REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

B. ZIMMERN

Études de la propagation des arrêts aléatoires dans les chaînes de production

Revue de statistique appliquée, tome 4, n^{o} 1 (1956), p. 85-104
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1956__4_1_85_0>

ÉTUDES DE LA PROPAGATION DES ARRETS ALÉATOIRES DANS LES CHAINES DE PRODUCTION (1)

par

B. ZIMMERN

Ancien élève de l'École Polytechnique
Ancien élève de l'Ecole Nationale d'Administration
Ingénieur à la Régie Nationale des Usines Renault

Des machines en chaine ont un rendement inférieur à celui qu'auraient ces mêmes machines prises individuellement. En effet, lorsqu'une machine s'arrête elle en immobilise inutilement d'autres. Cette étude donne des éléments permettant de calculer la « propagation » de ces arrêts, la perte de rendement résultante et inversement d'en déduire la structure de chaine qui limite cette propagation et donne un rendement économique maximum.

La conception et la création d'une chaine de production, chaine d'usinage ou chaine de montage, posent des problèmes ardus. La compétence technique, une grande connaissance du travail sur le tas sont indispensables pour harmoniser en un ensemble efficace un complexe souvent disparate d'hommes et de machines. Aussi le sens de cette étude n'est-il pas de formuler des règles générales pour lesquelles l'auteur avoue n'être guère qualifié, mais de mettre en valeur un élément qui influe parfois considérablement sur le rendement d'une chaine : sa longueur.

En effet, quel que soit le soin avec lequel sont conçues et entretenues les machines, elles sont sujettes à s'arrêter : arrêt pour réglage, arrêt pour panne. Quand une machine est seule, elle n'immobilise qu'elle-même. Quand elle est en chaine, elle en immobilise d'autres, en stoppant l'écoulement continu des pièces. Plus la chaine sera longue, plus nombreuses seront les machines ainsi affectées. En outre, plus nombreuses seront les machines en chaine, plus fréquentes seront les causes d'arrêt. Ces deux facteurs contribuent à immobiliser davantage la chaine au fur et à mesure qu'elle s'allonge. La longueur de la chaine - et ce fait est confirmé par l'expérience - est donc un facteur de diminution du rendement.

L'étude suivante a pour but de formuler mathématiquement cette intuition et d'évaluer cette perte de rendement en fonction de la structure de la chaine : longueur, fréquence d'arrêt propre à chaque machine, importance et localisation des stockages prévus pour limiter la propagation des arrêts.

Dans cette analyse, on supposera connues les caractéristiques techniques propres à chaque machine ou poste de travail, c'est-à-dire sa cadence de production instantanée - nombre de pièces produites dans l'unité de temps en marche normale - la fréquence et la durée de ses arrêts. Ces éléments peuvent être aisément déterminés par "observation, par sondage", sur des postes existants ou, à défaut, extrapolés à partir de postes similaires déjà connus.

A partir de ces éléments, on peut calculer la perte totale imputable aux arrêts lorsque les postes sont mis en chaine.

(1) Exposé fait au séminaire de Recherche Opérationnelle le 7 décembre 1955.

Il faut cependant, dès l'abord, distinguer si entre ces postes, figurent ou non des aires de stockage destinées à régulariser la production.

Dans la négative, l'arrêt d'un poste supprime presque immédiatement toute alimentation de la fraction de la chaine située en aval, et de plus, la fraction amont ne peut continuer à travailler, faute de place où emmagasiner provisoirement les pièces en cours de fabrication; l'arrêt d'un poste immobilise donc presque instantanément tous les autres. Dans l'affirmative, les stockages intermédiaires vont faire office de volant de sécurité en alimentant provisoirement l'aval ou en absorbant ce qui vient d'amont.

L'introduction de ces stocks accroit au total le rendement de la chaine, mais elle entraine, par ailleurs, certains inconvénients et certaines dépenses : rupture de la continuité mécanique de la chaine, dépenses de stockage, augmentation des manutentions, etc ...

On est ainsi conduit à scinder l'étude en deux étapes successives :

1°) Il faut d'abord calculer le rendement d'une chaine sans stock intermédiaire, appelée par la suite **«chaîne stricte»**; on appellera **«chaîne lache»** une chaine où figurent ces stocks. En comparant le rendement de chaque machine en chaine avec celui obtenu si elle était "isolée", on aura une première évaluation des inconvénients de la mise en chaine et la possibilité d'établir un premier bilan approximatif entre les deux solutions :"chaine lâche" ou "chaine stricte", chaine avec ou sans stockage.

2°) Introduisant ensuite les stocks, on cherchera quel est le volume optimum de stockage à prévoir en fonction des avantages et des inconvénients énumérés ci-dessus : accroissement du rendement, mais introduction de coûts supplémentaires de stockage.

Le modèle introduit dans cette dernière analyse présente d'ailleurs un certain caractère de généralité : les postes de la chaine peuvent être considérés comme des particules remontant un flux temporel, matérialisé par le flux des pièces qui s'écoulent; ils sont séparés par des distances variables : les stocks intermédiaires, mais lorsque l'une s'arrête subitement, elle finit par être rattrapée par les particules suivantes et les stoppe à leur tour; une bonne image de ce phénomène est donnée par l'évolution d'un convoi routier.

PREMIÈRE PARTIE

RENDEMENT DE PLUSIEURS POSTES EN CHAINE STRICTE

Les paramètres de chaque poste : cadences instantanées de production, fréquence et durée moyenne des arrêts sont supposés connus.

Moyennant certaines hypothèses simplificatrices explicitées dans le modèle ci-dessous et vérifiées en général par les faits, le rendement de la chaine peut être calculé; il sera exprimé par le rapport entre le temps réellement productif et le temps total de mise en service de la chaine.

A partir de ce résultat et dans chaque cas concret, on sera à même d'évaluer a priori le nombre maximum de postes à disposer en chaine stricte ou l'utilité d'introduire dans la chaine des stockages régulateurs qui la fractionnent.

MODÈLE

1) Les arrêts de chaque poste de travail sont supposés **totalement aléatoires et indépendants les uns des autres.**

La première hypothèse implique que pour un instant t quelconque, la probabilité que le poste i s'arrête entre t et t + dt est égale à $\frac{dt}{\ell i}$ où ℓi est le temps moyen de marche du poste i, c'est-à-dire le temps qui en moyenne sépare deux arrêts consécutifs de ce poste; $\frac{1}{\ell i}$ caractérise d'ailleurs la fréquence des arrêts de ce poste.

Cette hypothèse n'est guère restrictive; il suffit que les causes d'arrêts soient d'origines suffisamment diverses pour qu'elle se trouve vérifiée dans les faits; et la complexité des machines modernes est en général garante de cette diversité.

La seconde hypothèse implique que la probabilité d'arrêt d'un ensemble de postes est la somme des probabilités d'arrêts des postes composants. Sa validité est en général vérifiée.

2) La probabilité qu'un poste arrêté se remette en marche est également aléatoire, c'est-à-dire que la probabilité pour que le poste i se remette en marche entre t et t + dt, l'époque t étant quelconque est égale à $\frac{dt}{vi}$; vi est l'homologue de ℓi et est égal à la durée moyenne d'arrêt du poste i.

