème une solution graphique ; cette solution se présentera sous la forme d'une famille de courbe à  $\rho$  constant, chaque courbe donnant, pour la valeur de  $\rho$  correspondante, la valeur de  $\theta$ , en fonction de celle de  $T$ .

### 3. - ÉTUDE NUMÉRIQUE - PRÉSENTATION GRAPHIQUE DES RÉSULTATS

#### 3-1. - Cas limites

Plaçons-nous à nouveau dans les cas limites envisagés plus haut.

- Pour  $\rho = 0$ , nous avons :

$$h(\eta, T) \equiv h(\eta) \equiv f(\eta)$$

d'où : 
$$H(\theta, T) = F(\theta) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Cette dernière relation définit, dans les tables de la loi normale,  $\theta$  en fonction de  $\alpha$ . En particulier, pour  $\alpha = 0,002$  :  $\theta = 3,09$ .

- Pour  $\rho = 1$ , nous avons obtenu pour loi de  $\eta$ , la même loi normale tronquée que celle prise pour  $\xi$ . La limite absolue (soit pour  $\alpha = 0$ ) de la loi de  $\eta$  est donc fournie par  $\theta \equiv T$  ; mais c'est, pour une raison évidente d'homogénéité, à la limite en probabilité au seuil  $\alpha$ , que nous nous intéresserons encore. Nous avons alors :

$$H(\theta, T) = \frac{\int_{-T}^{\theta} h(\eta) d\eta}{2F(T) - 1} \equiv \frac{\int_{-T}^{\theta} f(\eta) d\eta}{2F(T) - 1} = \frac{F(\theta) - F(-T)}{2F(T) - 1} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$\theta$  est alors défini par :

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) [2F(T) - 1] + [1 - F(T)] \\ &= 2F(T) - \alpha F(T) - \alpha + 1 - F(T) \end{aligned}$$

soit :

$$F(\theta) = (1 - \alpha) F(T) + \frac{\alpha}{2}$$

Cette courbe, qui admet pour asymptote lorsque  $T \rightarrow \infty$  la valeur de  $\theta$  telle que :

$$F(\theta) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

peut être aisément tracée par points. On aura par exemple, pour  $\alpha = 0,002$

T	$\theta$
0	0
0,5	0,499
1,0	0,997
1,5	1,493
2,0	1,981
2,5	2,445
3,09	2,880
3,5	3,032
4,0	3,084
.....	.....
$\infty$	3,090

D'où la courbe de la figure 2.

- Pour  $\rho$  quelconque, reprenons maintenant les limites pour  $T \rightarrow 0$  et  $T \rightarrow \infty$ .
- Pour  $T \rightarrow 0$ , nous avons obtenu l'expression de la loi liée au point  $\xi = 0$ , c'est-à-dire l'expression d'une loi normale de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{moyenne : } 0 \\ \text{écart-type : } \sqrt{1 - \rho^2} \end{array} \right.$$

