

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

H. SOMBSTAY  
T. NGUYEN HUU

## **Variabilité d'une fabrication en tenant compte des défauts de forme**

*Revue de statistique appliquée*, tome 6, n° 1 (1958), p. 17-36

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1958\\_\\_6\\_1\\_17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1958__6_1_17_0)

© Société française de statistique, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# VARIABILITÉ D'UNE FABRICATION EN TENANT COMPTE DES DÉFAUTS DE FORME <sup>(1)</sup>

par

**H. SOMBSTAY et T. NGUYEN HUU**

*Ingénieurs à la Régie Nationale des Usines Renault*

*La détermination de la dispersion d'une fabrication dans l'hypothèse d'une variabilité normale, se fait de façon classique à l'aide des méthodes d'estimation de la moyenne et de l'écart-type, dans le cas où la caractéristique étudiée est définie par une mesure unique pour chaque pièce.*

*Par contre, lorsque la caractéristique étudiée : partie cylindrique, alésage, distance de deux faces théoriquement parallèles..., varie sur une même pièce, c'est-à-dire lorsqu'il existe un défaut de forme, on définit cette caractéristique par deux ou plusieurs valeurs : celle de la cote moyenne d'une part, celle ou celles des défauts de forme existants d'autre part. Il se pose alors deux problèmes.*

*— Quelles sont les lois de répartition de la cote moyenne et du défaut de forme et éventuellement, comment sont-elles liées entre elles ?*

*— Comment peut-on déduire la loi globale de répartition des cotes extrêmes des lois ainsi déterminées ?*

*Dans la partie A de cette étude, on définit une loi théorique de probabilité du défaut de forme, moyennant certaines hypothèses sur les distributions des cotes extrêmes qui servent à fixer la valeur de ce défaut. L'ajustement à cette loi des répartitions observées permet le calcul de la dispersion du défaut de forme. On peut ainsi comparer cette dispersion aux valeurs limites admissibles fixées par les spécifications et, dans certains cas, déceler certaines anomalies de la fabrication.*

*Dans la partie B, on déduit des mêmes hypothèses la loi de répartition de la cote moyenne, qui est une loi normale.*

*La partie C donne la méthode à suivre pour le calcul de la dispersion totale à partir des répartitions des défauts et de la cote moyenne. C'est cette dispersion totale en tenant compte des défauts de forme, et non celle des cotes moyennes seulement, qui doit être comparée à la tolérance pour voir si la fabrication est ou non bien adaptée.*

## A - LOI DES PROBABILITÉS DU DÉFAUT DE FORME

### I - DÉFINITION

Etant donné une caractéristique définie théoriquement par une seule cote uniforme, le défaut est défini par la différence entre les valeurs extrêmes  $x_1$  et  $y_1$ , que prend en réalité cette cote sur la même pièce.

Exemples : Dans une section de pièce théoriquement circulaire le défaut appelé "ovale" est la différence entre les diamètres extrêmes  $x_1$  et  $y_1$ , effectivement mesurés sur cette section.

Sur une pièce solide ou creuse théoriquement cylindrique, le défaut appelé "cône" est la différence entre les diamètres  $x_1$ , d'une extrémité et  $y_1$ , de l'autre extrémité, effectivement mesurés sur cette pièce.

---

(1) Communication présentée aux Journées d'Etude et de Discussion du Centre de Formation (Juillet 1957).

Sur une pièce à faces théoriquement parallèles, le défaut appelé "faux parallélisme" est la différence entre les cotes extrêmes  $x_1$  et  $y_1$  mesurant la distance entre les 2 faces, etc...

La cote moyenne  $u$  est définie comme la demi-somme des cotes extrêmes

$$u = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

## II - HYPOTHÈSES

Les cotes extrêmes  $x_1$  et  $y_1$  font chacune partie de deux populations distinctes, la population  $x_1$  contient généralement les cotes maxi, et  $y_1$  généralement les cotes mini.

Pour un réglage déterminé, la machine produit des pièces dont les cotes  $x_1$  et  $y_1$  appartiennent à deux populations de Gauss caractérisées chacune par les paramètres suivants :

Variable	Diamètre $x_1$	Diamètre $y_1$
Moyenne	$m_{x_1}$	$m_{y_1}$
Ecart-type	$\sigma$	$\sigma$

$\sigma$  étant le même pour les 2 populations.

On pose par convention :

$$m_{x_1} - m_{y_1} = \lambda$$

$$\frac{m_{x_1} + m_{y_1}}{2} = \alpha$$

On remarque qu'une cote de la population  $x_1$ , qui est généralement le maxi, peut être parfois inférieure à une cote de la population  $y_1$ , qui est généralement le mini, pour une même pièce. Dans ce cas, le défaut change de sens.

Le défaut que l'on mesurera a pour expression :

$$z = |x_1 - y_1|, \text{ toujours prise } > 0$$

On suppose de plus que les deux cotes  $x_1$  et  $y_1$ , associées à chaque pièce sont liées par une corrélation de coefficient  $\rho$ .

## III - EXPRESSION DE LA LOI

Considérons d'abord la variable  $z_1 = x_1 - y_1$ .

Elle suit une loi normale. En effet, si nous représentons dans un plan de coordonnées rectangulaires la répartition des cotes  $x_1$  et  $y_1$  associées à chaque pièce, nous avons affaire à une loi normale à 2 dimensions dont les ellipses d'équiprobabilité ont leurs axes principaux parallèles aux deux bissectrices du plan, puisque :

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \sigma$$

Une rotation des axes de  $\frac{\pi}{4}$  transforme les variables  $x_1$  et  $y_1$  en  $X$  et  $Y$  qui, elles, sont indépendantes. En effet, le coefficient de corrélation disparaît dans la fonction de densité en  $X$  et  $Y$ , les ellipses d'équiprobabilité étant alors rapportées à leurs axes principaux. On voit facilement que :

$$X = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad Y = \frac{y_1 - x_1}{\sqrt{2}}$$

Les lois marginales des distributions en X et Y sont les lois de répartition de X et Y, normales et indépendantes qui, à un coefficient près, représentent d'une part la cote moyenne u et d'autre part, la variable  $z_1$  dont la valeur absolue est le défaut de forme z.

Déterminons les paramètres de la loi de probabilité de  $z_1$ .

Pour la moyenne, on a :

$$E(z_1) = E(x_1 - y_1) = E(x_1) - E(y_1) = m_{x_1} - m_{y_1} = \lambda$$

Pour la variance :

$$\begin{aligned} E(z_1 - \lambda)^2 &= E[(x_1 - m_{x_1}) - (y_1 - m_{y_1})]^2 \\ &= E(x_1 - m_{x_1})^2 + E(y_1 - m_{y_1})^2 - 2 E(x_1 - m_{x_1})(y_1 - m_{y_1}) \end{aligned}$$

D'après la définition du coefficient de corrélation on a

$$\rho = \frac{E(x_1 - m_{x_1})(y_1 - m_{y_1})}{\sigma_{x_1} \sigma_{y_1}}$$

d'où :

$$\text{Var.}(z_1) = \sigma^2 + \sigma^2 - 2 \rho \sigma^2 = 2 \sigma^2 (1 - \rho)$$

Posons  $\text{Var.}(z_1) = s_1^2$

Il en résulte que l'écart-type de  $z_1$  est :

$$s_1 = \sigma \sqrt{2(1 - \rho)}$$

La variable  $z_1$  représente le défaut de forme avec son signe, z en est la valeur absolue, c'est-à-dire que :

lorsque  $x_1 > y_1$  ,  $z = z_1$

lorsque  $x_1 < y_1$  ,  $z = -z_1 = z_2$

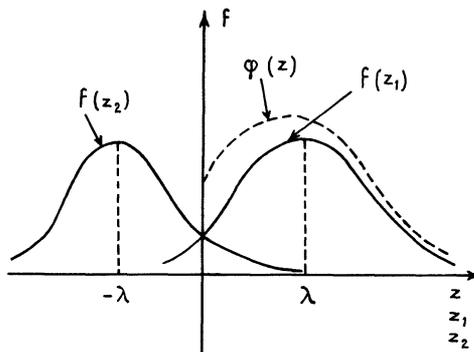


Fig. 1

On voit que la fonction de densité de z,  $\varphi(z)$ , est la somme des fonctions de densité de  $z_1$  lorsque  $x_1 > y$  et de  $z_2$  lorsque  $x_1 < y_1$  (voir fig. 1)

La fonction de densité de  $z_1$  est :

$$f \left[ \frac{z_1 - \lambda}{s_1} \right]$$

f étant la densité de la loi normale réduite.