Cette hypothèse n'est guère restrictive car la diversité des causes d'arrêts conduit également à la vérifier.

Elle n'est d'ailleurs nécessaire que pour la seconde et la troisième partie. Dans la première partie, les résultats restent valables quelle que soit la loi d'occurence de la fin d'arrêt (totalement aléatoire ou non).

CALCUL DU GAIN DE PRODUCTION

1. Tous les postes de la chaîne ont la même durée moyenne de marche et d'arrêt

Dans ce cas, tous les postes ont même l et même v.

Si chaque poste <u>était "isolé"</u> par des sotcks suffisants pour ne pas être arrêté par les postes qui l'entourent, il produirait en moyenne pendant ℓ, s'arrêterait en moyenne pendant v, produirait à nouveau pendant ℓ ... En moyenne chaque poste produirait pendant Q_1 du temps total de travail

$$\text{avec } Q_1 = \frac{\ell}{\ell + v} = \frac{1}{1 + \frac{v}{\ell}}$$

Si maintenant **n de ces postes sont mis en chaîne stricte** (1), la probabilité que la chaine étant en marche s'arrête entre t et t + dt est égale à (hypothèse d'indépendance des causes d'arrêt) :

probabilité que le poste 1 s'arrête, + probabilité que le poste 2 s'arrête, + ..., + probabilité que le poste n s'arrête :

$$\frac{dt}{\ell} + \frac{dt}{\ell} + \frac{dt}{\ell} + \dots\dots + \frac{dt}{\ell} = \frac{n\,dt}{\ell}$$

La probabilité que deux ou plusieurs postes s'arrêtent en même temps étant du deuxième ordre ou plus, en dt, peut être négligée.

La durée moyenne de marche de cette chaine est alors :

$$L = \frac{\ell}{n}$$

La durée moyenne d'arrêt V reste évidemment égale à v.

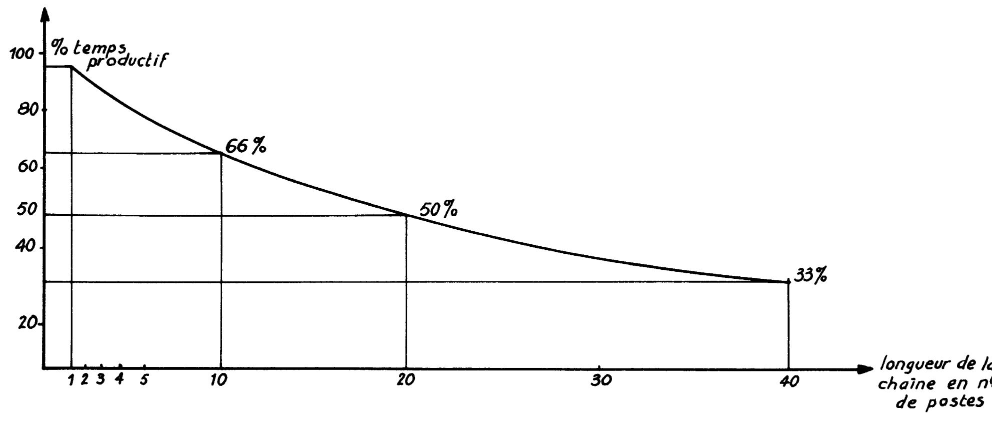
En moyenne la chaine stricte considérée sortira des pièces pendant Qn du temps total de travail avec $Qn = \frac{L}{L + V} = \frac{\frac{\ell}{n}}{\frac{\ell}{n} + v}$

soit $$\boxed{Qn = \frac{1}{1 + n\frac{v}{l}}}$$

(1) On rappelle qu'une <u>chaine stricte</u> est une chaine où l'arrêt d'un poste immobilise instantanément tous les autres; dans une telle chaine il n'y a donc pas de stocks tampon. On appellera <u>chaine lâche</u> une chaine où figurent ces stocks.

Application ; si $\frac{v}{\ell}$ = 5% c'est-à-dire si le poste isolé était arrêté pendant 5% du temps, n postes de ce type mis en chaine stricte ne marcheraient que pendant

$$Qn = \frac{1}{1 + n \times 0,05} \text{ du temps total de travail}$$



pour n = 20, l'ensemble ne marcherait que 50% du temps.

2. Cas général

Les postes 1, 2, 3, ... n ont isolément des temps moyens de marche respectifs ℓ_1, ℓ_2, ... ℓ_n et des temps moyens d'arrêts v_1, v_2 ... v_n. On a par une généralisation immédiate des formules précédentes :

temps moyen de marche de la chaine de n postes : $L_1 = \dfrac{1}{\sum_1^n \frac{1}{\ell i}}$

temps moyen d'arrêt " " " :

$$V = \frac{\sum_1^n \frac{vi}{\ell i}}{\sum_1^n \frac{1}{\ell i}}$$

d'où

$$Qn = \frac{1}{1 + \sum_1^n \frac{vi}{\ell i}}$$

On peut donc connaissant le pourcentage moyen de marche de chaque poste pris isolément $\dfrac{1}{1 + \frac{vi}{\ell i}}$ - que l'on peut aisément mesurer par la méthode des sondages même lorsque les postes sont déjà en chaine - **évaluer la perte de production, conséquence de la mise en chaîne de ces postes, ou le gain de production qui pourrait résulter d'un autre groupement de ces postes, et à partir de ces évaluations et des coûts économiques déterminer quelle est la structure de chaîne optimum ou si l'on préfère la longueur optimum de chaque élément de chaîne stricte.**

Il faut cependant remarquer que le gain déterminé de cette manière n'est qu'une approximation par excès du gain qu'il est réellement possible d'espérer.

Dans le modèle précédent, nous avons en effet comparé la production de postes "isolés" - c'est-à-dire de postes dont les seules causes d'arrêt sont leurs causes propres - et la production des mêmes postes mis en chaine.

En fait la notion de postes isolés ne se rencontre pas dans la pratique : le stock entre deux postes ne peut être infini, et la probabilité que le poste i s'arrête suffisamment longtemps pour épuiser le stock qui le sépare du poste i + 1 et donc d'arrêter le poste i + 1 n'est pas nulle. La probabilité d'arrêt d'un poste est donc égale à sa probabilité d'arrêt propre augmentée de la probabilité que le stock en amont s'annule.

Les deuxième et troisième parties de cet exposé sont dévolues à l'approche du problème complet et au calcul de l'influence du stock sur la répercussion en chaine des arrêts.

DEUXIÈME PARTIE

APPROCHE DU CALCUL DU FILTRAGE DES ARRÊTS PAR STOCKAGE

MODÈLE

- Série de postes ou de groupes de postes en chaine stricte séparés par des stocks.

- Les arrêts et les remises en marche sont totalement aléatoires (hypothèses déjà exposées et discutées dans la première partie).

- Les cadences instantanées de production de chaque poste ne varient pas, c'est-à-dire que le poste i peut seulement produire à la cadence ki (évaluée par exemple en nombre de pièces-minute) ou ne rien produire.