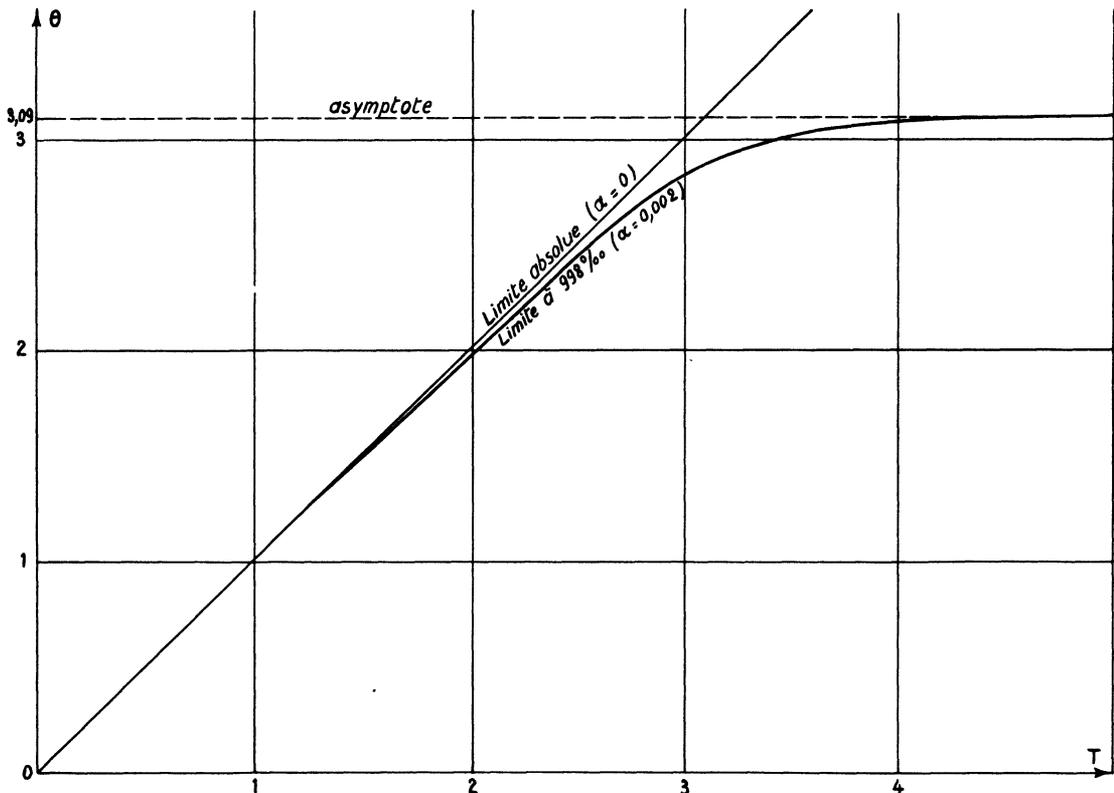


Figure 2  
Cas de  $\rho = 1$

D'où la valeur de  $\theta$ . Pour  $\alpha = 0,002$ , nous avons :

$$\theta = 3,09 \sqrt{1 - \rho^2}$$

soit, pour les quelques valeurs suivantes de  $\rho$  :

$\rho$	$\sqrt{1 - \rho^2}$	$3,09 \sqrt{1 - \rho^2}$
0,50	0,866	2,68
0,60	0,800	3,47
0,70	0,714	2,21
0,80	0,600	1,86
0,90	0,436	1,35
0,95	0,312	0,96
0,99	0,141	0,44

- Pour  $T \rightarrow \infty$  nous avons :

$$H(\theta, \infty) = F(\theta)$$

d'où, pour  $\alpha = 0,002$ , la valeur asymptotique  $\theta = 3,09$ .

### 3-2. - Calcul numérique dans le cas général

Revenons au cas général, donc à l'expression (9).

Pour obtenir la valeur de  $\theta$ , il reste possible de déterminer avec précision la courbe  $h(\eta, T)$ , à l'aide de l'expression (7'') et d'en déduire avec une approximation donnée les valeurs de la courbe intégrale  $H(\eta, T)$ , fournissant  $\theta$  comme abscisse du point d'ordonnée  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ .

L'approximation de  $H(\eta, T)$  pourra être obtenue, par des moyens fort simples; les ordonnées  $h(\eta, T)$  étant calculées pour des valeurs régulièrement échelonnées, on approximera par exemple (figure 3) l'aire de la courbe par celle du rectangle d'ordonnée moyenne; il ne reste plus qu'à cumuler les aires ainsi obtenues.

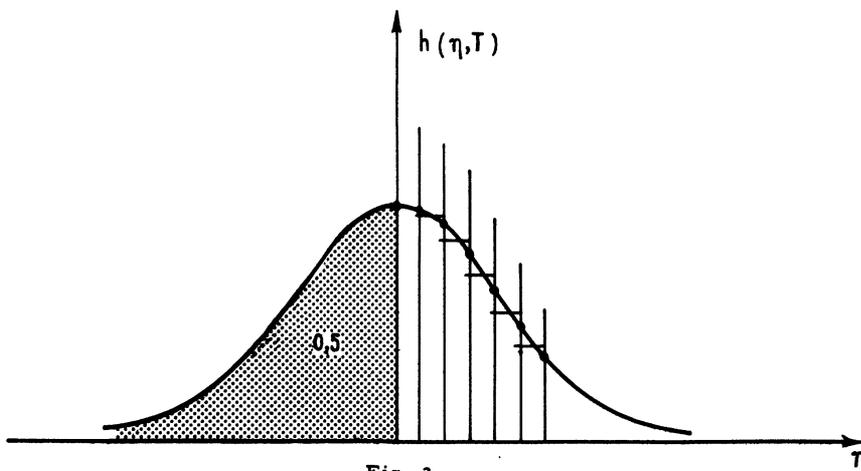


Fig. 3

L'approximation est évidemment d'autant plus précise que le découpage est fin.