Celle de  $z_2$  dont l'écart-type est  $s_1$  et la moyenne  $-\lambda$  a pour expression

$$f \left[ \frac{z_2 + \lambda}{s_1} \right]$$

D'où en définitive :

$$\varphi(z) = f \left[ \frac{z - \lambda}{s_1} \right] + f \left[ \frac{z + \lambda}{s_1} \right] \quad z \geq 0 \quad (2)$$

ou en explicitant :

$$\varphi(z) = \frac{1}{s_1 \sqrt{2\pi}} \left[ e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-\lambda)^2}{s_1^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(z+\lambda)^2}{s_1^2}} \right]$$

Pour  $\lambda = 0$ , on trouve la loi normale "repliée" :

$$\varphi(z) = 2 f \left( \frac{z}{s_1} \right), \quad z \text{ variant de } 0 \text{ à } +\infty$$

Pour  $\lambda$  grand,  $z + \lambda \gg z - \lambda$ , on a  $f \left( \frac{z + \lambda}{s_1} \right) \ll f \left( \frac{z - \lambda}{s_1} \right)$  donc  $\varphi(z)$  tend vers la loi normale de moyenne  $(\lambda)$  et d'écart-type  $s_1$ .

$$\varphi(z) \simeq f \left( \frac{z - \lambda}{s_1} \right)$$

En pratique, pour  $\lambda \geq 3 s_1$ , la répartition de  $z$  peut être considérée comme normale. En effet,  $f \left( \frac{z + \lambda}{s_1} \right)$  est alors inférieur à  $f(3) = 0,0044$  quel que soit  $z$ .

#### IV - DÉTERMINATION DES PARAMÈTRES $\lambda$ ET $s_1$ DE LA DISTRIBUTION DU DÉFAUT DE FORME

Les données expérimentales que l'on possède ne permettent pas toujours de distinguer avec certitude les deux échantillons des populations  $x_1$  et  $y_1$  dont nous sommes partis pour les calculs précédents. Le développement qui suit montre qu'en pratique il est cependant possible d'estimer les paramètres  $\lambda$  et  $s_1$  en utilisant seulement l'histogramme du défaut.

1) Calcul de  $\frac{\lambda}{s_1}$

$$\text{On pose } a_0 = \frac{\lambda}{s_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{z}{s_1}$$

L'équation (2) peut se mettre sous la forme :

$$\varphi(z) = f \left[ \frac{z}{s_1} - \frac{\lambda}{s_1} \right] + f \left[ \frac{z}{s_1} + \frac{\lambda}{s_1} \right] = f(t - a_0) + f(t + a_0) = h(t) \quad \begin{array}{l} t \text{ variant de} \\ 0 \text{ à } +\infty \end{array}$$

On voit que si on exprime le défaut de forme en valeurs réduites  $t = \frac{z}{s_1}$ , toutes les distributions ayant le même paramètre  $a_0$  sont identiques, et ont par conséquent, les mêmes moments réduits du 1er et du 2ème ordre.

a) Moment du 1er ordre :

$$E \left( \frac{z}{s_1} \right) = E(t) = \int_0^{+\infty} h(t) t dt = \int_0^{+\infty} [f(t - a_0) + f(t + a_0)] t dt$$

ou :

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - a_0) t dt - \int_{-\infty}^0 f(t - a_0) t dt + \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t dt \quad \text{qu'on écrit :}$$

$$E(t) = \int_{I_1}^{+\infty} f(t - a_0) t dt - \int_{-\infty}^0 f(t - a_0) t dt + \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t dt \quad (3)$$

$I_1$  est le moment non centré du 1er ordre de la loi normale de moyenne  $a_0$  et d'écart-type unité, sa valeur est donc :

$$I_1 = a_0$$

$f(t - a_0)$  et  $f(t + a_0)$  sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe  $t = 0$ .

En changeant  $t$  en  $-t$  dans  $I_2$ , on a :

$$I_2 = \int_{+\infty}^0 f(-t - a_0) (-t) (-dt) = \int_{+\infty}^0 f(t + a_0) t dt = - \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t dt$$

dont  $I_2 = -I_3$

En reportant  $I_1$  et  $I_2$  dans l'équation (3), on a :

$$E(t) = a_0 + 2 I_3 \quad (4)$$

avec :

$$I_3 = \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t dt$$

Faisons le changement de variable  $u = t + a_0$ ,  $du = dt$ ,  $I_3$  devient :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t dt = \int_{a_0}^{+\infty} f(u) (u - a_0) du \\ &= \int_{a_0}^{+\infty} f(u) u du - a_0 \times \int_{a_0}^{+\infty} f(u) du \end{aligned}$$

la 2ème intégrale est :  $\int_{a_0}^{+\infty} f(u) du = F(+\infty) - F(a_0) = 1 - F(a_0) = F(-a_0)$

Posons  $u du = dv$ ,  $\frac{u^2}{2} = v$  dans la 1ère intégrale

$$\begin{aligned} \int_{a_0}^{+\infty} f(u) u du &= \int_{a_0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} u du = \int_{\frac{a_0^2}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v} dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ -e^{-v} \right]_{\frac{a_0^2}{2}}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a_0^2}{2}} = f(a_0) \end{aligned}$$

en reportant dans  $I_3$ , on a :

$$I_3 = f(a_0) - a_0 F(-a_0)$$

Portons  $I_3$  dans l'équation (4)

$$E(t) = a_0 + 2 \left[ f(a_0) - a_0 F(-a_0) \right]$$

$E(t)$  peut être estimé par la moyenne  $\bar{t} = \frac{\bar{z}}{s_1}$ , donc :

$$\frac{\bar{z}}{s_1} = a_0 + 2 \left[ f(a_0) - a_0 F(-a_0) \right] \quad (5)$$

#### b) Moment non centré du 2ème ordre

$$\begin{aligned} E(t^2) &= \int_0^{+\infty} h(t) t^2 dt = \int_0^{+\infty} \left[ f(t - a_0) + f(t + a_0) \right] t^2 dt \\ \int_0^{+\infty} f(t + a_0) t^2 dt &= \int_{-\infty}^0 f(-t + a_0) t^2 dt = \int_{-\infty}^0 f(t - a_0) t^2 dt \end{aligned}$$

puisque

$$f(-t + a_0) = f \left[ - (t - a_0) \right] = f(t - a_0)$$

donc :

$$E(t^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - a_0) t^2 dt$$

Remarquons que  $f(t - a_0)$  est une loi normale de moyenne  $a_0$  et d'écart-type 1, son moment non centré du 2ème ordre est :

$$E(t^2) = 1 + a_0^2 \quad (\text{formule classique})$$

$$E(t^2) = \frac{E(z^2)}{s_1^2}$$

L'estimation pratique de  $E(z^2)$  étant  $m_2 = \frac{1}{n} \sum z^2$  ( $n$  étant le nombre de pièces sur lesquelles on mesure effectivement  $z$ ), on a la relation

$$\frac{m_2}{s_1^2} = 1 + a_0^2 \quad (6)$$

En éliminant  $s_1$  entre les relations (5) et (6), on a

$$\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}} = \frac{a_0 + 2 [f(a_0) - a_0 F(-a_0)]}{\sqrt{1 + a_0^2}}$$

En traçant la courbe  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$  en fonction de  $a_0$ , on peut estimer  $a_0$  à partir de la valeur de  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$  obtenu expérimentalement.

