

B. ZIMMERN

Loi de Poisson et loi binomiale dans le calcul des stocks de sécurité

Revue de statistique appliquée, tome 5, n° 3 (1957), p. 99-110

http://www.numdam.org/item?id=RSA_1957__5_3_99_0

© Société française de statistique, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

LOI DE POISSON ET LOI BINOMIALE DANS LE CALCUL DES STOCKS DE SÉCURITÉ

par

B. ZIMMERN

Ingénieur

Groupe de recherche opérationnelle de la Régie Renault

Le calcul des probabilités trouve des applications fécondes dans la détermination des stocks de sécurité.

Les ventes d'une entreprise s'effectuant en effet à des dates plus ou moins aléatoires, le stock (1) de produits finis évolue aléatoirement; si le stock et les aires de stockage ne sont pas assez largement dimensionnés, des ordres d'achat ne pourront être satisfaits ou la fabrication sera contrainte de s'arrêter faute de place pour emmagasiner les produits finis; à l'inverse, si ces stocks ou ces aires sont trop largement estimés, l'entreprise devra supporter inutilement de charges financières souvent considérables.

L'intérêt du calcul des probabilités est de permettre de lier la loi aléatoire des ventes à l'évolution du stock et donc les pertes de clientèle ou de fabrication aux charges de stockage, donnant ainsi au chef d'entreprise les moyens de choisir une politique de stock en toute clarté.

Dans cette perspective, l'objet très limité de cette étude est de tracer un parallèle entre deux représentations mathématiques de ce problème de stock : la représentation poissonnienne et la représentation binomiale; et de marquer les domaines d'application de l'une et de l'autre. La représentation poissonnienne ayant déjà remarquablement été exposée dans cette revue (2), il n'y sera fait que de brèves allusions; par contre, la représentation binomiale sera plus complètement traitée.

On admet couramment dans les analyses de stock que l'on peut représenter la loi des ventes par une loi de type poissonnien; que, par exemple, le nombre d'appels téléphoniques, d'ordres d'achats, de bateaux entrant dans un port pendant une période donnée est représentable par une loi de Poisson.

Cette loi suit assez fidèlement la réalité de ce que l'on peut appeler la vente de détail caractérisée par une clientèle extrêmement nombreuse, trop nombreuse pour que chaque client puisse être individuellement repéré et que s'établissent avec lui des relations commerciales régulières; ce sera dans le cas d'un grand magasin ou d'un central téléphonique dont les clients se chiffrent par milliers, chaque client effectuant ses achats très aléatoirement et pouvant rester plusieurs semaines ou plusieurs mois sans passer d'appel ou d'ordre d'achat.

A ce type de relation commerciale, on peut opposer la vente de gros caractérisée par une clientèle limitée, connue « intuitu personae », et liée au fournisseur par des contrats plus ou moins explicites qui tiennent compte des possibilités du fabricant comme des besoins du client. Ce sont ces relations qui lient normalement les cellules d'un circuit de production : fabricant à fabricant, producteur à grossiste, administration de port et compagnies de navigation, etc... Ici, la loi de Poisson s'ajuste mal car elle implique un aléatoire absolu des ventes manifestement incompatible avec le minimum de régularité que nécessitent ces échanges.

Après avoir marqué quelques-unes des incompatibilités entre la réalité des ventes de gros et les hypothèses que présuppose la loi de Poisson, on tentera de montrer comment il est possible d'aborder les problèmes de vente de gros à partir de la loi Binomiale et on terminera par une application simple à la gestion de stock dans un réseau de distribution comprenant grossiste et détaillants, où seront utilisés simultanément les deux processus.

(1) Bien que cette étude soit consacrée à l'analyse des stocks matière, elle s'appliquerait à cette forme de stock qu'est l'utilisation partielle d'une capacité : capacité d'un central téléphonique, d'un port, d'une usine, etc...

(2) On aura grand intérêt à relire l'article publié par M. R. HENON dans la Revue de Statistique Appliquée, Vol. III, n° 2, 1955, sous le titre "Gestion des stocks".

I. - LOI DE POISSON ET REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DES VENTES EN GROS

A - LOI DE POISSON

La loi de Poisson implique au moins deux conséquences incompatibles avec la réalité des ventes en gros.