$$\rho = 0,9 \quad T = 1 \quad \frac{T}{\rho} = 1,1111 \quad \sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1} = 0,48432 \quad 2F(T) - 1 = 0,6826 \quad \theta = 1,85$$

$f(\eta)$	$\eta$	$\eta + \frac{T}{\rho}$	$\eta - \frac{T}{\rho}$	$\left(\frac{\eta + \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right)$	$\left(\frac{\eta - \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right)$	$F\left(\frac{\eta + \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right)$	$F\left(\frac{\eta - \frac{T}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} - 1}}\right)$	(7)-(8)	$h(\eta, T)$	Somme	Moyenne	$H(\eta, T)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
0,3989	0,00	1,1111	-1,1111	2,294	-2,294	0,9891	0,0109	0,9782	0,5717	—	—	0,50000
0,3970	0,10	1,2111	-1,0111	2,500	-2,088	0,9938	0,0184	0,9754	0,5673	1,1390	0,5695	0,55695
0,3910	0,20	1,3111	-0,9111	2,707	-1,881	0,9966	0,0300	0,9666	0,5537	1,1210	0,5605	0,61300
0,3814	0,30	1,4111	-0,8111	2,913	-1,675	0,9982	0,0470	0,9512	0,5314	1,0851	0,5426	0,66726
0,3683	0,40	1,5111	-0,7111	3,120	-1,468	0,9991	0,0711	0,9281	0,5008	1,0322	0,5161	0,71887
0,3521	0,50	1,6111	-0,6111	3,326	-1,262	0,9996	0,1034	0,8962	0,4623	0,9631	0,4816	0,76703
0,3332	0,60	1,7111	-0,5111	3,533	-1,055	0,9998	0,1457	0,8541	0,4169	0,8792	0,4396	0,81099
0,3123	0,70	1,8111	-0,4111	3,739	-0,849	0,9999	0,1980	0,8019	0,3669	0,7838	0,3919	0,85018
0,2897	0,80	1,9111	-0,3111	3,946	-0,642	1,0000	0,2604	0,7396	0,3139	0,6808	0,3404	0,88422
0,2661	0,90	2,0111	-0,2111	4,152	-0,436	1,0000	0,3314	0,6686	0,2606	0,5745	0,2872	0,91294
0,2420	1,00	etc	-0,1111	etc	-0,229	etc	0,4094	0,5906	0,2094	0,4700	0,2350	0,93644
0,2179	1,10		-0,0111		-0,023		0,4908	0,5092	0,1625	0,3719	0,1859	0,95503
0,1942	1,20		0,0889		0,184		0,5730	0,4270	0,1215	0,2840	0,1420	0,96923
0,1714	1,30		0,1889		0,390		0,6517	0,3483	0,0875	0,2090	0,1045	0,97968
0,1497	1,40		0,2889		0,597		0,7247	0,2753	0,0604	0,1479	0,0739	0,98707
0,1295	1,50		0,3889		0,803		0,7890	0,2110	0,0400	0,1004	0,0502	0,99209
0,1109	1,60		0,4889		1,010		0,8438	0,1562	0,0254	0,0654	0,0327	0,99536
0,0961	1,70		0,5889		1,216		0,8880	0,1120	0,0154	0,0408	0,0204	0,99740
0,0790	1,80		0,6889		1,423		0,9226	0,0774	0,0090	0,0244	0,0122	0,99862
0,0656	1,90		0,7889		1,629		0,9483	0,0517	0,0050	0,0140	0,0070	0,99932
0,0540	2,00		0,8889		1,835		0,9668	0,0332	0,0026	0,0076	0,0038	0,99970
0,0440	2,10		0,9889		2,042		0,9794	0,0206	0,0013	0,0039	0,0019	0,99989
0,0355	2,20		1,0889		2,248		0,9877	0,0123	0,0006	0,0019	0,0009	0,99998
0,0283	2,30		1,1889		2,455		0,9930	0,0070	0,0003	0,0009	0,0004	1,00002
0,0224	2,40		1,2889		2,661		0,9961	0,0039	0,0001	0,0004	0,0002	1,00004
0,0175	2,50		1,3889		2,868		0,9979	0,0021	0,0001	0,0002	0,0001	1,00005
0,0136	2,60		1,4889		3,074		0,9989	0,0011	0,0000	0,0001	0,0000	
0,0104	2,70		1,5889		3,281		0,9995	0,0005	etc	0,0000		
0,0079	2,80		1,6889		3,487		0,9998	0,0002				
0,0060	2,90		1,7889		3,694		0,9999	0,0001				
0,0044	3,00		1,8889		3,900		1,0000	0,0000				
0,0033	3,10		1,9889		etc		etc	etc				
0,0024	3,20		2,0889									
0,0017	3,30		2,1889									
0,0012	3,40		2,2889									
0,0009	3,50		2,3889									
0,0006	3,60		2,4889									
0,0004	3,70		2,5889									
0,0003	3,80		2,6889									
0,0002	3,90		2,7889									
0,0001	4,00		2,8889									

Nous avons appliqué cette méthode. Les calculs ont été effectués sur des tableaux analogues au tableau ci-joint (qui correspond aux courbes de la figure 1).