2) Calcul de  $\lambda$  et de  $s_1$

$$\text{On a obtenu } a_0 = \frac{\lambda}{s_1}$$

$s_1$  et  $\lambda$  sont calculés à partir de cette équation et de la formule (6) du paragraphe précédent :

$$s_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + 1}} \sqrt{m_2}$$

$$\lambda = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + 1}} \sqrt{m_2}$$

ou en posant  $K_1 = \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + 1}}$  et  $K_2 = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + 1}}$ ,

on a :

$$\begin{cases} s_1 = K_1 \sqrt{m_2} \\ \lambda = K_2 \sqrt{m_2} \end{cases}$$

$K_1$  et  $K_2$  sont fonctions de  $a_0$ , lui-même déterminé au moyen de  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$

La table I ci-après donne directement  $K_1$  et  $K_2$  en fonction de  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$

En résumé, la détermination des paramètres  $\lambda$  et  $s_1$  à partir d'une répartition empirique du défaut de forme s'effectuera de la façon suivante :

- Calculer la moyenne des défauts de formes  $\bar{z}$
- Calculer le moment non centré du 2e ordre  $m_2 = \frac{1}{n} \sum z^2$  à partir de l'histogramme.
- Faire le rapport  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$ , lire sur la table  $K_1$  et  $K_2$
- En déduire  $s_1 = K_1 \sqrt{m_2}$  et  $\lambda = K_2 \sqrt{m_2}$

TABLE I

$\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$	$K_1$	$K_2$	$\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}}$	$K_1$	$K_2$
0,7978	1	0	0,885	0,492	0,870
0,798	0,957	0,287	0,890	0,479	0,878
0,799	0,929	0,371	0,895	0,466	0,885
0,800	0,913	0,410	0,900	0,453	0,893
0,805	0,836	0,544	0,905	0,440	0,899
0,810	0,792	0,603	0,910	0,426	0,906
0,815	0,762	0,651	0,915	0,412	0,912
0,820	0,732	0,682	0,920	0,399	0,918
0,825	0,707	0,707	0,925	0,385	0,924
0,830	0,682	0,732	0,930	0,371	0,929
0,835	0,660	0,752	0,935	0,356	0,934
0,840	0,640	0,768	0,940	0,341	0,940
0,845	0,623	0,783	0,945	0,326	0,945
0,850	0,606	0,796	0,950	0,312	0,950
0,855	0,589	0,809	0,955	0,296	0,955
0,860	0,570	0,822	0,960	0,279	0,960
0,865	0,553	0,834	0,965	0,263	0,965
0,870	0,538	0,844	0,970	0,243	0,970
0,875	0,522	0,853	0,975	0,222	0,975
0,880	0,507	0,862	0,980	0,199	0,980

## V - DÉTERMINATION DE LA PROPORTION DES PIÈCES AYANT UN DÉFAUT DE FORME SUPÉRIEUR OU ÉGAL A UNE VALEUR DONNÉE $z_0$ .

Connaissant les paramètres  $\lambda$  et  $s_1$ , cette proportion est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi(z_0) &= \int_{z_0}^{+\infty} \left\{ f\left[\frac{z-\lambda}{s_1}\right] + f\left[\frac{z-\lambda}{s_1}\right] \right\} dz \\ &= 1 - F\left[\frac{z_0-\lambda}{s_1}\right] + 1 - F\left[\frac{z_0+\lambda}{s_1}\right]\end{aligned}$$

donc

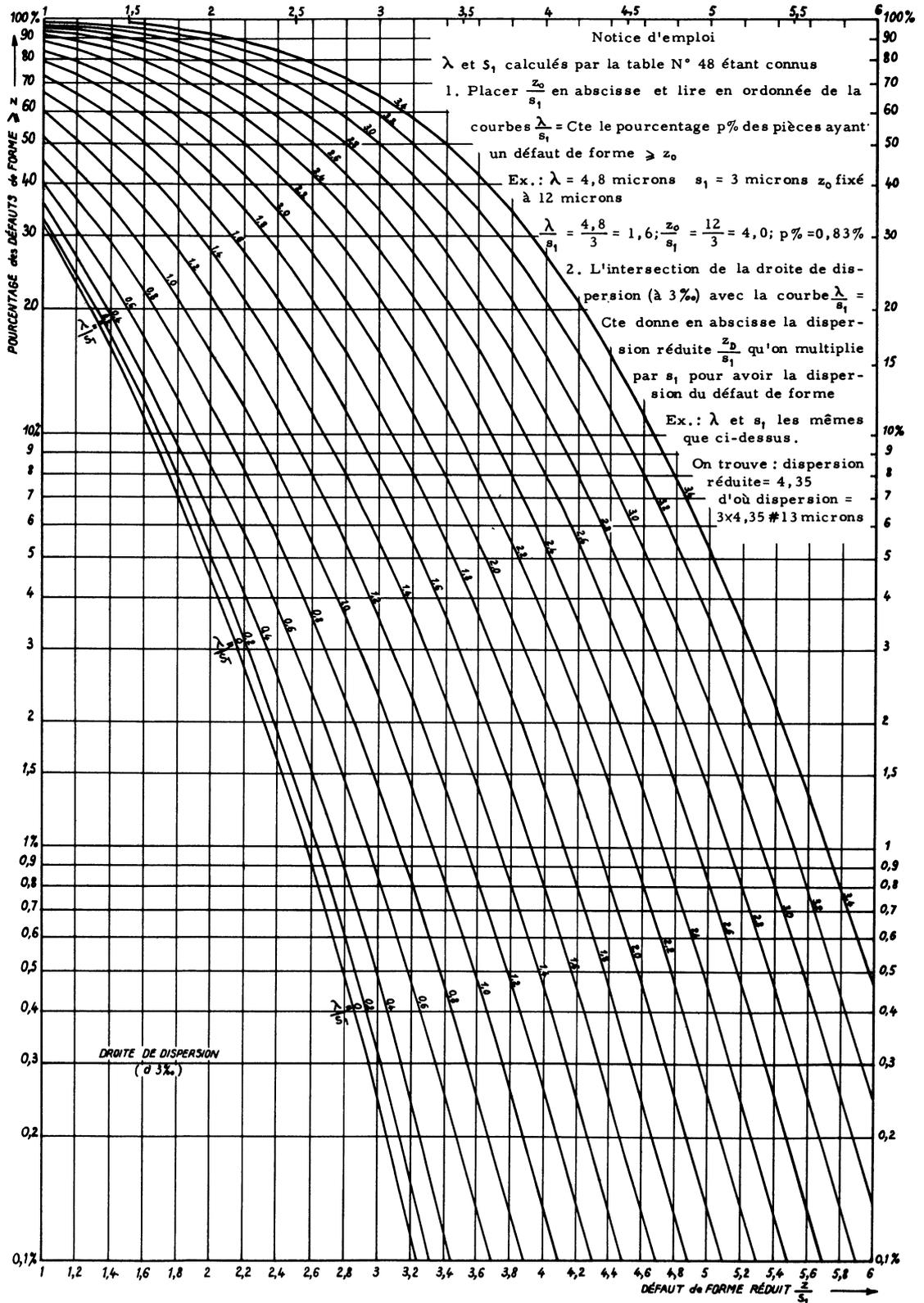
$$\Phi(z_0) = 2 - F\left[\frac{z_0-\lambda}{s_1}\right] - F\left[\frac{z_0+\lambda}{s_1}\right]$$

Les valeurs de la fonction  $F$  (intégrale de la loi de Laplace-Gauss) sont données par les tables.