- Enfin, suivant le problème posé, les stocks introduits seront limités supérieurement ou non par un maximum. S'il n'y a pas de maximum imposé, il faudra cependant écrire que le stock a une probabilité nulle de devenir infini; on remarquera en outre qu'un poste ne peut arrêter que les postes situés en aval sur la chaine. Par contre si un stock maximum est imposé, un poste peut arrêter à la fois ceux qui sont en aval et en amont : lorsque le stock maximum est atteint, le poste amont est en effet contraint de stopper.

En somme : **si les stocks ne sont pas limités, les arrêts ne se propagent que vers l'aval.**

si les stocks sont limités ils se propagent aussi bien vers l'amont que vers l'aval.

SYMBOLES UTILISÉS

- On appellera poste par la suite tout ensemble strictement en chaine (1) (où l'arrêt d'un élément immobilise instantanément tous les autres).

- Chaque poste sera caractérisé par sa cadence instantanée propre ki, sa durée moyenne de marche propre li, sa durée moyenne d'arrêt propre vi.

- S'il y a un stock maximum imposé après le poste i, il sera désigné par Si.

OBJET DU CALCUL -

Le système est totalement déterminé à partir des données ki, li, vi, Si; il faut alors calculer quel sera dans ce système le pourcentage d'arrêts transmis par les stocks ou ce qui est plus intéressant quelle est la production disponible en bout de chaine. Par ailleurs, il peut être intéressant de connaitre en probabilité l'évolution des stocks intermédiaires afin d'évaluer le coût du stockage.

(1) Que cet ensemble soit composé de une ou plusieurs machines, la cadence de cet ensemble sera évidemment celle de la machine la plus lente.

En somme on essaiera de calculer la production disponible en bout de chaîne et le niveau des stocks en fonction des paramètres ki, li, vi, si; en fonction de chaque type de problème, il sera alors possible de chercher les valeurs de ces paramètres qui donnent à la chaîne un fonctionnement économique optimum.

MARCHE DE CALCUL

Dans cette seconde partie, on étudiera une chaine limitée à deux postes; dans la troisième partie, on abordera la généralisation à une chaine comprenant un nombre quelconque de postes.

CHAINE DE DEUX POSTES

1 - Approche globale

L'approche d'apparence la plus simple consiste à calculer le temps moyen qui sépare deux annulations successives du stock soit L, et le temps moyen V pendant lequel le stock reste nul; raisonnant comme dans la première partie, le % du temps pendant lequel le deuxième poste sera arrête du fait du premier est égal à :

$$R = \frac{V}{L + V}$$

Cette approche s'avérant délicate elle n'a été complètement traitée que dans le cas particulier suivant.

un poste alimenté sans défaillance alimente lui-même un autre poste situé en aval mais ce dernier a une probabilité pratiquement nulle de s'arrêter; il ne sera stoppé que si le premier poste s'arrête suffisamment longtemps.

On demande de déterminer en fonction des cadences k_1 et k_2 de deux postes, de la durée moyenne de marche ℓ et d'arrêt v du premier poste, le pourcentage du temps total pendant lequel le poste 2 sera arrêté du fait du premier

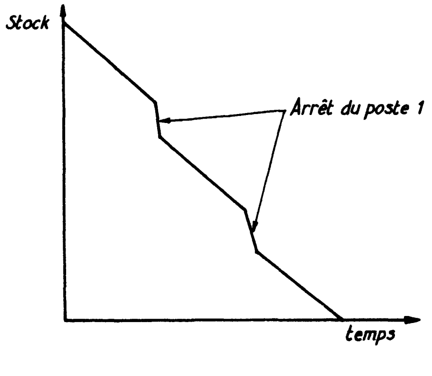
$\boxed{k_1}$ stock non limité $\boxed{k_2}$

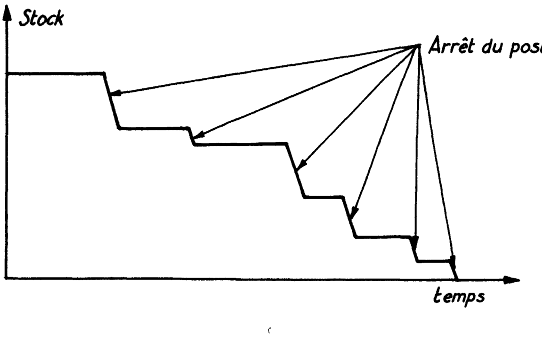
$\ell_1 = \ell \qquad \ell_2 = \infty$

$v_1 = v \qquad v_2 = 0$

<u>1er cas</u> : $k_1 < k_2$

Evolution du stock si à l'instant 0 on part avec un stock s : au bout d'un certain temps, le stock de départ se sera annulé et les deux machines seront strictement en chaine c'est-à-dire que la deuxième machine marchera au rythme de la première et s'arrêtera lorsque la première s'arrêtera.

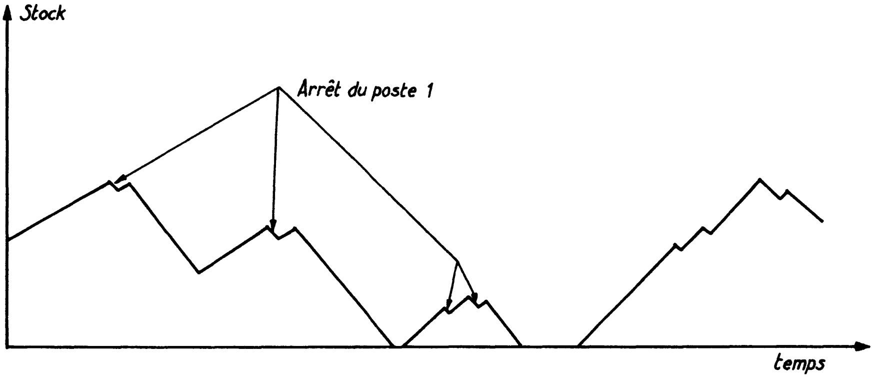




2ème cas : $k_1 = k_2$

Même résultat.

3ème cas : $k_1 > k_2$; c'est le seul intéressant; la formation d'un stock lorsque la première machine est en marche permet à la seconde de continuer de travailler pendant un certain temps lorsque la première s'arrête.



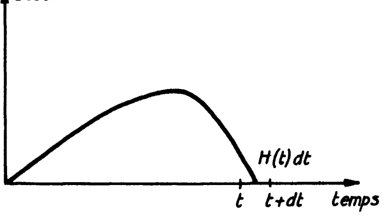
On voit que l'évolution du stock est constituée d'une série de "séquences" c'est-à-dire de périodes pendant lesquelles le stock est différent de 0, séparées par des époques de stock nul. Si le stock s'annule la probabilité que le stock reste nul pendant le temps t est égale à la probabilité que le poste 1 reste arrêté pendant t; en vertu de la non influence des conditions passées sur l'évolution du système (hypothèse de l'aléatoire total des arrêts et des marches) cette probabilité est régie par la même loi que la probabilité de durée d'arrêt du poste. Sa durée moyenne est donc v.