On pourrait aussi déterminer numériquement  $\theta$  à partir des tables de la loi normale à deux variables. Cette méthode a l'inconvénient de ne pas donner l'allure de la courbe  $h(\eta, T)$ . Par contre, elle a l'avantage de mettre en jeu des calculs plus simples pour la détermination de  $\theta$ , pour un seuil de probabilité  $\alpha$  donné.

### 3-3. - Pente des courbes au point courant

Dérivons l'expression (8). Il vient :

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial H}{\partial T} dT + \frac{\partial H}{\partial \rho} d\rho = 0$$

Sur la courbe  $\rho = \text{Cte}$ , on a donc :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial H}{\partial T} dT = 0$$

d'où :

$$\frac{d\theta}{dT} = - \frac{\frac{\partial H}{\partial T}}{\frac{\partial H}{\partial \theta}}$$

avec :

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{f(\theta) \left[ F\left(\frac{T+\rho\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \right]}{2F(T) - 1}$$

et (voir annexe II)

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{f(T)}{2F(T) - 1} \left[ F\left(\frac{\theta+\rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{\theta-\rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 2H \right]$$

d'où :

$$\boxed{\frac{d\theta}{dT} = - \frac{f(T) \left[ F\left(\frac{\theta+\rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{\theta-\rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 2H \right]}{f(\theta) \left[ F\left(\frac{T+\rho\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \right]}} \quad (11)$$

- Pour  $\rho = 0$ , on a (car alors  $F(\theta) = H$ )  $\frac{d\theta}{dT} = 0$ , quel que soit  $T$

- Pour  $\rho = 1$ , on a (car alors  $\theta < T$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dT} &= - \frac{f(T) [F(+\infty) + F(-\infty) - 2H]}{f(\theta) [F(+\infty) + F(+\infty) - 1]} = - \frac{f(T) [1 - 2H]}{f(\theta) [1]} \\ &= \frac{f(T)}{f(\theta)} (1 - \alpha) \end{aligned}$$

soit, pour  $T = 0$  :  $\frac{d\theta}{dT} = 1 - \alpha$

- Pour  $\rho$  quelconque, et pour  $T = 0$ ,  $\frac{d\theta}{dT}$  se met sous la forme  $\frac{0}{0}$ : en fait, la valeur vraie est 0.
- Pour le point courant, on calculera la pente par l'expression (11). On remarquera que le calcul de la pente nécessite la connaissance de  $\rho$ ,  $T$  et  $\theta$ , c'est-à-dire qu'il n'est possible qu'en un point dont on a préalablement calculé les coordonnées.