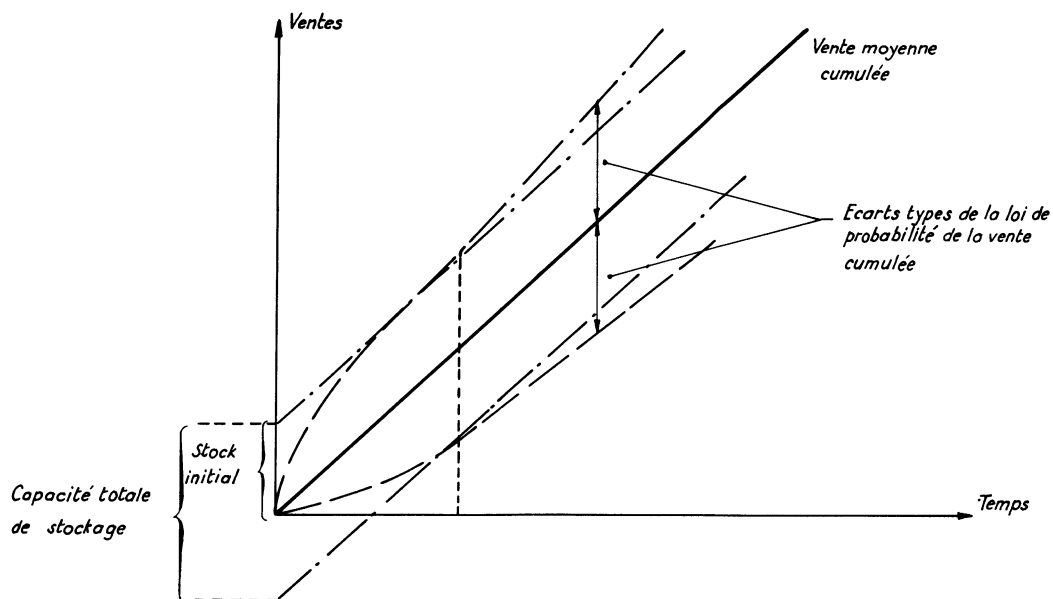
1°) UNE CLIENTÈLE PRATIQUEMENT INFINIE OU DES CLIENTS "FANTASISTES"

Admettre la loi de Poisson pour représenter des ventes dans une période donnée, c'est admettre qu'il existe une probabilité non nulle d'avoir dans cette période une vente totale supérieure à tout niveau, aussi élevé soit-il.

Or, si la population des clients est limitée et si la probabilité qu'un client donné passe un ordre supérieur à un certain niveau est nulle lorsque ce niveau dépasse un certain montant - si, en d'autres termes, les clients ne sont pas des fantaisistes - la probabilité de dépasser un montant donné de vente pendant une période donnée, devrait être nulle à partir d'un certain niveau.

2°) LA CERTITUDE POUR LE FOURNISSEUR DE NE PAS SATISFAIRE UN JOUR LES ORDRES DE SA CLIENTÈLE ET D'AVOIR A MODIFIER ALÉATOIREMENT SON PROGRAMME DE FABRICATION

Admettre la loi de Poisson, c'est admettre qu'il existe une probabilité finie, que la courbe cumulée des ventes s'écarte autant que l'on voudra de la vente moyenne au bout d'un temps suffisamment long (1) et donc de ne pouvoir un jour satisfaire tous les ordres de la clientèle, quel que soit le stock de sécurité initial, ou d'arrêter la production faute de commande.



(1) Avec cette loi, l'écart type de la loi de probabilité des ventes cumulées croît comme la racine carrée du temps.

Si la loi de Poisson s'adapte mal, c'est que cette liberté totale d'achat, fondement de l'aléatoire de la loi de Poisson est incompatible avec des relations d'affaires normales qui impliquent au contraire un minimum de régularité sans laquelle le fabricant ne pourrait établir ses programmes, ni l'acheteur obtenir la garantie d'être livré en temps opportun. Il existe à la source des relations commerciales courantes une contrainte contractuellement acceptée que contredit l'aléatoire poissonnier.

B - LOI BINOMIALE

Régularité des échanges ne signifie cependant pas déterminisme absolu : aucun acheteur ne peut prévoir longtemps à l'avance les quantités et les dates exactes de ses commandes. Cette indétermination assure l'ergodicité des commandes des divers clients les uns par rapport aux autres, si bien qu'à l'échelle de la très courte période, l'arrivée des ordres affecte une allure poissonnienne.