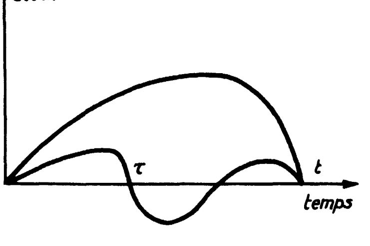
Si L est la durée moyenne d'une séquence, le % du temps pendant lequel le stock sera nul et le poste 2 arrêté sera donc :

$$R = \frac{v}{L + v} \quad (I)$$

Il reste à calculer L

Si l'on désigne par H (t) dt la probabilité qu'une séquence ayant commencé à l'instant 0 revienne à 0 entre t et t + dt, on voit que L = espérance mathématique de $t = \int_0^\infty tH(t)\,dt$. H (t) que nous allons maintenant calculer est la probabilité que le stock parti de 0 revienne à 0 à l'instant t sans avoir jamais franchi l'axe des x avant t ( ).





On peut donc écrire :

H (t) = probabilité de tous les chemins arrivant à t sans avoir traversé l'axe des x

(1) Pour simplifier le langage, on parlera de probabilité alors qu'il s'agit en fait de densité de probabilité.

= probabilités de tous les chemins conduisant de 0 à t (traversant ou ne traversant pas l'axe des x), moins somme des probabilités des chemins ayant traversé l'axe des x à τ multipliées par la probabilité des chemins allant de τ à t de n'importe quelle façon

soit $$H(t) = P(t) - \int_0^\infty H(t)\, Q(t-\tau)\,dt$$

où P (t) = probabilité partant de 0 d'atteindre t de toutes les façons possibles
Q $(t-\tau)$ = " " "τ " t " " " "

Si l'on considère les transformées de Laplace des fonctions H, P, Q l'équation intégrale ci-dessus devient :

soit : $$\mathcal{L}H = \mathcal{L}P - (\mathcal{L}H) \times (\mathcal{L}Q)$$

d'où $$\boxed{\mathcal{L}H = \frac{\mathcal{L}P}{1+\mathcal{L}Q}} \qquad \text{(II)}$$

Connaissant P et Q, donc $\mathcal{L}P$ et $\mathcal{L}Q$, on peut calculer $\mathcal{L}H$ par une opération très simple.

Il reste à calculer $\int_0^\infty t\,H(t)\,dt$ à partir de $\mathcal{L}H$.

On remarquera que $\int_0^\infty t\,H(t)\,dt = \lim_{p\to 0} \int_0^\infty e^{-p\tau}\, t\,H(dt) = \lim_{p\to 0} \mathcal{L}\,t\,H(t)$

Or d'après une formule classique $\mathcal{L}\,t\,H = \frac{-d\,\mathcal{L}H}{dp}$

d'où $$\boxed{L = -\operatorname*{limite}_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left(\frac{\mathcal{L}P}{1+\mathcal{L}Q}\right)} \qquad \text{(III)}$$

Il reste à calculer P, Q et leurs transformées.

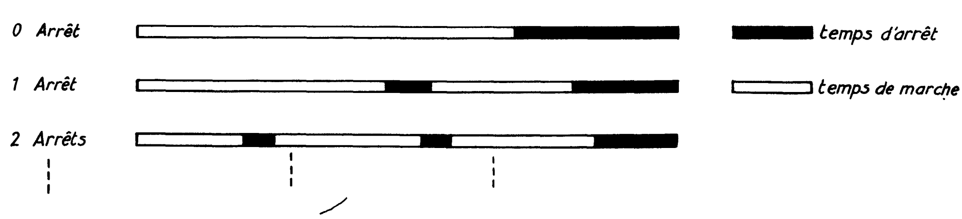
Calcul de P

P (t) est la probabilité que le stock parte de 0 à l'instant 0 et soit nul à l'instant t.

Si a est le temps total d'arrêt du poste entre 0 et t, on doit donc avoir $(k_1 - k_2)(t-a) - k_2 a = 0$ (surcroit de production lorsque le poste marche = absorption du stock lorsque le poste est arrêté).

d'où $$a = \frac{(k_1 - k_2)\,t}{k_1}$$

Il reste à écrire que le poste 1 étant en marche à l'instant 0, il est arrêté à l'instant t (afin de traverser l'axe des x) et qu'entre 0 et t, il y a eu m mise en marche pendant la période totale d'arrêt et m arrêt pendant la période totale de marche, m prenant toutes les valeurs de 0 à l'infini.



Utilisant la loi de Poisson qui donne la probabilité pour que x évènements aléatoires surviennent dans une période donnée on obtient ainsi :

$$P(t) = \frac{k_2}{e\,k_1}\, e^{-At}\left[\ 1 + \frac{Bt^2}{(1!)^2} + \frac{B^2 t^4}{(2!)^2} + \ldots\ldots + \frac{B^n t^{2n}}{(n!)^2} + \ldots\ldots)\ \right] \qquad \text{(IV)}$$

Si l'on appelle Σ la série entre crochets, on voit que

$$\Sigma = J_0 (2 \text{ it } \sqrt{B})$$

Jo représentant la fonction de Bessel d'ordre 0

sa transformée de La place est $\mathcal{L}\,\Sigma = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4B}}$

(On pourrait retrouver cette valeur en dérivant convenablement Σ et en cherchant l'équation différentielle à laquelle satisfait Σ ce qui donne une équation différentielle à laquelle doit satisfaire sa transformée).

Pour obtenir $\mathcal{L}\,P$, il suffit de rappeler que si $\mathcal{L}\, g(t) = f(p)$

$$\mathcal{L}\, e^{-at} \, g(t) = f(p + a)$$

D'où

$$\boxed{\mathcal{L}\, P = \frac{k_2}{\ell k_1} \frac{1}{\sqrt{(p + A)^2 - 4B}}} \quad (V)$$

Calcul de Q

En procédant comme pour P on obtient

$$Q(t) = B(t - \tau)\, e^{-A(t-\tau)} \left[1 + \frac{B (t - \tau)^2}{1!\,2!} + \ldots\ldots + \frac{B^p (t - \tau)^{2p}}{p!\,(p+1)!} + \ldots\ldots \right]$$

On remarque que la série entre crochets =

$$\frac{1}{2B(t - \tau)} \frac{d}{d(t - \tau)} \Sigma (t - \tau)$$

d'où

$$Q(t) = \frac{1}{2} e^{-A(t-\tau)} \frac{d}{d(t - \tau)} \Sigma (t - \tau)$$

d'où

$$\boxed{Q = \frac{1}{2} \left[- Q(O) + \frac{p + A}{\sqrt{(p + A)^2 - 4B}} \right]} \quad (VI)$$

On a évidemment $Q(O) = 1$

On en déduit (formules II, V et VI)

$$\mathcal{L}\, H(t) = \frac{k_2}{\ell k_1} \frac{p + A - \sqrt{(p + A)^2 - 4B}}{2B}$$

et d'après formules (III) et (I)

$$R = \frac{k_2 v - (k_1 - k_2) 1}{k_2 (\ell + v)}$$

d'où % de marche du poste 2 : $Q = 1 - R$

$$\boxed{Q = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{1 + \frac{v}{\ell}}}$$

On vérifie sur cette formule que pour $k_1 \leqslant k_2$ tout se passe bien comme si les 2 postes étaient strictement en chaine (conclusion déjà rencontrée au début du §).