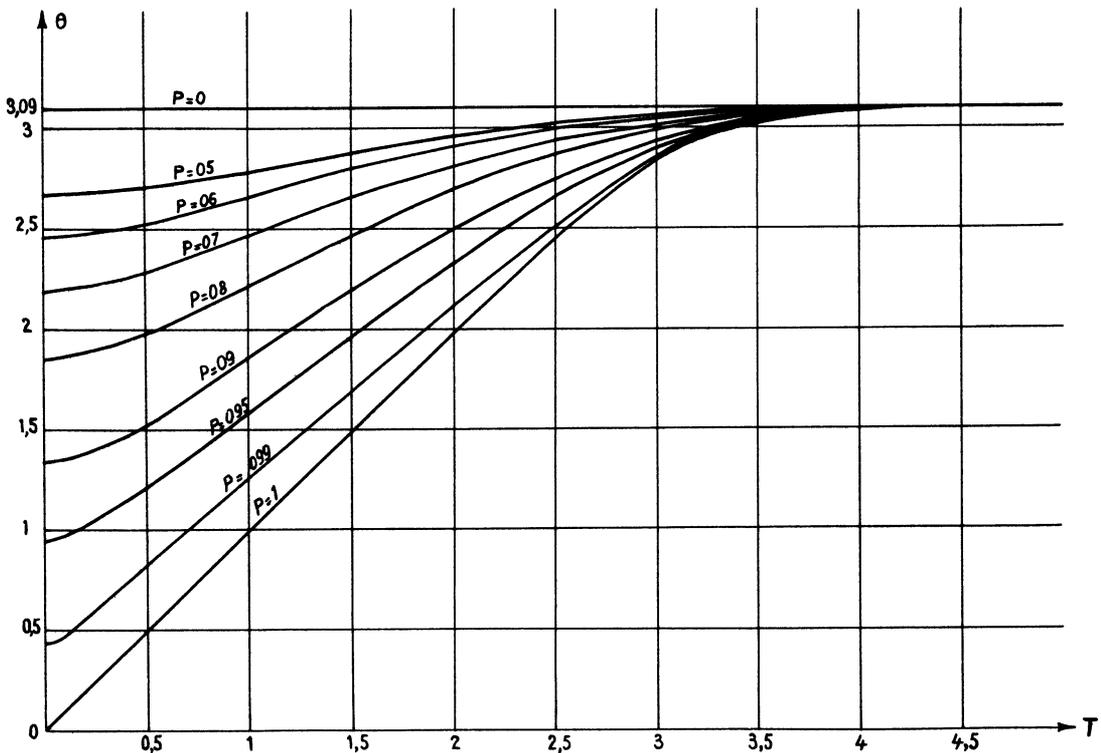
### 3-4. - Graphique

On obtient ainsi, pour  $\alpha = 0,002$  (limites à 998 o/oo) et pour les valeurs de  $\rho$  déjà considérées ci-dessus :

0  
0,5  
0,6  
0,7  
0,8  
0,9  
0,95  
0,99  
1

l'abaque ci-joint.

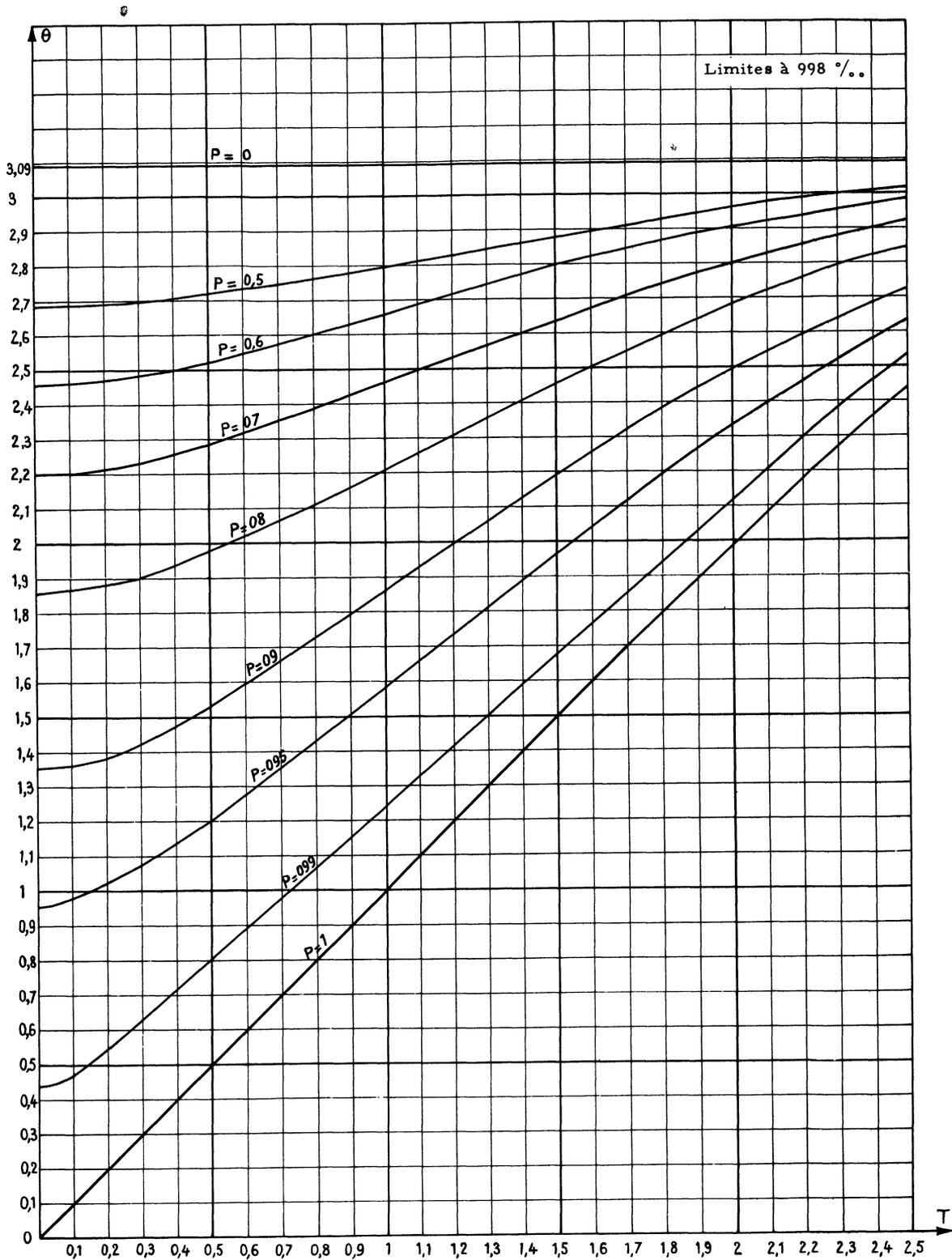
Limites à 998 %.