Ces deux considérations conduisent alors au modèle suivant. Soit T_i le cycle moyen de réapprovisionnement du client i ; supposons que les cycles de réapprovisionnement soient peu dispersés, du fait de l'ergodicité des dates de commande et au bout d'un temps suffisamment long pour que les conditions initiales soient oubliées, la probabilité pour que le client i passe commande pendant une courte période sera sensiblement $\frac{dt}{T_i}$. La probabilité pour que ce client passe commande pendant une période $t < T_i$ sera $\frac{t}{T_i}$.

Pour une courte période dt , la probabilité sera de forme poissonnienne, mais pour $t = T_i$ on aura la certitude que le client ait commandé une fois et une fois seulement.

A partir de ce modèle, connaissant les cycles de réapprovisionnement T_i , les lots de réapprovisionnement x_i des divers clients i , il est alors possible de calculer la loi de probabilité que suit la somme des commandes et en déduire une politique de stock.

Le calcul sera successivement effectué pour le cas plus simple : clients identiques $T_i = T$, $x_i = x$, puis pour le cas où les clients ont même cycle mais lots différents et enfin pour le cas général où les cycles eux-mêmes diffèrent.

II. APPLICATION D'UN MODÈLE BINOMIAL A L'ÉTUDE DES VENTES EN GROS

A - TOUS LES CLIENTS SONT IDENTIQUES

1°) ÉTUDE DE LA LOI DES VENTES

Dans le cas le plus simple, les N clients d'un fabricant se réapprovisionnent par quantités égales x et à fréquence égale $1/T$.

Soit $P(X,t)$ la probabilité pour que le total des ventes dans la période t soit compris entre X et $X+dX$ et $\Phi(\omega, t)$ sa fonction caractéristique.

La variable aléatoire X étant la somme de variables aléatoires indépendantes x , on a immédiatement :

$$\Phi(\omega, t) = \left[1 - \frac{t}{T} + \frac{t}{T} e^{i\omega x} \right]^N$$

Cette fonction caractéristique est bien celle de la loi binomiale.

Sa variance que l'on peut recalculer en écrivant

$$\sigma^2 = -\Phi''(0,t) + \Phi'^2(0,t) \quad \text{est}$$

$$\sigma^2 = \frac{t}{T} \left(1 - \frac{t}{T}\right) N x^2$$

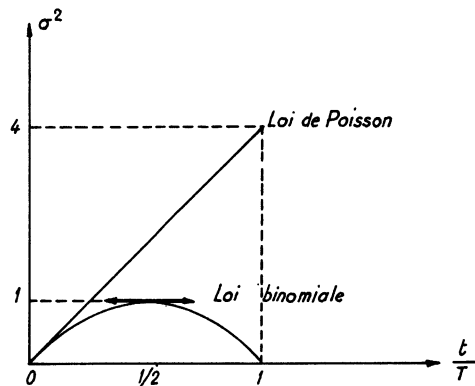
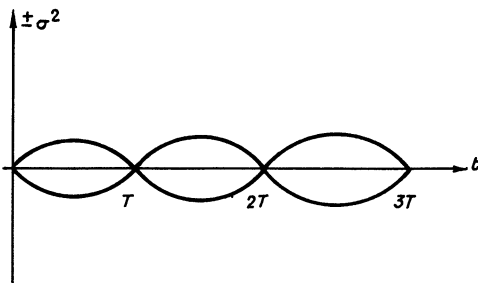
Cette formule montre que :

a) la loi de probabilité de la demande cumulée, en fonction du temps, affecte la forme d'une onde parabolique dont les noeuds sont situés aux époques hT (h entier positif).

La demande cumulée s'ajuste bien cycliquement à la production constante cumulée du fabricant.

b) Pour les courtes périodes d'observation, la loi de Poisson est tangente à la loi obtenue.

En effet, pour $\frac{t}{T}$ petit $\sigma^2 \sim \frac{t}{T} N x^2$ qui est la vente moyenne et donc la variance de la loi de Poisson on retrouve ainsi que, pour une courte période d'observation l'arrivée des commandes présente une allure poissonnienne.