L'abaque II permet de déterminer cette proportion ou plutôt le pourcentage,  $p\%$  en fonction de la valeur choisie  $z_0$  du défaut de forme. Il permet inversement de déterminer la dispersion  $z_0$  du défaut qui est par convention la valeur telle qu'il y a 3% de pièces ayant un défaut supérieur, de même qu'on prend par convention 6 écarts-types pour la dispersion d'une répartition de Gauss.

## ABaque II

### DETERMINATION DU POURCENTAGE DES PIÈCES AYANT UN DÉFAUT DE FORME $\geq$ A UNE VALEUR $z_0$ DONNÉE



## B - LOI DE PROBABILITÉ DE LA COTE MOYENNE

On a défini la cote moyenne  $u$  comme la demi-somme des cotes extrêmes :

$$u = \frac{x_1 + y_1}{2}$$

On a vu (cf. A - III) que  $u$  est une variable normale et indépendante du défaut de forme  $z$ . Calculons ses paramètres :

Moyenne :

$$E(u) = \frac{1}{2} E(x_1 + y_1) = \frac{m_{x_1} + m_{y_1}}{2} = \alpha$$

Variance :

$$\begin{aligned} E(u - \alpha)^2 &= \frac{1}{4} E \left[ (x_1 - m_{x_1}) + (y_1 - m_{y_1}) \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \text{Var.}(x_1) + \text{Var.}(y_1) + 2 E(x_1 - m_{x_1})(y_1 - m_{y_1}) \right] \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} \text{Var.} u &= \frac{1}{4} \left[ \sigma^2 + \sigma^2 + 2 \rho \sigma^2 \right] \\ &= \sigma^2 \left( \frac{1 + \rho}{2} \right) \end{aligned}$$

Posons :

$\text{Var.}(u) = s_2^2$ , il en résulte que :

$$s_2 = \sigma \sqrt{\frac{1 + \rho}{2}}$$

La densité de probabilité de  $u$  est donc :

$$\gamma(u) = f\left(\frac{u - \alpha}{s_2}\right)$$

C'est la loi normale d'écart-type  $s_2$  et de moyenne  $\alpha$  qui est la moyenne des cotes moyennes.

$s_2$  et  $\alpha$  sont estimés de façon classique à partir de l'histogramme des cotes moyennes.

## I - CALCUL DES PARAMÈTRES $\sigma$ ET $\rho$ DES POPULATIONS DES COTES EXTRÊMES $x_1$ ET $y_1$

On avait

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma \sqrt{2(1 - \rho)} \\ s_2 &= \sigma \sqrt{\frac{1 + \rho}{2}} \end{aligned}$$

$s_1$  et  $s_2$  étant connus,  $\sigma$  et  $\rho$  s'en déduisent alors par un calcul simple qui donne :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= s_2^2 + \frac{s_1^2}{4} \\ \rho &= \frac{4 s_2^2 - s_1^2}{4 s_2^2 + s_1^2} \end{aligned}$$

Remarque : Les calculs sont valables quels que soient les dérèglages de la cote moyenne qui ont pu se produire au cours des mesures, pourvu que la dispersion de la machine soit restée constante, ou plus précisément que  $\sigma$ ,  $\rho$  et  $\lambda$  définis précédemment le soient.

## II - CALCUL DES MOYENNES $m_{x_1}$ ET $m_{y_1}$ DES COTES EXTRÊMES $x_1$ ET $y_1$

On a :

$$m_{x_1} - m_{y_1} = \lambda$$

$$\frac{1}{2} \times (m_{x_1} + m_{y_1}) = \alpha$$

On en déduit immédiatement :

$m_{x_1} = \alpha + \frac{\lambda}{2}$
$m_{y_1} = \alpha - \frac{\lambda}{2}$

Ce calcul n'a évidemment d'intérêt que lorsque  $\alpha$  est bien déterminé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dérèglement de la moyenne.

## C - CALCUL DE LA DISPERSION EN TENANT COMPTE DES DÉFAUTS DE FORME

Une pièce de la fabrication est définie par son défaut de forme  $z$  et sa cote moyenne  $u$  dont les répartitions théoriques sont calculées comme indiqué dans les chapitres A et B.

Des définitions de  $z$  et  $u$ , on déduit que les cotes extrêmes de la pièce sont :

$$x_1 = u + \frac{z}{2} \quad (\text{la plus grande}) \quad (7)$$

et  $y_1 = u - \frac{z}{2} \quad (\text{la plus petite}) \quad (8)$

## I - REPRÉSENTATION DES PIÈCES DANS UN PLAN DE COORDONNÉES

Dans un plan de coordonnées rectangulaires, une pièce ayant un défaut de forme  $z$  et une cote moyenne  $u$  peut être représentée par un point M d'abscisse  $z$  et d'ordonnée  $u$ .

Tous les points figurant les pièces ayant la même valeur  $x_1$  de la plus grande des cotes se trouvent d'après l'équation (7) sur une même droite d'équation,

$$x_1 = u + \frac{z}{2}$$

et tous les points représentant les pièces ayant la même valeur  $y_1$  de la plus petite cote se trouvent d'après l'équation (8) sur une même droite d'équation

$$y_1 = u - \frac{z}{2} \quad (\text{fig. 2})$$

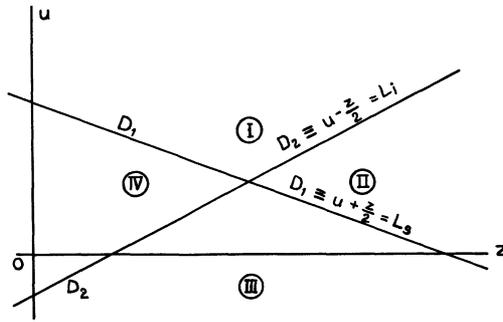


Fig. 2

On considère une pièce comme défectueuse si elle a au moins une de ses cotes sortant des limites supérieure  $L_s$  ou inférieure  $L_i$  de la tolérance.

Autrement dit, pour qu'une pièce soit bonne, il faut qu'elle satisfasse aux conditions :

$$L_s \geq x_1 \geq y_1 \geq L_i \quad \text{ou} \quad L_s \geq u + \frac{z}{2} \geq u - \frac{z}{2} \geq L_i$$

Dans le plan  $u, z$ , figurons les droites : (fig.2)

$$(D_1) \equiv L_s = u + \frac{z}{2} \quad (D_2) \equiv L_i = u - \frac{z}{2}$$

$D_1, D_2$  et l'axe  $u$  délimitent le demi-plan en 4 régions numérotées sur la fig. 2

Si un point  $M$  de coordonnée  $(z, u)$  représentant une pièce se trouve dans l'une de ces régions, les répartitions de ses cotes sont les suivantes :

REGION I  $x_1 = u + \frac{z}{2} > L_s$

$$y_1 = u - \frac{z}{2} > L_i$$

les 2 cotes sont  $> L_i$ , mais au moins une d'entr'elles est  $> L_s$ .