On remarquera que si $k_2 (v + \ell) - k_1 \ell$ est négatif ou nul, le pourcentage du temps pendant lequel le stock est nul, est négatif ou nul. On verra par la suite que cela entraine l'existence d'un stock infini; il faudra donc s'imposer la condition

$$\boxed{\frac{k_2}{k_1} > \frac{1}{1 + \frac{v}{\ell}}}$$

La simplicité de ces résultats peut sembler remarquable; elle s'explique en fait aisément si l'on considère que l'égalité des flux de production des postes 1 et 2 doit être vérifiée sous peine d'arriver rapidement à un stock infini.

Cette égalité permet de calculer directement Q; en effet, la production du premier poste par unité de temps est en moyenne $k_1 \frac{1}{1+\frac{v}{\ell}}$; celle du deuxième poste est d'après la définition même de Q : k Q; l'égalité des flux donne $Q = \frac{k_1}{k_2} \frac{1}{1+\frac{v}{\ell}}$

Il faut en outre que Q soit inférieur à 1 d'où l'inégalité :

$$\frac{k_2}{k_1} > \frac{1}{1+\frac{v}{\ell}}$$

S'il est ainsi possible d'obtenir si simplement ce résultats, on peut alors se demande quel est l'intérêt de cette étude.

a) On doit d'abord remarquer que l'équation de flux ne donne aucune indication **Sur l'évolution du stock en probabilité**. La méthode globale permettrait de calculer cette évolution ; utilisant ce raisonnement suivi pour le calcul de H (t), on écrirait que la probabilité f (t, s) qu'une séquence arrive à s à l'instant t est égale à la probabilité d'y arriver de toutes les manières possibles moins la probabilité d'y arriver en ayant traversé l'axe des x pour la première fois à l'instant τ avec $0 < \tau < t - \frac{s}{k}$. La première fonction de probabilité se calcule comme la fonction P (t) déjà rencontrée; la seconde est une intégrale définie où figure la fonction H (t) connue et une fonction qui se calcule comme Q $(t - \tau)$. En intégrant f (t, s) par rapport à t de 0 à l'infini, on aurait ainsi la probabilité $\bar{f}$ (s) que le stock soit en moyenne égal à s.

Mais la méthode différentielle - infra - donnant ce résultat beaucoup plus rapidement, les calculs n'ont pas été reproduits.

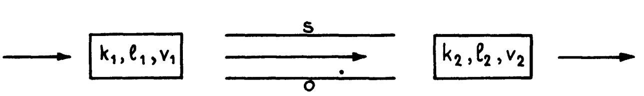
En outre, dès qu'il y a stock maximum imposé, la méthode des flux parait inutilisable; il faut alors avoir recours aux méthodes analytiques exposées.

2 - Approche différentielle

La méthode précédente, bien que logique d'apparence, s'étant révélée longue et complexe pour un résultat remarquablement simple, a conduit à chercher une autre approche plus rapide.

On utilisera le fait que **l'évolution du stock entre deux postes suit un processus markovien simple et stationnaire** (l'ergodicité est évidente ; on peut la démontrer cependant rigoureusement).

Considérons 2 postes de coefficients k_1 k_2 ℓ_1 ℓ_2 v_1 v_2; soit S le stock intermédiaire maximum (S peut être ∞ : il n'y a alors pas de limitation imposée)



On peut caractériser le système à un instant t :

- par la valeur du stock à l'instant t
- par la situation des postes à cet instant (en marche ou en panne)

Soit f_1 (t, s) ds, f_2 (t, s) ds, f_3 (t, s) ds et f_4 (t, s) ds, les probabilités qu'à l'instant t, le stock soit compris entre s et s + ds :

le poste 1 étant	en marche et	le poste 2	en panne	pour f_1
"	en marche et	"	en marche	" f_2
"	en panne et	"	en marche	" f_3
"	en panne et	"	en panne	" f_4

On doit exprimer que si se réalise à t + dt, l'évènement stock = s + k_1 ds, poste 1 marche, 2 arrêté).

1°) C'est qu'à l'instant t avait lieu l'évènement (stock = s, poste 1 marche, 2 arrêté) et que entre t et t + dt, aucune modification n'est intervenue sur les postes.

2°) Ou bien que à t les postes 1 et 2 étaient arrêtés mais que entre t et t + dt, le poste 1 s'est remis en marche.

3°) Ou que à t, les 2 postes étaient en marche mais qu'entre t et t + dt, le poste 2 s'est arrêté.

Mathématiquement cette équation prend la forme :

$$f_1 (t + dt,\ s + k_1\, dt) = f_1 (t,\ s) \left[1 - \frac{dt}{\ell_1} - \frac{dt}{v_2} \right] + f_4 \frac{dt}{v_1} + f_2 \frac{dt}{\ell_2}$$

ou

$$\frac{df_1}{dt} + k_1 \frac{df_1}{ds} = - f_1 \frac{\ell_1 + v_2}{\ell_1 v_2} + \frac{f_4}{v_1} + \frac{f}{\ell_2}$$

En outre du fait que la chaine est stationnaire on peut écrire : $\frac{df_1}{d\,t} = 0$; f_1 f_2 f_3 et f_4 peuvent donc être considérées comme fonctions du stock s, définies par le système différentiel suivant (on procède pour f_2, f_3 et f_4 comme pour f_1) :

$$\boxed{\begin{aligned}
k_1 \frac{d\,f_1}{d\,s} &= - f_1 \frac{\ell_1 + v_2}{\ell_1 v_2} + \frac{f_4}{v_1} + \frac{f_2}{\ell_2} \\
(k_1 - k_2) \frac{df_2}{d\,s} &= - f_2 \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 \ell_2} + \frac{f_1}{v_2} + \frac{f_3}{v_1} \\
- k_2 \frac{df_3}{d\,s} &= - f_3 \frac{v_1 + \ell_2}{\ell_2 v_1} + \frac{f_2}{\ell_1} + \frac{f_4}{v_2} \\
0 &= - f_4 \frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} + \frac{f_1}{\ell_1} + \frac{f_3}{\ell_2}
\end{aligned}}$$

Étude de ce systéme

C'est un système d'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants sans second membre.

Ce système est aisément réductible à un système de deux équations à coefficients constants sans second membre.

En effet une **intégrale première** du système est :

$$k_1 f_1 + (k_1 - k_2) f_2 - k_2 f_3 = \text{constante} = C$$

en outre la **constante est nulle** dans tous les cas.

1°) S'il n'y a pas de stock limite S imposé, il faut en effet que pour $s = \infty$

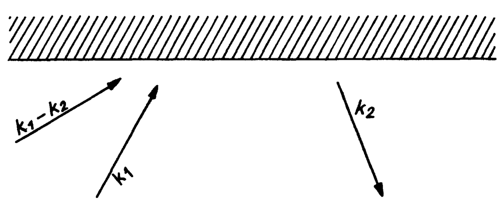
$$f_1,\ f_2,\ f_3 \text{ et } f_4 \rightarrow 0 \text{ d'où } C = 0$$

2°) S'il y a un stock maximum S imposé : si $k_1 > k_2$, le stock peut atteindre la barrière supérieure S les 2 postes étant en marche, ou le 1er en marche et le second arrêté; le stock ne peut quitter la barrière que le 1er arrêté, le 2ème en marche.