Mais si l'on étendait cette loi à des périodes plus longues, par exemple à $t = T$, on obtiendrait une variance égale à Nx^2 alors qu'avec la loi binomiale, le maximum de la variance (obtenue en annulant sa dérivée par rapport à $\frac{t}{T}$) est seulement $\frac{Nx^2}{4}$

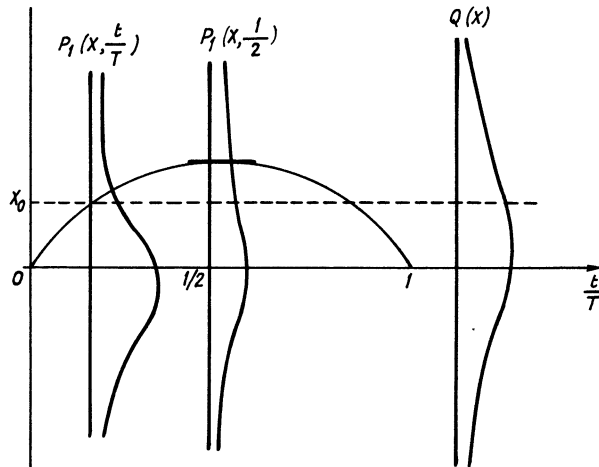
Une politique de stockage, fondée ainsi qu'il est courant de le faire sur la sécurité que confère un stock initial égal à un, deux ou trois écarts types, aurait conduit, par la loi de Poisson, à un stock double de celui que l'on obtient par la loi binomiale.

2°) APPLICATION A LA DÉTERMINATION D'UN STOCK DE SÉCURITÉ

Dans l'industrie, il faut déterminer couramment des niveaux initiaux de stock tels que quelle que soit l'arrivée aléatoire des commandes, le producteur soit assuré d'une certaine probabilité de ne pas faire attendre ses clients (1).

Si la loi de la demande cumulée est bien binomiale, il est en effet assuré de satisfaire sa clientèle au terme de chaque période quel que soit son stock initial, mais avec un risque d'attente d'autant plus faible que le stock initial sera plus élevé.

Evolution des lois P_1 en fonction de $\frac{t}{T}$



Répondre au problème c'est donner soit une correspondance entre le stock initial et la probabilité que le stock tombe à zéro (que les clients attendent), soit une correspondance entre le stock initial et l'espérance mathématique de l'attente des clients. La première présentation s'impose si l'attente d'un client est inadmissible (analogue au risque de ruine pour le joueur), la seconde si elle est admissible mais entraîne une pénalité proportionnelle à la demande moyenne en attente (on ajouterait cette pénalité aux charges de stockage afin de déterminer le niveau du stock de sécurité qui assure une charge financière totale minimum).

a) Soit à calculer tout d'abord la probabilité de tomber en défaut de stock et de faire attendre des clients.

Soit $P_1(X, t)$ la loi binomiale des écarts de la demande à la demande moyenne, (la loi P_1 est la loi P centrée) dont l'écart type a été calculé

$$\sigma = x \sqrt{N \frac{t}{T} (1 - \frac{t}{T})}$$

soit X_0 le stock initial.

(1) On traiterait de même le problème symétrique : calcul des aires de stockage permettant d'absorber et de ne pas stopper la fabrication si la demande se présente avec du retard. La somme des aires de stockage, clientèle, production, déterminerait la capacité de stockage à prévoir entre la fabrication et la clientèle, le stock lui-même oscillant entre ces limites de stockage.

La probabilité de tomber en défaut de stock est :

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_{x_0}^{\infty} P(X,t) dX \\ &= \int_{x_0}^{\infty} dX \int_0^T P(X,t) dt \\ &= \int_0^{\infty} Q(X) dX \quad \text{avec} \quad Q(X) = \int_0^T P(X,t) dt \end{aligned}$$

Il faut donc connaître la loi $Q(X)$ valeur moyenne par rapport au temps de la loi $P_1(X,t)$.

Cette loi est calculable et il serait possible d'en établir des tables. Mais il est plus simple de l'encadrer par des lois binomiales, simples à intégrer et dont les écarts types sont peu différents.

En premier lieu, il est apparent que :

$$\int_{x_0}^{\infty} Q(X) dX < \int_{x_0}^{\infty} P(X, \frac{T}{2}) dX$$

Ceci est visible sur le graphique précédent. Mathématiquement, on a :

$$\int_{x_0}^{\infty} P(X, \frac{T}{2}) dX \geq \int_{x_0}^{\infty} P(X,t) dX$$

quel que soit t du fait que la loi $P(X, \frac{T}{2})$ est celle qui admet le plus grand écart-type; d'où, en intégrant l'inégalité par rapport au temps

$$\int_{x_0}^{\infty} P(X, \frac{T}{2}) dX > \int_{x_0}^{\infty} Q(X) dX$$

Par ailleurs, l'étude des premiers moments de $Q(X)$ montre que ses moments d'ordre 3 ou supérieurs à 3 sont plus élevés que la loi binomiale admettant même variance que $Q(X)$.