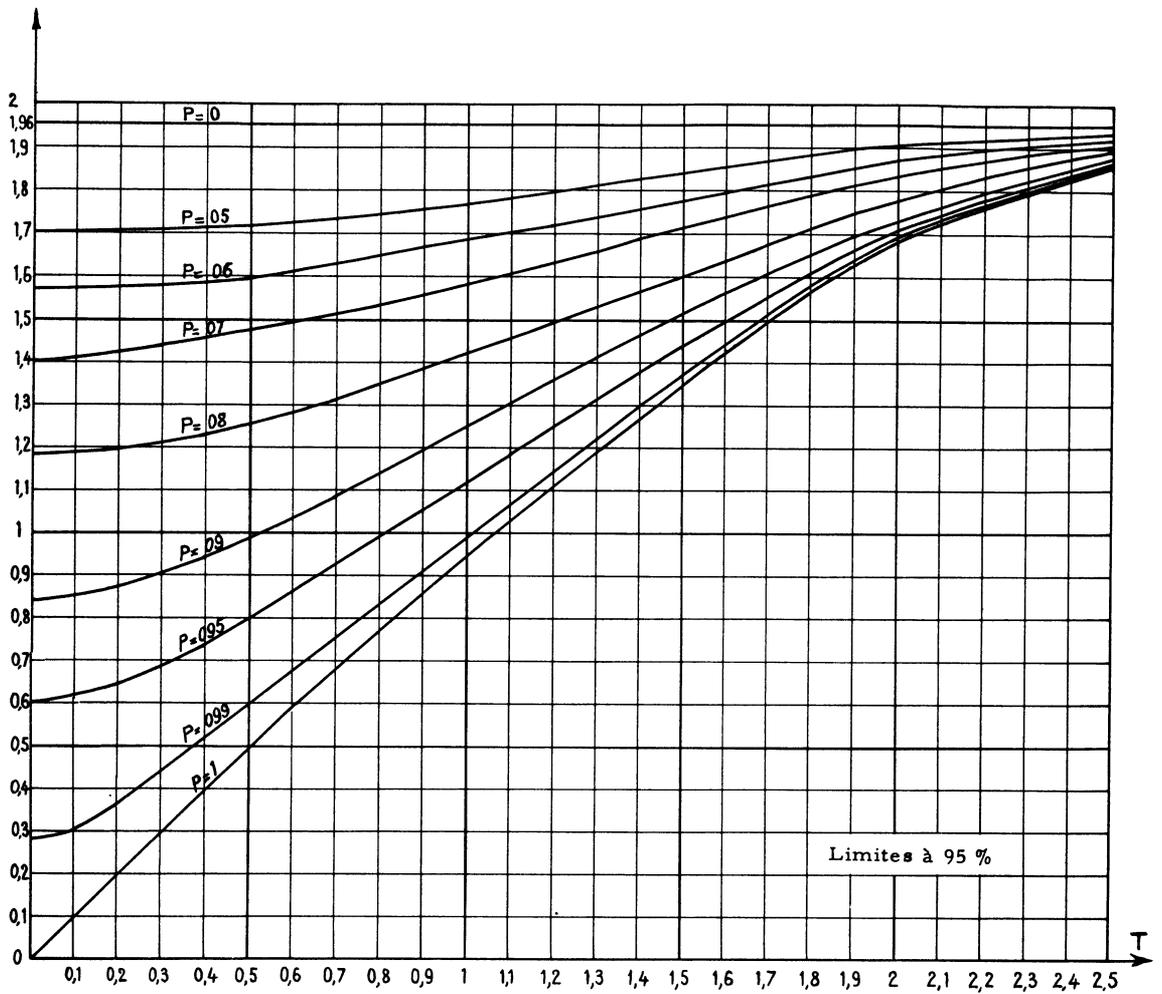


La partie gauche de cet abaque est représentée, agrandie, sur le graphique suivant.