La probabilité d'arriver sur la barrière est égale donc :

à $k_1 f_1 (S) + (k_1 - k_2) f_2 (S)$

La probabilité d'en partir est égale à $k_2 f_3 (S)$



On peut écrire que la probabilité de rester sur la barrière indéfiniment est nulle (tous les états du système sont récurrents) ou en d'autres termes que la probabilité d'arriver sur la barrière est égale à la probabilité d'en sortir :

$$\text{donc } k_1 f_1 (S) + (k_1 - k_2) f_2 (S) = k_2 f_3 (S)$$

$$\text{d'où } C = 0$$

Si $k_1 < k_2$ on aurait de même sur la barrière 0

$$k_1 f_1 (0) + (k_1 - k_2) f_2 (0) = k_2 f_3 (0)$$

d'où $C = 0$

Détermination des constantes

La solution de ce système de 2 équations dépendra donc de 2 constantes.

La première constante sera déterminée sur la barrière qui n'a pas été utilisée pour démontrer que $C = 0$ en écrivant de même que la probabilité d'y pénétrer = la probabilité d'en ressortir. La seconde constante sera calculée en écrivant que la somme des probabilités de tous les états est égale à 1.

Détermination des probabilités des différents états sur les barrières

La probabilité d'être sur une barrière donnée à l'instant s'obtient par un raisonnement différentiel analogue au raisonnement suivi pour l'établissement des équations différentielles générales du système.

Exemple : $k_1 > k_2$

On pose :

probabilité d'être sur la barrière supérieure les 2 postes en marche = φ_2 (S)
" " " " poste 1 en marche, 2 arrêté = φ_1(S)

on a : $$\varphi_2(t + dt) = \varphi_2(t) \left(1 - \frac{dt}{\ell_1} - \frac{dt}{\ell_2}\right) + \varphi_1 \frac{dt}{v_2} + (k_1 - k_2) f_2 \, dt$$

d'où $$\varphi_2 \frac{\ell_1 + \ell_2}{\ell_1 \ell_2} = \frac{\varphi_1}{v_2} + (k_1 - k_2) f_2$$

de même $$\frac{\varphi_1}{v_2} = \frac{\varphi_2}{\ell_2} + k_1 f_1 \quad \text{et} \quad \frac{\varphi_2}{\ell_1} = k_2 f_3$$

(On vérifie que les 3 équations donnent $k_1 f_1 + (k_1 - k_2) f_2 - k_2 f_3 = 0$ et donc que $C = 0$)

Deux de ces équations donnent φ_1 et φ_2 en fonction de f_1, f_2 et f_3 déjà calculés.

CONCLUSION: Détermination des temps de fonctionnement de chaque poste:

C'est la somme des probabilités des états où le poste considéré est en marche.

Exemple : cas précédent

% du temps de marche du poste 2 = $\int_0^s [f_2 (s) + f_3 (s)] d s + \varphi_2 (S)$

3 - Applications diverses de l'approche différentielle

Le calcul des fonctions f_1, f_2 ... dans le cas général est possible mais n'a pas d'intérêt général.

Seuls trois cas ont été étudiés d'une façon approfondie.

a) Cas déjà analysé dans l'approche globale

En ce cas on a : $\ell_1 = \ell$ $v_1 = v$ $\ell_2 = \infty$ $v_2 = 0$

Le système d'équations différentielles se réduit à :

$$(k_1 - k_2) f'_1 = - \frac{f_1}{\ell} + \frac{f_2}{v}$$

$$- k_2 f'_2 = - \frac{f_2}{v} + \frac{f_1}{\ell}$$

d'où $(k_1 - k_2)f_1 = k_2 f_2 + c$ mais sur $s = 0$, $(k_1 - k_2) f_1 = k_2 f_2$ d'où $C = 0$ donc $k_1 f_1 = k_2 f_2$

$$\left\{\begin{array}{l} f_1 = \dfrac{k_2 v - (k_1 - k_2)\ell}{k_2 v (k_1 - k_2)\ (v + \ell)},\ \ell^{-ms} \qquad \text{avec } m = \dfrac{k_2 v - (k_1 - k_2)\ \ell}{k_2\ v \ell\ (k_1 - k_2)} \\ f_2 = \dfrac{k_2\ v - (k_1 - k_2) \ell}{k_2^2\ v(v + \ell)}\ \ell^{-ms} \\ \varphi_2(0) = v\ k_2\ f_2\ (0) \end{array}\right.$$

On en déduit que le % de marche du poste 2, Q, est :

$$Q = 1 - \varphi_2\ (0) = \frac{k_1}{k_2}\ \frac{1}{1 + \frac{v}{\ell}}$$

formule déjà rencontrée par l'approche globale.

Applications possibles de ces résultats

Les résultats précédents pourraient s'appliquer au fonctionnement d'une chaine stricte ou d'un atelier, chargés d'alimenter en pièces une demande pratiquement ininterrompue.

Si le stock de pièces finies est nul; il se produit un arrêt de la fraction aval de l'usine, à une telle éventualité correspond une perte de production. Soit P (R) la fonction qui exprime cette perte en fonction du % R de temps d'arrêt.

Soit, d'autre part, C (s) la dépense correspondant à un volume de stockage donné s.

On demande quelle doit être la cadence de production qui assure la dépense totale minimum - stockage + perte de production.

D'après les formules précédentes, le coût du stockage est en moyenne égal à :

$$C = \int_0^\infty C\ (s)\ \left[f_1 + f_2 \right] ds = \frac{k_2 v - (k_1 - k_2)\ell}{k_2\ v(k_1 - k_2)(v + \ell)} \left(1 + \frac{k_1 - k_2}{k_2} \right) \int_0^\infty \ell^{-ms}\ C\ (s)\ ds$$

La perte due aux annulations du stock est égale à

$$P(R) = P\left(\frac{k_2\ v - (k_1 - k_2)\ 1}{k_2\ (1 + v)} \right)$$

La perte totale est égale à P + C

Pour minimiser cette perte, il faut que $\dfrac{\partial\ P}{\partial\ k_1} + \dfrac{\partial\ C}{\partial\ k_1} = 0$

Utilisant les expressions de P et C ci-dessus et les portant après dérivation dans l'équation précédente, on obtiendra une équation en k_1 qui déterminera la valeur optimum de cette cadence.

b) Postes identiques avec le stock maximum; détermination du stock optimum

On a $\ell_1 = \ell_2 = \ell$; $v_1 = v_2 = v$; $k_1 = k_2 = k$

Les relations différentielles sont considérablement simplifiées.