REGION II  $x_1 = u + \frac{z}{2} > L_s$

$$y_1 = u - \frac{z}{2} < L_i$$

la cote la plus grande est  $> L_s$ , la cote la plus petite est  $< L_i$ .

REGION III  $x_1 = u + \frac{z}{2} < L_s$

$$y_1 = u - \frac{z}{2} < L_i$$

toutes les cotes sont  $< L_s$ , au moins une d'entr'elles est  $< L_i$ .

REGION IV  $x_1 = u + \frac{z}{2} < L_s$

$$y_1 = u - \frac{z}{2} > L_i$$

les deux cotes sont comprises entre  $L_s$  et  $L_i$ .

Toutes les pièces représentées par des points dans les régions I, II, III, ont au moins une cote sortant des limites de tolérance. Elles sont donc défectueuses.

Seules les pièces représentées par des points dans la région IV sont bonnes, en supposant que la valeur du défaut de forme n'intervient pas dans la définition des pièces bonnes.

Cette disposition nous permet aussi de voir que les pièces pouvant être retouchées se trouvent dans la région I s'il s'agit d'un arbre, ou dans la région III s'il s'agit d'un alésage par exemple, mais que les pièces dans la région II sont dans tous les cas loupées.

## II - CALCUL DE LA PROPORTION DES PIÈCES DÉFECTUEUSES, MÉTHODE DU QUADRILLAGE

Considérons la production d'une machine dont les pièces ont chacune un défaut de forme  $z$  et une cote moyenne  $u$ .

Les répartitions de  $z$  et  $u$  sont connues.

On connaît ainsi la probabilité d'une pièce d'avoir une cote moyenne dans l'intervalle  $(u, u + du)$ , et celle d'une pièce d'avoir un défaut de forme dans l'intervalle  $(z, z + dz)$ .

On a vu que les défauts de formes et les cotes moyennes sont indépendants entr'eux. D'après le théorème des probabilités composées, la probabilité pour une pièce d'avoir à la fois  $z$  dans  $dz$  et  $u$  dans  $du$  est :

$$\text{Pr} \left[ z \text{ dans } dz \text{ et } u \text{ dans } du \right] = \text{Pr} (z \text{ dans } dz) \times \text{Pr} (u \text{ dans } du)$$

C'est la probabilité du point M représentant la pièce d'être dans l'aire élémentaire abcd, rectangle de côtés  $du$  et  $dz$ . (fig.3)

On divise le  $\frac{1}{2}$  plan  $(z,u)$  en aires élémentaires telles que abcd et on inscrit les probabilités pour un point M d'être dans chacune d'elles. On fait ainsi le quadrillage du plan  $(z,u)$ .

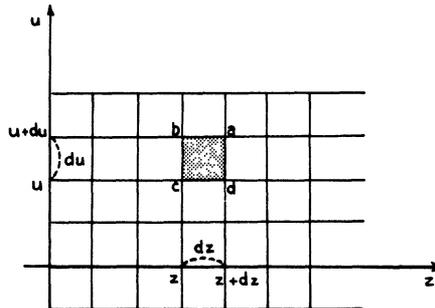


Fig. 3

La probabilité d'avoir une pièce ayant au moins une cote sortant des limites de tolérance s'obtient en faisant la somme des probabilités des aires élémentaires se trouvant en dehors des droites d'équations :

$$(D_1) \equiv L_s = u + \frac{z}{2}$$

$$(D_2) \equiv L_i = u - \frac{z}{2}$$

Si l'aire élémentaire abcd se trouve entièrement en dehors de ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ), la probabilité pour M d'être dans cet aire est prise entièrement.

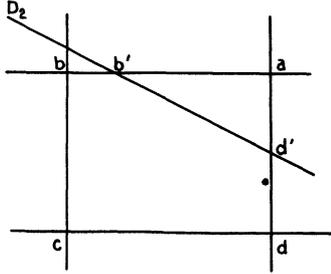


Fig. 4

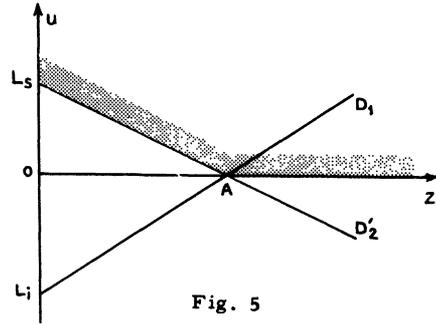


Fig. 5

Si elle est coupée par  $D_1$  ou  $D_2$ , par exemple par  $D_2$  en  $b'$  et  $d'$  (fig.6) la probabilité de M dans a b' d' sera approximativement :

$$\text{Pr} (M \text{ dans } a b' d') = (\text{Pr} . M \text{ dans } abcd) \times \frac{\text{aire } ab' d'}{\text{aire } abcd}$$

Le calcul sera simplifié si les cotes moyennes sont centrées au milieu de la tolérance qu'on prend comme origine des axes. Les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont symétriques par rapport à l'axe oz (fig.5).

La probabilité de M d'être dans 2 aires élémentaires symétriques l'une de l'autre par rapport à oz est la même (distribution de u symétrique).

On fait alors la somme des probabilités d'avoir M dans la région u  $L_s$  Az hachurée qu'on multipliera par deux pour avoir la proportion totale des pièces ayant une cote sortant des limites de tolérances.

### III - DÉTERMINATION DES LIMITES $L_s$ ET $L_i$ DE FAÇON A AVOIR UNE PROPORTION $p_0$ DE PIÈCES DÉFECTUEUSES

On commence par faire le quadrillage du demi-plan (u, z) en centrant l'axe oz au centre de la répartition des cotes moyennes u.  $L_s$  et  $L_i$  sont tels que  $L_i = -L_s$ .

Si  $L_s$  était connue, il existerait une proportion  $\frac{P_0}{2}$  de pièces défectueuses dans la portion hachurée de la figure 6. On se donne donc plusieurs valeurs de  $L_s$ , et à chaque valeur de  $L_s$ , on calcule la proportion  $\frac{P}{2}$  correspondante. On trace la