Enfin, puisque les tableaux de calcul permettent d'obtenir en même temps des limites correspondant à un seuil  $\alpha$  quelconque, on a également joint à toutes fins utiles, la "partie gauche" d'un abaque correspondant aux limites à 95%.

Ces abaques constituent l'aboutissement graphique de l'étude.





#### 4. - RÉSOLUTION DU PROBLÈME INITIAL - EXEMPLE NUMÉRIQUE

La résolution du problème initial est alors immédiate : la valeur de T cherchée est celle qui, sur la courbe correspondant à la valeur de  $\rho$  pour le processus considéré, correspond à la limite  $\theta$  désirée.

Ainsi, supposons que dans notre exemple la distribution de l'erreur ait pour caractéristiques :

$$m_y = 0$$

$$\sigma_y = 2,3 \text{ unités}$$

la distribution de la cote de P, pour caractéristiques :

$$m_x = 8,63$$

$$\sigma_x = 0,48$$

et que le coefficient de corrélation soit  $\rho = 0,8$ .

Les limites à 998 o/oo de l'erreur ont donc pour valeur absolue :

$$|1_e| = 3,09 \times 2,3 = 7,107$$

Si l'on désire réduire cette quantité à

$$|1_e| = 5$$

d'où :

$$\theta = \frac{5}{2,3} = 2,17$$

en tronquant la distribution de x, l'abaque indique qu'il faudra tronquer à

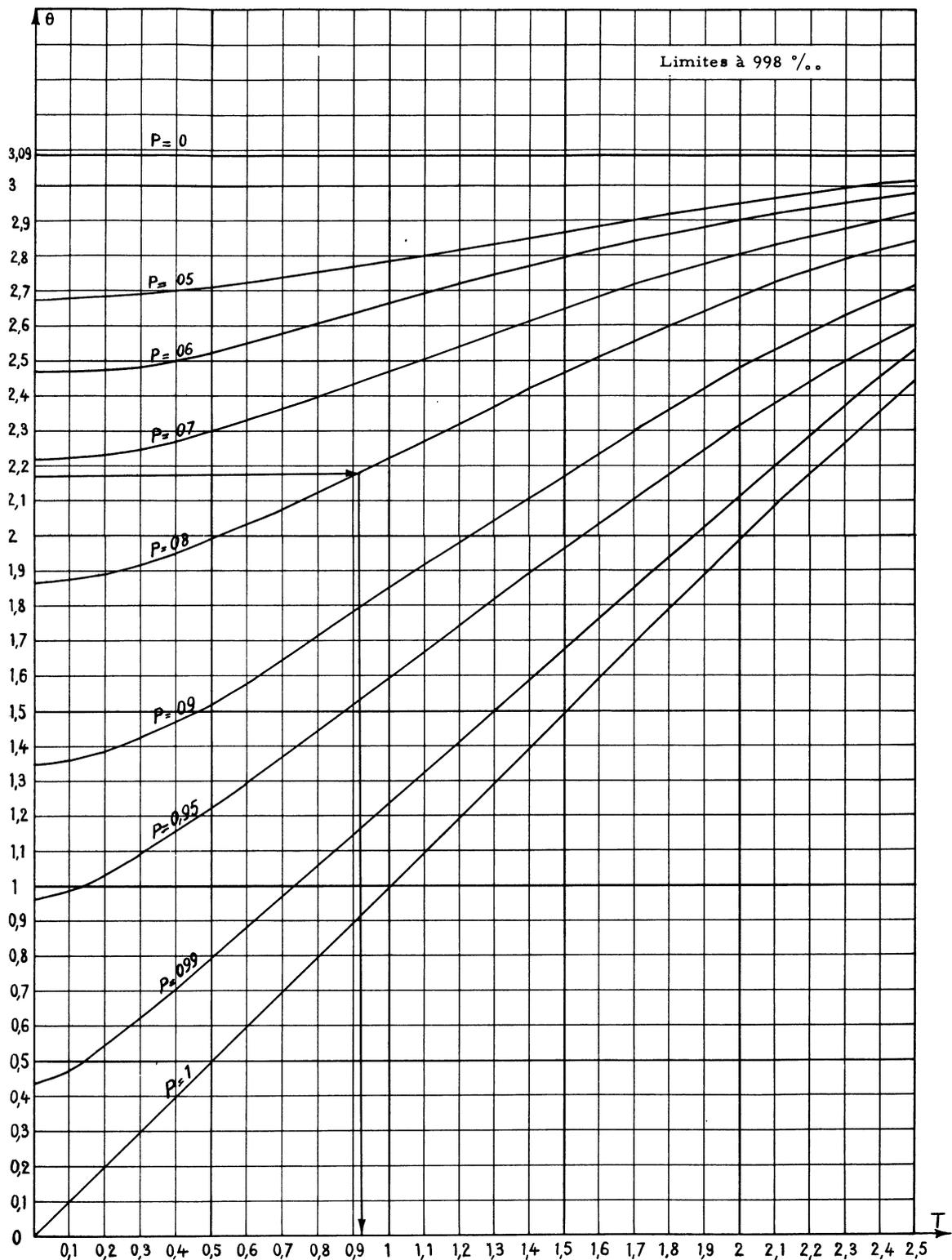
$$T = 0,92 \text{ (figure 4)}$$

c'est-à-dire n'accepter que les pièces comprises dans l'intervalle de tolérance :

$$8,63 - 0,48 \times 0,92 \leq x \leq 8,63 + 0,48 \times 0,92$$

soit :

$$7,19 \leq x \leq 9,07$$



## ANNEXE I

Forme limite de  $h(\eta, T)$  pour  $T = 0$

Faisons  $T = \varepsilon \rightarrow 0$  dans l'expression (7'); il vient :

$$\begin{aligned}
 h(\eta, T) &= f(\eta) \frac{F\left(\frac{\varepsilon + \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{\varepsilon - \rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1}{2F(\varepsilon) - 1} \\
 &= f(\eta) \frac{F\left(\frac{\rho\eta + \varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - F\left(\frac{\rho\eta - \varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{2F(\varepsilon) - 1} \\
 &= f(\eta) \frac{2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\rho^2}} f\left(\frac{\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{2\varepsilon f(0)} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1-\rho^2}} f(\eta) f\left(\frac{\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\rho^2 \eta^2}{1-\rho^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \eta^2} \frac{1-\rho^2 + \rho^2}{1-\rho^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \eta^2} \frac{\eta^2}{1-\rho^2}
 \end{aligned}$$