On trouve immédiatement :

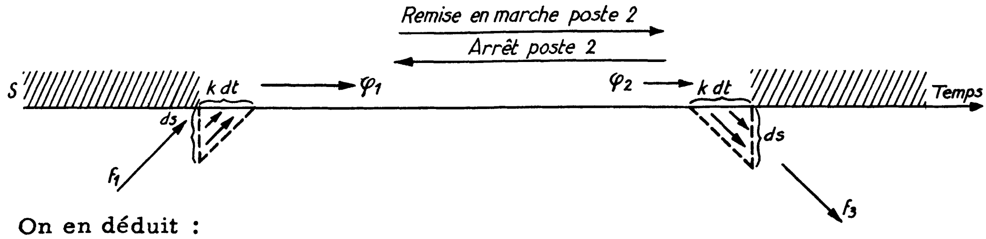
$f_1 = f_3 =$ constante a

$f_2 = a \dfrac{\ell}{v}\ \ f_4 = a \dfrac{v}{\ell}$

Détermination des probabilités 1 et 2 sur les barrières

On rappelle que sur la barrière S, φ_1 est la probabilité d'être sur la barrière, le poste 1 étant en état de marche (mais arrêté du fait de la barrière) et le poste 2 en panne; φ_2 est la probabilité d'être sur cette barrière, ces deux postes étant en marche.

L'enchainement de ces probabilités est figuré sur le schéma suivant :



On en déduit :

$$\varphi_1(t + dt) = \varphi_1(t)\left[1 - \frac{dt}{v}\right] + k\, f_1\, dt$$

$$\varphi_2(t + dt) = \varphi_2(t)\left[1 - dt\left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{\ell}\right)\right] + \frac{\varphi_1}{v}\, dt$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t)\left[1 - \frac{2\, dt}{\ell}\right] + \frac{\varphi_2}{\ell}\, dt + k\, f_3\, dt$$

On vérifie que $kf_1 = kf_3$

et on obtient $2\,\dfrac{\varphi_2}{\ell} = kf_1 = ka$

$$\frac{\varphi_1}{v} = kf_1 = a$$

Par symétrie, ces valeurs restent les mêmes sur la barrière $s = 0$, en changeant simplement la signification de φ_1, (poste 1 en panne, poste 2 arrêté mais en état de marche).

On obtient alors la valeur de la constante a en écrivant :

$$\int_0^S (f_1 + f_2 + f_3 + f_4)\,ds + \varphi_1(S) + \varphi_2(S) + \varphi_1(0) + \varphi_2(0) = 1$$

d'où

$$a = \frac{1}{S\left(2 + \frac{v}{\ell} + \frac{\ell}{v}\right) + k\,(\ell + 2v)}$$

D'autre part, la probabilité de marche de la 2ème machine est égale à :

$$Q = \int_0^S (f_2 + f_3)\,ds + \varphi_2(S) + \varphi_2(0)$$

d'où finalement

$$\boxed{Q = \frac{S\,(1 + \frac{\ell}{v}) + \ell k}{S\,(2 + \frac{\ell}{v} + \frac{v}{\ell}) + k\,(\ell + 2v)}}$$

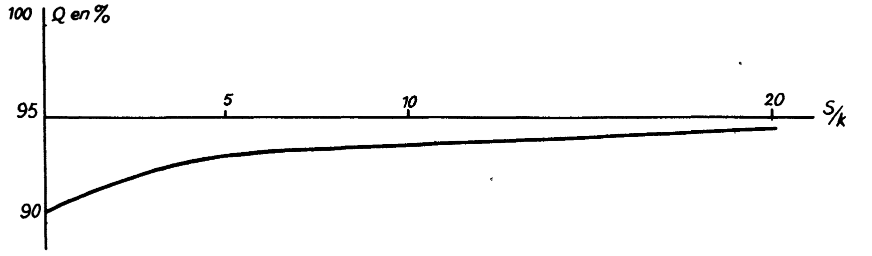
Applications = - pour $S = 0$ les deux postes sont alors strictement en chaine; on retrouve bien $Q = \dfrac{1}{1 + 2\frac{v}{\ell}}$ conformément aux résultats de la première partie.

- Si l'on reprend l'exemple de la 1ère partie de postes dont le temps moyen d'arrêt est de 5 minutes et le temps moyen de marche de 100 minutes, tels donc que le poste soit en moyenne arrêté 5% du temps.

pour $s = 0$	$Q \sim 90\%$
$s = k$ (stock maximum égal à 1 minute de marche)	$Q \sim 91{,}6\%$
$s = 5\,k$ (" 5 minutes ")	$Q \sim 93\%$
$s = 10\,k$ (" 10 minutes ")	$Q \sim 94\%$
$s = \infty$	$q \sim 95\%$

Dans la première partie, on avait dans de semblables conditions évalué à 5% le gain de production entre la chaine stricte et les deux postes marchant isolément.

On voit par le calcul précédent que pour S = 10 minutes de production le gain n'est pas 5% mais 4%, donc plus faible et ceci du fait que la notion de poste isolé n'est pas physiquement réalisable.



Mais la **différence entre les deux résultats est faible et pour des aires de stockage suffisament importantes, on peut donc considérer l'estimation de la 1e partie comme industriellement satisfaisante.**

Calcul du stock optimum

A partir des formules précédentes, il est possible de déterminer l'aire de stockage économique optimum entre deux postes.

Appelons $\frac{h}{100}$ le gain réalisé dans l'année si l'on accroit la production de 1% en moyenne dans l'année, et a la dépense supplémentaire imputable à l'augmentation de l'aire de stockage qui sera nécessaire pour obtenir ce gain.

Le bénéfice d'une augmentation de production dQ correspondant à une augmentation de stockage dS sera donc

$$\frac{h}{100} \times 100\, dQ - a\, dS$$

L'optimum du stockage sera obtenu pour une valeur de S telle que l'expression précédente s'annule

soit
$$\frac{dQ}{dS} = \frac{a}{h}$$

Or
$$\frac{dQ}{dS} = \frac{\ell + v}{\left[S\left(2 + \frac{\ell}{v} + \frac{v}{l}\right) + k\,(\ell + 2v)\right]^2}$$

D'où le stockage optimum est défini par

$$S\left(2 + \frac{v}{\ell} + \frac{\ell}{v}\right) + k\,(\ell + 2\,v) = \pm\sqrt{\frac{h}{a}(\ell + v)}$$

Du fait que le premier membre est positif, la racine négative n'a aucune signification. La racine positive - dont on voit aisément qu'elle représente bien un optimum en considérant la courbe Q (S) - donne :

$$S \text{ optimum} = \frac{\sqrt{\frac{h}{a}(\ell + v)} - k\,(\ell + 2\,v)}{2 + \frac{v}{\ell} + \frac{\ell}{v}}$$

On remarque que cette aire n'existe que pour :

$$\sqrt{\frac{h}{a}(\ell + v)} > k\,(\ell + 2\,v)$$

Donc pour les valeurs de ℓ, v, k telles que

$$\boxed{k^2\,\frac{(\ell + 2v)^2}{\ell + v} \geqslant \frac{h}{a}}$$

on a intérêt à mettre les postes strictement en chaine sans stock intermédiaire.

Application ;

Soit 2 n postes identiques de paramètres individuels ℓ_0, v_0, k. On se demande s'il faut les grouper en chaine stricte ou en 2 éléments de chaine stricte séparés par un stock.