La variance de $Q(X)$ intégrale de la variance de P_1 par rapport au temps est :

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^T \frac{t}{T} (1 - \frac{t}{T}) Nx^2 dt \\ \sigma &= \frac{Nx^2}{6} \end{aligned}$$

Celle de $P_1(X, \frac{T}{2})$ déjà calculée est $\frac{Nx^2}{4}$

donc, en désignant par $B(X, \sigma^2)$ une loi binomiale centrée de variance σ^2 , on a :

$$\boxed{\int_{x_0}^{\infty} B(X, \frac{Nx^2}{6}) dX < \int_{x_0}^{\infty} Q(X) dX < \int_{x_0}^{\infty} B(X, \frac{Nx^2}{4}) dX}$$

On peut donc encadrer la probabilité de nullité du stock par l'intégration de deux lois binomiales (ou lois de Gauss si le nombre de clients est suffisamment grand et que les deux types de loi peuvent être identifiés) d'écart-types peu différents.

b) Pour le calcul de la demande moyenne en attente D on aurait

$$\begin{aligned} D &= \int_0^T dt \int_{x_0}^{\infty} (X - X_0) P_i(X, t) dX \\ &= \int_{x_0}^{\infty} (X - X_0) dX \int_0^T P_i(X, t) dt \\ &= \int_{x_0}^{\infty} (X - X_0) Q(X) dX \end{aligned}$$

on démontrerait même que :

$$\int_{x_0}^{\infty} (X - X_0) B\left(X, \frac{Nx^2}{6}\right) dX < D < \int_{x_0}^{\infty} (X - X_0) B\left(X, \frac{Nx^2}{4}\right) dX$$

On a tracé les courbes correspondantes de probabilité et d'attente, les unités de stocks ou d'attente moyenne étant évaluées en $x \sqrt{n}$ (cf. Fig. 1 et 2) (l'approximation gaussienne des lois binomiales a été appliquée).

c) Cycles de réapprovisionnement identiques ; lots de réapprovisionnement différents.

Soit T le cycle commun de réapprovisionnement
t la période d'observation,
 $g(x_i)$ la loi de distribution du lot de réapprovisionnement du client i,
 \bar{x}_i la valeur moyenne de ce lot,
 $y_i(\omega)$ la transformée de Fourier de $g(x_i)$
 $P(X, t)$ la loi de distribution de la demande totale,
 $\Phi(\omega, t)$ sa fonction caractéristique.

D'après le théorème sur l'addition des variances aléatoires

$$\begin{aligned} \Phi(\omega, t) &= \left(1 - \frac{t}{T} + \frac{t}{T} y_1\right) \left(1 - \frac{t}{T} + \frac{t}{T} y_2\right) \dots \left(1 - \frac{t}{T} + \frac{t}{T} y_n\right) \\ &= \pi_i \left(1 - \frac{t}{T} + \frac{t}{T} y_i\right) \end{aligned}$$

La loi $P(X, t)$ peut donc être connue à travers ses divers moments du jour où sont connues les lois $g(x_i)$:

$$\begin{aligned} X &= -i \Phi'(0) = \frac{t}{T} \sum y_i'(0) = \frac{t}{T} \sum \bar{x}_i \\ \sigma^2 &= -\Phi''(0) + \Phi'^2(0) = -\frac{t}{T} \sum y_i''(0) + \left(\frac{t}{T}\right)^2 \sum y_i'^2(0) \end{aligned}$$