## ANNEXE II

Calcul de  $\frac{\partial H}{\partial T}$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial T} &= \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) \frac{(2F(T)-1) \left[ f\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} + f\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \right] - \left[ F\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1 \right] 2f(T)}{[2F(T)-1]^2} d\eta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{2F(T)-1} \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) f\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + f\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta - \frac{2f(T)}{2F(T)-1} \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) \frac{F\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 1}{2F(T)-1} d\eta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \frac{1}{2F(T)-1} \left[ \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) f\left(\frac{T+\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta + \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) f\left(\frac{T-\rho\eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta \right] - \frac{2f(T)}{2F(T)-1} H
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) f\left(\frac{T \pm \rho \eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta &= \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\eta^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(\eta \pm \rho T)^2}{1-\rho^2}} d\eta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} [\eta^2 (1-\rho^2) + (\eta \pm \rho T)^2]} d\eta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} [\eta^2 \pm 2\rho T \eta + T^2]} d\eta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\theta} e^{-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} [(\eta \pm \rho T)^2 + T^2(1-\rho^2)]} d\eta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2}{2}} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\eta \pm \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} d\eta
 \end{aligned}$$

soit, en posant :  $z = \frac{\eta \pm \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\theta} f(\eta) f\left(\frac{T \pm \rho \eta}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) d\eta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{T^2}{2}} \sqrt{1-\rho^2} \int_{-\infty}^{\frac{\theta \pm \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\
 &= \sqrt{1-\rho^2} f(T) F\left(\frac{\theta \pm \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{f(T)}{2F(T)-1} \left[ F\left(\frac{\theta + \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{\theta - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \right] - \frac{2f(T)}{2F(T)-1} H \\
 \frac{\partial H}{\partial T} &= \frac{f(T)}{2F(T)-1} \left[ F\left(\frac{\theta + \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) + F\left(\frac{\theta - \rho T}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) - 2H \right]
 \end{aligned}$$