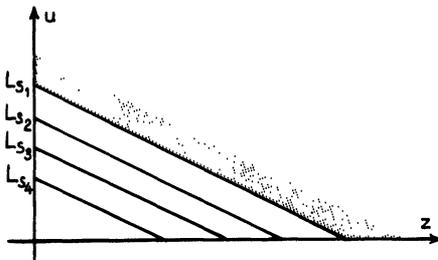


Fig. 6

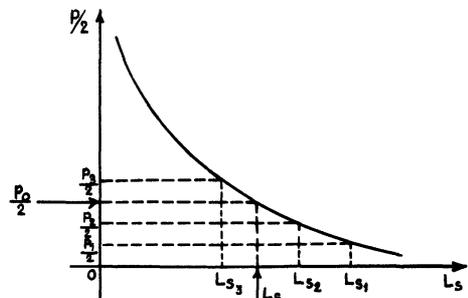
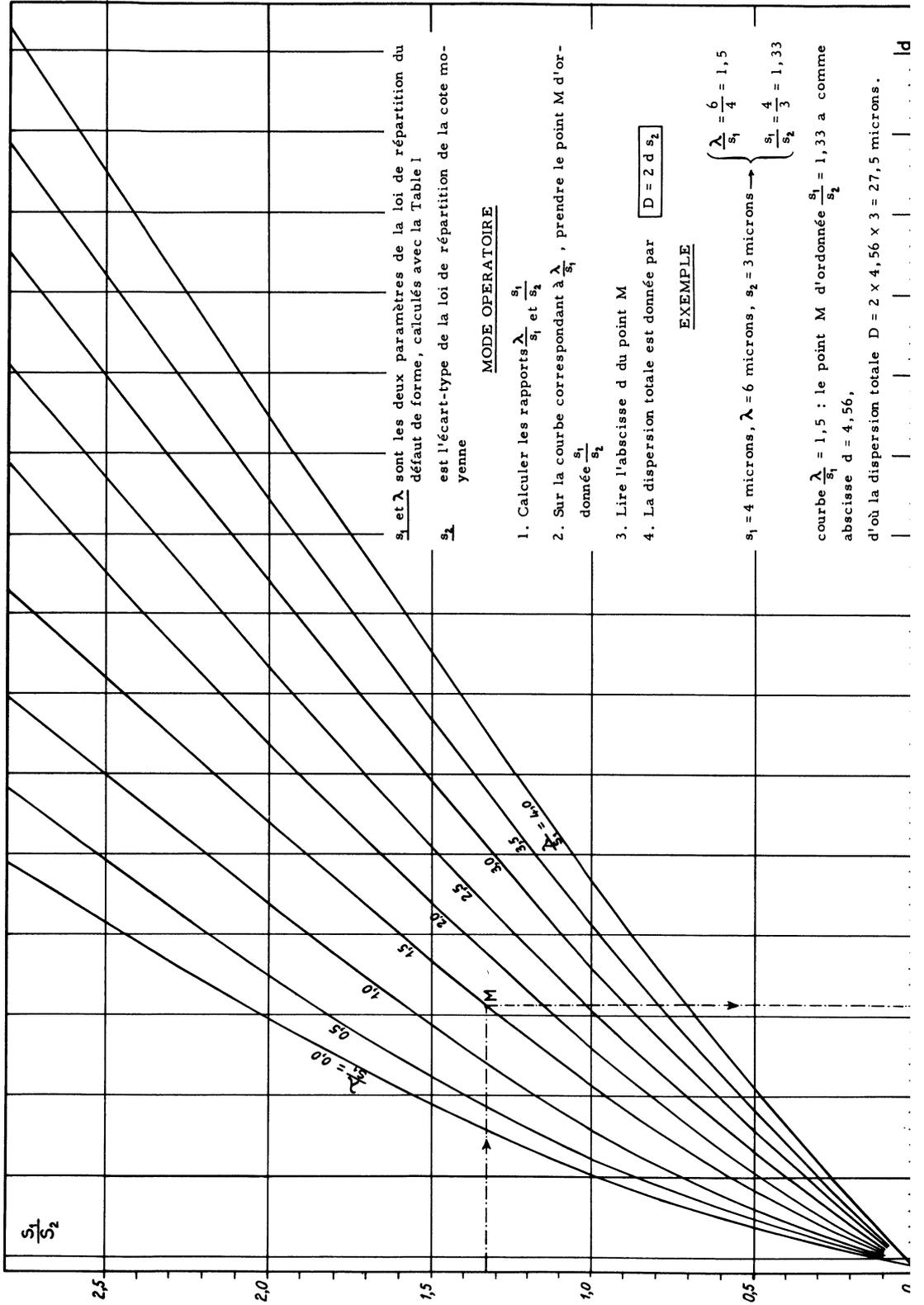


Fig. 7

ABAQUE III  
CALCUL DE LA DISPERSION TOTALE COMPTE  
TENU DES DEFAUTS DE FORME



$\frac{s_1}{s_2}$  et  $\lambda$  sont les deux paramètres de la loi de répartition du défaut de forme, calculés avec la Table I

$s_2$  est l'écart-type de la loi de répartition de la cote moyenne

MODE OPERATOIRE

1. Calculer les rapports  $\frac{\lambda}{s_1}$  et  $\frac{s_1}{s_2}$
2. Sur la courbe correspondant à  $\frac{\lambda}{s_1}$ , prendre le point M d'ordonnée  $\frac{s_1}{s_2}$
3. Lire l'abscisse d du point M
4. La dispersion totale est donnée par  $D = 2 d s_2$

EXEMPLE

$s_1 = 4$  microns,  $\lambda = 6$  microns,  $s_2 = 3$  microns  $\rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda}{s_1} = \frac{6}{4} = 1,5 \\ \frac{s_1}{s_2} = \frac{4}{3} = 1,33 \end{array} \right.$

courbe  $\frac{\lambda}{s_1} = 1,5$  : le point M d'ordonnée  $\frac{s_1}{s_2} = 1,33$  a comme abscisse  $d = 4,56$ , d'où la dispersion totale  $D = 2 \times 4,56 \times 3 = 27,5$  microns.

courbe  $\frac{P}{2}$  en fonction de  $L_s$  (fig.7), son intersection avec la droite  $\frac{P_0}{2} = Cste$  donne la valeur de  $L_s$  cherchée.

L'intervalle  $L_s - L_i = 2 L_s = T$  est celui dans lequel on a la proportion  $(1-p_0)$  de pièces dont toutes les cotes se trouvent dans les limites de cet intervalle.

Si  $p_0$  est pris égal à 3‰, on peut convenir que l'intervalle  $T$  soit la dispersion de la machine.

Pour la dispersion à 3‰, on se servira de l'abaque III qui est obtenu par une série de quadrillages systématiques à partir des répartitions réduites des cotes moyennes  $\frac{u}{s_2}$  et des défauts de forme  $\frac{z}{s_1}$ .

#### IV - CAS OU LA VALEUR DU DÉFAUT DE FORME INTERVIENT DANS LA DÉFINITION DES PIÈCES BONNES

On veut que le défaut de forme  $z$  ne dépasse pas une certaine valeur, par exemple la moitié de la tolérance.

$$z = \frac{L_s - L_i}{2}$$

Tout ce qui est exposé ci-dessus reste valable, avec, en plus, que toutes les pièces ayant un défaut de forme  $z > \frac{L_s - L_i}{2}$  ont leurs points représentatifs à droite de la droite  $\Delta$  d'équation :

dans le plan  $(u, z)$ . (fig.8) 
$$z = \frac{L_s - L_i}{2}$$

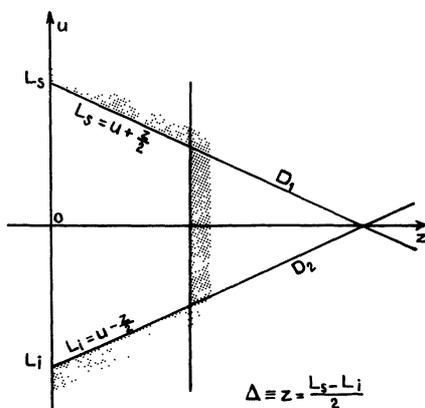


Fig. 8

En faisant le quadrillage du plan  $u, z$  comme précédemment, la proportion des pièces défectueuses s'obtient alors en faisant la somme des probabilités des aires élémentaires dans la région hachurée sur la fig. 8.

#### V - CAS OU LA PIÈCE PRÉSENTE PLUSIEURS DÉFAUTS DE FORME

C'est par exemple le cas d'une pièce théoriquement cylindrique solide ou creuse ayant de l'ovale dans une ou plusieurs de ses sections et du cône le long de son axe.

Chaque défaut  $i$ , de valeur  $z_i$  est caractérisé par la différence entre ses cotes extrêmes  $x_i$  et  $y_i$  et sa cote moyenne  $u_i$ .