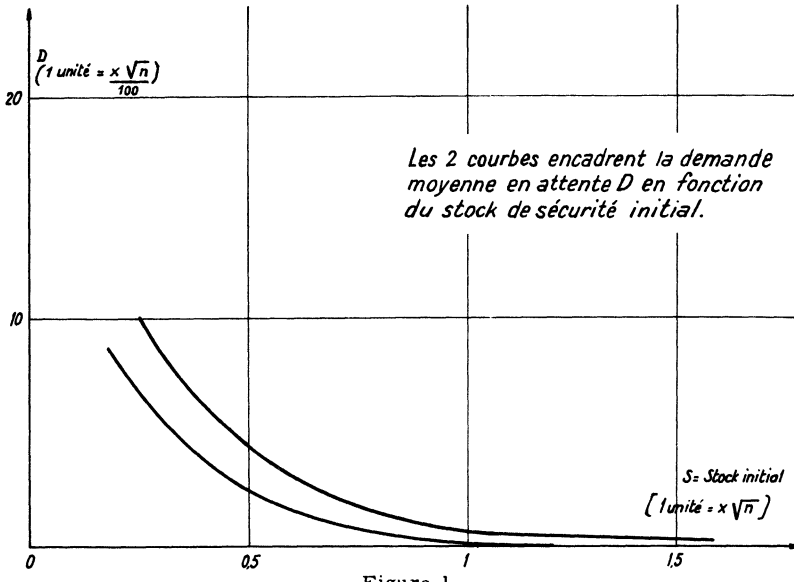


Figure 1

Demande moyenne en attente D en fonction du stock de sécurité initial S

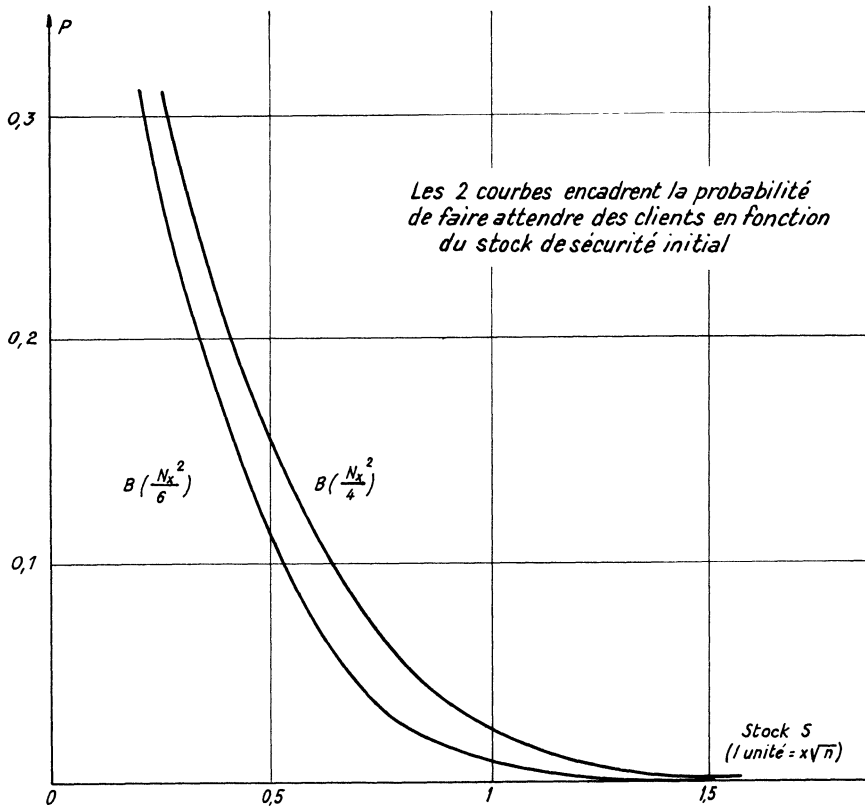


Figure 2

Probabilité P que le stock s'annule en fonction d'un stock initial S

On retrouve la cyclicité de la loi $P(X,t)$ par rapport à t mais l'écart type maximum est obtenu pour

$$\frac{t}{T} = \frac{\sum y_i'(0)}{2 \sum y_i'^2(0)}$$

(et non pour $\frac{t}{T} = 1/2$)

et

$$\sigma_{\max.}^2 = \frac{\sum y_i'(0)}{4 \sum y_i'^2(0)}$$

On peut donc théoriquement calculer

$$Q(X) = \int_0^1 P(X, \frac{t}{T}) d(\frac{t}{T})$$

Mais, en pratique, les informations sur la clientèle sont suffisamment incertaines pour que l'on puisse se ramener au cas du paragraphe 1 en encadrant la loi $Q(X)$ par deux lois binomiales (ou de Gauss si le nombre des clients est suffisamment important) dont les variances seraient

$$\sigma^2 = \frac{\sum \bar{x}_i^2}{4} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = \frac{\sum \bar{x}_i^2}{6}$$

(c'est admettre en fait que le lot de réapprovisionnement du client i est fixe, donc que $y_i'(0) = y_i'^2(0)$)

d) Périodes et lots de réapprovisionnement différents

Soit $p_i(X, \frac{t}{T_i})$ la loi de probabilité centrée du client i pendant la période t

$\varphi_i(\omega, \frac{t}{T_i})$ sa caractéristique

$P_i(X,t)$ la loi centrée de la demande totale

$\Phi_i(\omega, t)$ sa caractéristique ($\Phi_i = \Pi_i \varphi_i$)

Q la loi moyenne de probabilité tirée de $P(X,t)$:

$$Q(X) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_i(X,t) dt$$

X sa caractéristique : $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_i(\omega, t) dt$

La loi P_i est en fonction du temps une loi complexe car sa variance est la somme des variances élémentaires de fonction p_i de cycles différents.

Il est cependant possible de calculer la fonction $Q(X)$ et de l'encadrer entre deux lois majorantes et minorantes.

En effet, si les T_i sont distribués de façon quelconque, les cycles des fonctions p_i sont ergodiques les uns par rapport aux autres les valeurs $k_i = \frac{t}{T_i}$ peuvent être à un instant donné considérées comme des variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément entre 0 et 1.

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \prod_i \varphi_i \left(\frac{t}{T_i} \right) dt \\ &= \prod_i \int_0^1 \varphi_i(k_i) dk_i \end{aligned}$$

Donc $Q(X)$ est la loi de distribution d'une somme de variables aléatoires distribuées suivant les valeurs moyennes dans le temps des fonctions $p(x, \frac{t}{T_i})$ soit

$$q_i(x) = \int_0^1 p_i(x_i, k) dk$$

On pourrait donc calculer $Q(X)$ à partir des fonctions $p_i(x, \frac{t}{T_i})$ qui se déduisent aisément des lois de distribution $y_i(x_i)$ (1) en passant par les fonctions caractéristiques.

Mais comme au paragraphe 1, il est plus simple d'encadrer $Q(X)$ par deux lois majorantes et minorantes.

Les variances de $q_i(x)$ et de $p_i(x, \frac{1}{2})$ étant $\frac{\varphi_i''(0)}{6\varphi_i'^2(0)}$ et $\frac{\varphi_i''(0)}{4\varphi_i'^2(0)}$, d'après la démonstration du § 1, on aura

$$\int_{x_0}^{\infty} B(x, \frac{\varphi_i''}{6\varphi_i'^2}) dx < \int_{x_0}^{\infty} q(x) dx < \int_{x_0}^{\infty} B(x, \frac{\varphi_i''}{4\varphi_i'^2}) dx$$

Il est immédiat que cette inégalité subsiste lorsque l'on additionne les variables aléatoires x_i .

d'où :

$$\int_{x_0}^{\infty} B(x, \frac{\sum \varphi_i''(0)}{6\sum \varphi_i'^2(0)}) < \int_{x_0}^{\infty} Q(X) dX < \int_{x_0}^{\infty} B(x, \frac{\sum \varphi_i''(0)}{4\sum \varphi_i'^2(0)}) dx$$

3°) CONCLUSION

Ces analyses montrent qu'en pratique on pourra encadrer la probabilité de tomber en défaut de stock ou l'espérance mathématique d'attente des ordres de commande, en utilisant les courbes figurant au § 1 et en remplaçant, si besoin est (clients dont les ordres de commande sont trop différents), l'échelle graduée en $x\sqrt{N}$ par la même échelle graduée en $\sqrt{\sum \bar{x}_i^2}$ (2).

(1) Il est à remarquer que les cycles individuels T_i ne jouent aucun rôle dans la distribution de $Q(X)$. Ce résultat est à rapprocher des valeurs obtenues pour les variances des lois minorantes et majorantes de $Q(X)$ (cf. infra). Il se produit un phénomène analogue à l'addition des puissances d'ondes de périodes différentes en électricité: quelles que soient les fréquences des ondes, la puissance maximum est égale à la somme des puissances maxima et la puissance efficace égale à la somme des puissances efficaces des ondes composantes.

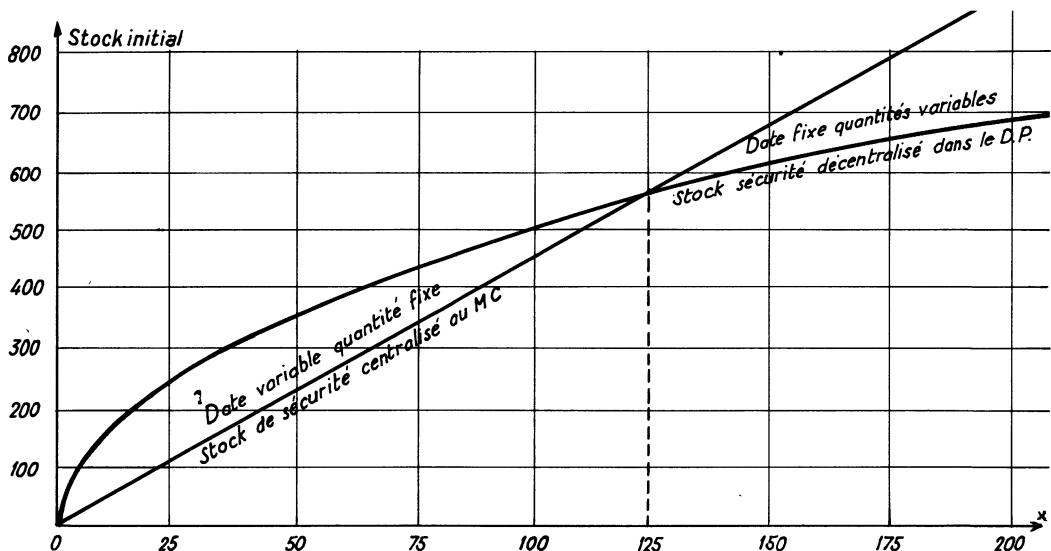
(2) On rappelle que \bar{x}_i est le lot moyen de réapprovisionnement du client i .