On définit alors le défaut global Z comme la différence entre la plus grande  $x_1$  et la plus petite  $y_n$  de toutes les cotes de la pièce.

$$Z = x_1 - y_n$$

On définit la cote moyenne de la pièce comme la demi-somme

$$U = \frac{x_1 + y_n}{2}$$

Le calcul de la dispersion totale de la machine en tenant compte des défauts de forme se fait comme précédemment, Z joue le rôle de z, U celui de u, mais il n'est pas toujours possible d'ajuster la loi du défaut de forme pour Z. Dans ce dernier cas, on adopte pour le calcul de la dispersion la répartition de Z obtenue empiriquement à partir des prélèvements de pièces.

## D - EXEMPLES

Les feuilles suivantes donnent :

- feuille 1 - Un exemple de calcul de la répartition théorique de l'ovale dans un alésage.
- feuille 2 - Le graphique d'ajustement de cette répartition comparée à celle obtenue expérimentalement.
- feuille 3 - Le calcul de la dispersion du même alésage.

## DISCUSSION

A la suite de cet exposé, présenté au cours de la réunion présidée par Monsieur BRUNEL, Ingénieur à la Régie Nationale des Usines Renault, quelques questions ont été posées par les auditeurs.

On trouvera ci-après un bref résumé de cette discussion.

M. BRUNEL : Dans votre étude, vous avez fait l'hypothèse que les écarts-types des deux diamètres (mini et maxi) sont égaux. Ne peut-on pas envisager, au contraire, qu'ils varient dans le temps, de façons différentes, ou qu'encre encore selon la forme de la pièce usinée et de sa structure, ils soient essentiellement différents ?

R. En fait, l'étude a voulu être simple, et on constate en pratique qu'elle est très souvent applicable. On peut du reste tester l'hypothèse faite sur les variances, lorsqu'il y a doute.

M. ROUZET : Comment choisir respectivement x et y, puisqu'on étudie la loi (x - y) du défaut de forme ?

R. Il arrive souvent qu'on ne puisse distinguer individuellement les x et les y puisque x n'est pas toujours le maxi, ni y toujours le mini. Mais cela n'est pas gênant puisqu'on a seulement besoin des différences x - y en valeur absolue.

M. ORY - Quel est le cadre d'application de cette loi : contrôle de réception, réception de machine ?

R. Nous n'avons pas songé à fixer un cadre particulier pour l'application de cette loi. Elle peut être utilisée, évidemment, pour l'étude et la réception des machines. Le but est, bien entendu, d'améliorer ce qui peut l'être et de connaître les tolérances naturelles de la machine.

M. BLIN : La loi découlant de cette étude doit-elle être appliquée au processus de fabrication ou à la machine ? Par exemple, un vieux tour usinant une matière première excellente ne donnera-t-il pas un défaut de forme minimum ?

R. Le défaut de forme, dont on étudie la répartition à l'aide de cette loi, peut résulter de un ou plusieurs facteurs, par exemple de la qualité de la machine, de celle de la matière, de celle des opérations antérieures, etc...

M. SOMBSTAY indique que dans une étude pratique a été rencontré le cas suivant :

La mesure du cône sur des pièces théoriquement cylindriques avait donné, pour un ensemble de 300 pièces, un histogramme de forme irrégulière pour lequel il était impossible d'ajuster la loi du défaut de forme. On s'est alors aperçu qu'en séparant les mesures selon les séries de fabrication où les pièces avaient été prélevées, on obtenait des histogrammes réguliers à chacun desquels on pouvait ajuster une loi de répartition théorique. On a mis en évidence de cette façon que la machine produisait des pièces ayant un cône aléatoire d'une part, un cône systématique d'autre part, et que ce dernier variait selon les séries. La première amélioration à apporter était donc la réduction du cône systématique, par un meilleur réglage de la table de la rectifieuse.

**AJUSTEMENT DE LA LOI THÉORIQUE D'UN DÉFAUT DE FORME**

Désignation de l'étude : Pompe à huile  $\rho$  14 H7

1° Grouper les défauts (désignés par  $z$ ) en classes bien définies avec la valeur centrale  $z_c$ , la limite supérieure  $z_s$ , la limite inférieure  $z_i$  de chaque classe.

Ex. : Classe de 0 à 0,99;  $z_c = 0,5$ ;  $z_s = 1$   
 $z_i = 0$

Classe de 0 à 1,99;  $z_c = 1$  ;  $z_s = 2$   
 $z_i = 0$

2° Calculer :  $\bar{z} = \frac{1}{n} \sum n_i z_{ci} = 1,766$

$n$  = nombre total de mesures : 398

3° Calculer :

$m = \frac{1}{n} \sum n_i z_{ci}^2 = 4,24 \rightarrow \sqrt{m_2} = 2,06$

4° Calculer  $\frac{\bar{z}}{\sqrt{m_2}} = 0,857$  ce qui donne les coefficients :  
 $K_1 = 0,582$  ;  $K_2 = 0,815$

5° Calculer :  $s_1 = K_1 \sqrt{m_2} = 1,199$   
 $\lambda = K_2 \sqrt{m_2} = 1,68$

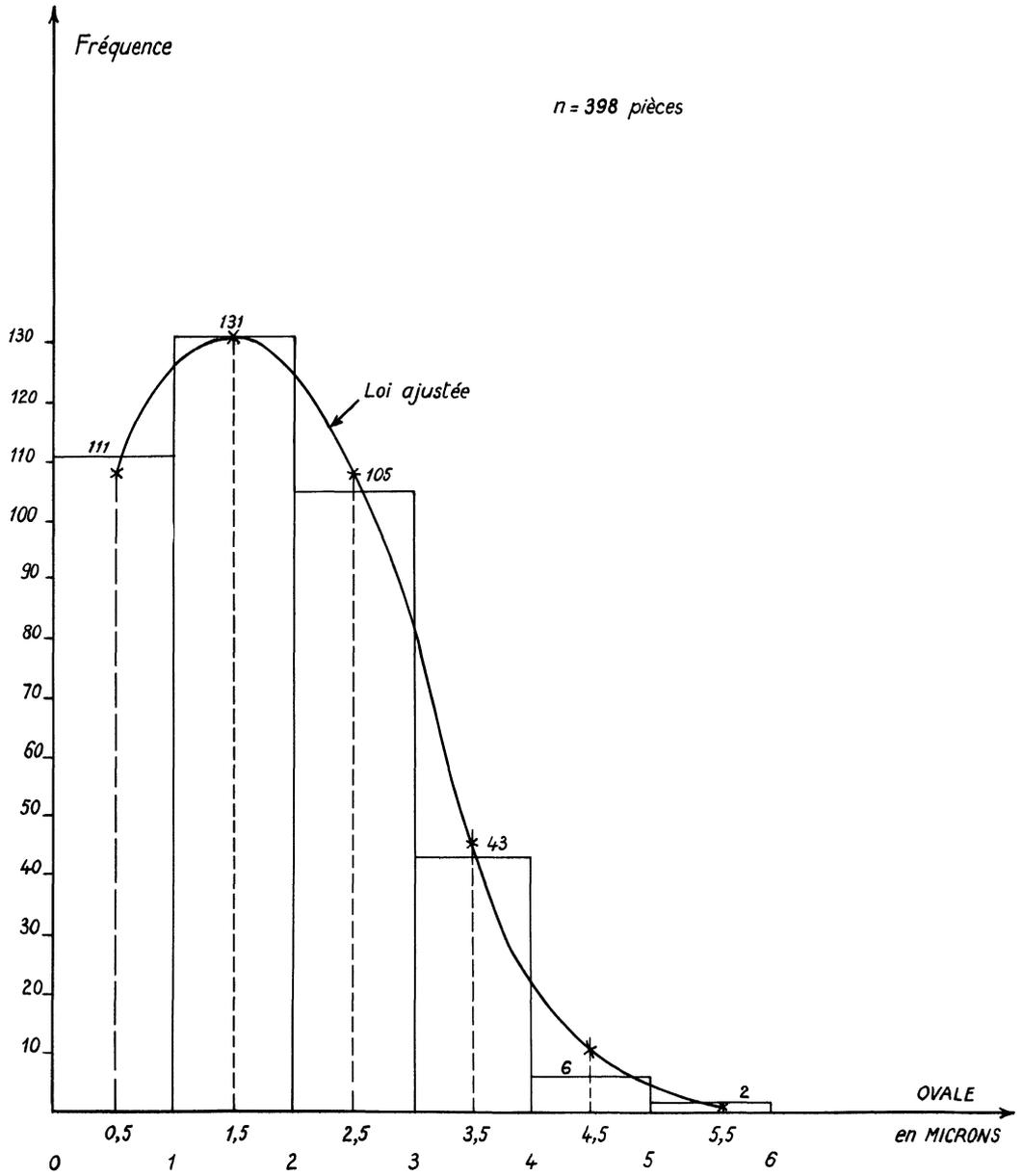
6° Faire les calculs du tableau ci-dessous  
7° Tracer la courbe théorique du défaut en portant en abscisse la valeur centrale de la classe  $z_{ci}$  et en ordonnée la fréquence théorique  $n_i$  correspondante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$z = z_s$ ou $z_i$	$z - \lambda$	$z + \lambda$	$\frac{z - \lambda}{s_1}$	$\frac{z + \lambda}{s_1}$	$F_1 \frac{z - \lambda}{s_1}$	$F_2 \frac{z + \lambda}{s_1}$	$\Phi_1 = F_1 + F_2 - 1$	$P = \Phi_{10} - \Phi_1$	$z_{ci}$	$n_i' = np_i$	$n_i$	$n_i' - n_i$	$(n_i' - n_i)$	$\frac{(n_i' - n_i)^2}{n_i}$
0							0							
1	-0,68	2,68	-0,567	2,235	0,2853	0,9873	0,2726	0,2726	0,5	108	111	3	9	0,1
2	0,32	3,68	0,267	3,07	0,6029	0,9989	0,6028	0,3302	1,5	131	131	0	0	0
3	1,32	4,68	1,1	3,9	0,8643	0,9999	0,8642	0,2614	2,5	104	105	1	1	-
4	2,32		1,935		0,9735	1	0,9735	0,1193	3,5	47	43	4	16	0,3
5	3,32		2,769		0,9972		0,9972	0,0237	4,5	9	6	3	9	1,0
6	4,32		3,603		0,9998		0,9998	0,0026	5,5	1	2	1	1	1,0
7	5,32		4,4		1		1	0,0002	6,5					
8														
9														
10														

Ajustement par test du  $\chi^2$   
 $v$  = nombre de classes - 3 = 3       $\chi^2$  à 0,10 = 6,25 > 2,4 ajustement bon       $\chi^2 = \sum \text{col.15} = 2,4$

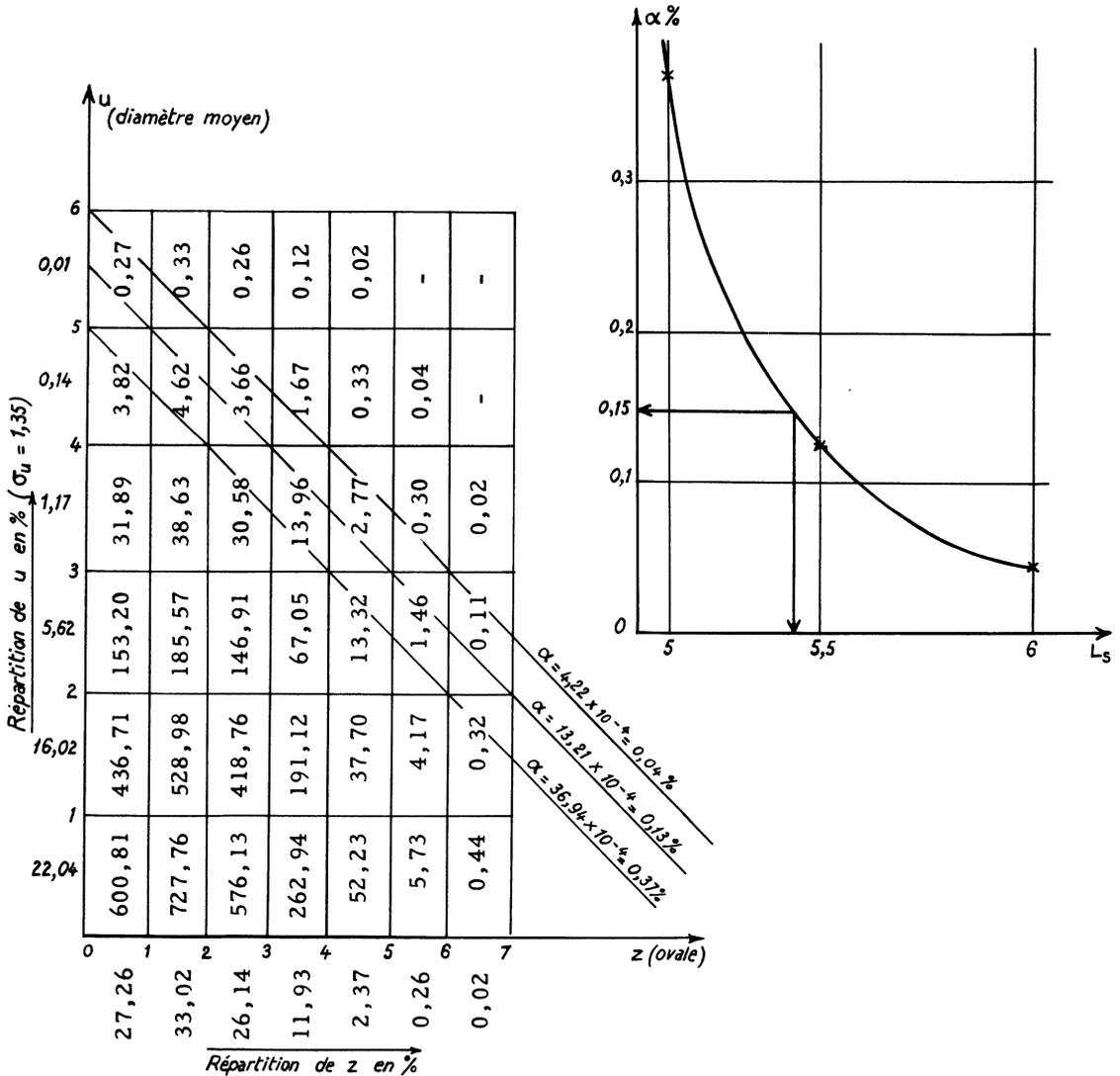
Colonne 1 : prendre pour  $z$  les valeurs limites des classes  
Colonnes 6 et 7 :  $F$  est l'intégrale de la loi de Laplace-Gauss (donnée par les tables)  
Colonne 12 :  $n_i$  = fréquence réelle observée sur l'histogramme.

POMPE A HUILE  $\phi$  14 H 7  
 Histogramme général de l'ovale



# POMPE A HUILE - ALÉSAGE Ø 14 H 7

## Calcul de la dispersion totale



Nota : Les chiffres dans les cases du quadrillage sont en  $10^{-4}$

Dispersion totale à 3‰ =  $2 L_5 \# 2 \times 5,5 = 11$  microns