III. APPLICATION DE LA LOI DE POISSON ET DE LA LOI BINOMIALE A LA DÉTERMINATION D'UNE POLITIQUE DE RÉAPPROVISIONNEMENT DANS UN RÉSEAU DE DISTRIBUTION ⁽¹⁾

Considérons un réseau de distribution formé d'un magasin central MC approvisionnant N détaillants de province d'importance sensiblement comparable D.P.

Ces détaillants se réapprovisionnent à fréquence sensiblement constante pour chaque produit vendu, fréquence dont l'optimum peut être calculé avec la théorie des séries économiques (compromis entre le coût administratif de réapprovisionnement et les charges de stockage). Soit x la série économique de réapprovisionnement exprimée en nombre d'unités du produit considéré.

Le magasin central peut imposer deux politiques de réapprovisionnement aux détaillants : soit leur demander de passer un ordre x quand leur stock deviendra nul (2) soit passer à dates fixes un ordre d'achat égal à celui de la période écoulée de manière à reconstituer leur stock. La première solution est une politique de réapprovisionnement par quantités fixes à dates plus ou moins variables en raison de l'écoulement aléatoire des ventes au détail, la seconde une politique de réapprovisionnement par quantités variables à dates fixes.



La première politique a l'inconvénient d'obliger le M.C. à constituer un stock de sécurité plus ou moins important pour faire face à l'accumulation cyclique des commandes de plusieurs clients (schéma binomial); la seconde, l'inconvénient d'obliger le détaillant à constituer, en dehors du stock courant, un stock de sécurité pour faire face à des ventes exceptionnellement élevées entre deux dates de réapprovisionnement (schéma poissonnien).

En supposant que dans l'un et l'autre cas, les ventes soient suffisamment importantes pour que l'on puisse approximer la loi de Poisson ou la loi binomiale

(1) Le schéma suivant n'a pas la prétention d'être une étude complète; bien qu'ayant servi à des recherches pratiques, il a simplement pour but d'illustrer l'utilisation respective de la loi binomiale et de la loi de Poisson.

(2) On suppose que les délais de réapprovisionnement sont négligeables; on pourrait introduire ce délai sans grande complication.

par une loi de Gauss, les stocks nécessaires au M.C. dans un cas, aux D.P. dans l'autre seront, pour une même sécurité de satisfaire la clientèle :

$$k \frac{x}{2} \sqrt{N} < S_1 < kx \sqrt{\frac{N}{6}} \quad \text{et} \quad S_2 = k N \sqrt{x}$$

(k fois l'écart type de chaque loi).

Les deux politiques seront équivalentes pour

$$4 N < x < 6 N \quad \text{Soit} \quad x \sim 5 N$$

pour $x < 5N$ il est préférable d'adopter la politique quantités fixes, date variable et de mettre le stock de sécurité au magasin central.

pour $x > 5N$ il est préférable d'adopter la politique quantités variables, date fixe et de placer le stock de sécurité chez les détaillants (1).

La différence des 2 courbes indique l'accroissement du stock si l'on se trompe de politique.

Et c'est peut être le problème : centralisation ou décentralisation (des stocks) que l'on retrouve au travers et au-delà de cette mathématique.

(1) On pourrait améliorer cette politique en utilisant une stratégie mixte : coefficient de sécurité moins élevé pour les stocks de sécurité des détaillants, mais possibilité de se réapprovisionner en dépannage au magasin central où est maintenu un petit stock de dépannage. Le calcul complet dépasse le cadre de cette étude.