Le gain de production h dépend ici du nombre de postes 2 n.

On peut donc écrire h = nho.

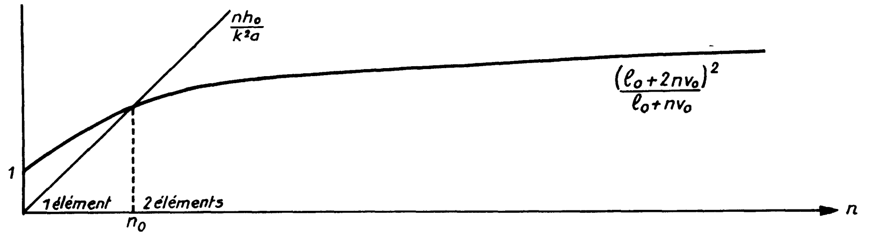
Le temps moyen de marche d'un élément de chaine de n postes sera $\frac{\ell o}{n}$

D'après la formule précédente, on aura intérêt à laisser les postes tous en chaine stricte si

$$k^2 \frac{\left(\frac{\ell o}{n} + 2\, v_o\right)^2}{\frac{\ell o}{n} + vo} \geqslant \frac{n\, h_o}{a}$$

ou

$$\frac{(\ell o + 2\, n\, vo)^2}{\ell o + n\, vo} \geqslant \frac{n\, h_o}{k^2 a}$$



c) Cadences et durées d'arrêt identiques; durées de marche différentes

Ce cas se rencontre pratiquement lorsqu'on groupe des postes identiques en deux éléments de chaine stricte séparés par un stock mais tels que le nombre de postes dans chaque élément ne soit pas le même si bien que les durées moyennes de marche sont différentes.

On peut montrer que l'on a au contraire intérêt, en général, à équilibrer ces deux éléments pour qu'ils soient identiques.

Les calculs étant très longs ne seront pas reproduits.

On calcule Q (ℓ_1, ℓ_2) et on montre qu'en faisant

$$\ell_1 = \ell + \varepsilon\ , \quad \ell_2 = \ell - \varepsilon$$

on a aux termes du 2ème ordre près

$$Q\ (\ell + \varepsilon\ ,\ \ell - \varepsilon\ ) = Q\ (\ell, \ell) \text{ pour } \varepsilon \text{ petit}$$

ce qui exprime que la situation $\ell_1 = \ell_2$ est un point stationnaire pour la fonction Q, donc en général un optimum (le calcul des termes du 2ème ordre n'ayant pas été effectué en raison de leur longueur, on ne peut affirmer que c'est à coup sûr un optimum et non un minimum, mais intuitivement, ceci parait vraisemblable).

CHAINE QUELCONQUE

SOLUTION APPROCHÉE

On peut chercher à calculer le rendement d'une chaine comprenant un nombre quelconque de postes à partir des résultats de la deuxième partie.

Considérons, en effet, un ensemble quelconque formé par exemple des postes i, i + 1 et du stock si qui les sépare.

On peut considérer cet élément comme une chaine de deux postes et effectuer tous les calculs précédents en incluant dans la probabilité de panne du poste i, non seulement sa probabilité de panne propre, mais aussi la probabilité qu'il soit arrêté par une panne survenue en amont sur la chaine, et en appliquant un raisonnement symétrique pour le poste i + 1

a $\longrightarrow S_{i-1}$ $\boxed{i}$ Si $\boxed{i+1}$ $S_{i+1} \longrightarrow$

Calcul

En fait, le seul cas praticable est celui où tous les postes ont même cadence instantanée et même durée moyenne d'arrêt.

Soit $\varphi\,(O_{i-1})$ la probabilité que le poste i soit arrêté par panne de la fraction amont de la chaine; c'est également la probabilité que le stock si - 1 soit nul, le poste i - 1 étant arrêté; pour l'élément de chaine composé des postes i, i - 1 et du stock si - 1, c'est la fonction $\varphi\,(0)$ rencontré comme probabilité sur la barrière 0 dans la deuxième partie de l'étude.

Soit ℓ' le temps moyen qui sépare deux annulations successives du stock si - 1 et v le temps moyen d'arrêt de chaque machine

On a immédiatement $\varphi\,(0_{i-1}) = \dfrac{v}{v + \ell'}$

d'où
$$\ell' = \frac{v\,(1-\varphi)}{\varphi}$$

Si l'on admet que le phénomène d'annulation du stock est aléatoire, la probabilité qu'il s'annule entre t et t + dt est égale à :

$$\frac{dt}{\ell'} = \frac{\varphi\,dt}{v\,(1-\varphi)}$$

La probabilité totale d'arrêt du poste i entre t et t + dt est donc : probabilité d'arrêt propre + probabilité d'arrêt par annulation du stock s_{i-1} =

$$\left[\frac{1}{\ell i} + \frac{\varphi\;(0_{i-1})}{v\,[1-\varphi(0_{i-1})]}\right] dt$$

De même, si $\varphi\;(S_{i+1})$ est la probabilité que le stock S soit maximum et stoppe le fonctionnement du poste i + 1, la probabilité d'arrêt du poste i + 1 est égale à :

$$\left[\frac{1}{\ell_{i+1}} + \frac{\varphi\;(S_{i+1})}{v\,[1-\varphi\;(S_{i+1})]}\right] dt$$

Il suffit de remplacer les ℓ_1 et ℓ_2 de la deuxième partie par les formules ci-dessus pour calculer toutes les probabilités afférentes à cet élément de chaine.

Certes, $\varphi\;(0_{i-1})$ et $\varphi\;(S_{i+1})$ sont des inconnues, mais on peut exprimer par les méthodes de la deuxième partie $\varphi\;(0_i)$ et $\varphi\;(S_i)$ en fonction de ces deux inconnues et **établira autant de relation entre ces valeurs φ qu'il en figure dans la chaine; ce qui suffit a les déterminer.**

Lorsqu'il n'y a pas de barrière supérieure - pas de stockage maximum imposé - ces relations deviennent **récurrentes :** il suffit de calculer les φ de proche en proche en partant des deux premiers postes et en descendant la chaine.

Cette méthode n'est cependant pas rigoureuse

En effet, en généralisant de la sorte les résultats de la deuxième partie, on suppose implicitement qu'un arrêt par annulation de stock - ou saturation de l'aire de stockage disponible - est totalement aléatoire, or il n'en est rien.

Considérons par exemple les stocks S_i et S_{i+1}, leurs valeurs à un instant donné dépendent de l'histoire des évènements qui se sont produits dans le passé sur le poste i , donc, **la probabilité d'arrêt du poste i par annulation du stock S_{i-1} dépend stockastiquement de la valeur prise par le stock S_i** ; et cette liaison n'apparait aucunement dans le schéma ci-dessus.

Celui-ci conserve une valeur pratique dans la mesure où cette liaison peut être considérée comme négligeable, c'est-à-dire lorsque les évènements survenus sur les postes i-1 et i+1 affectent suffisamment l'évolution des stocks si-1 et si+1 pour que la fraction de leur histoire commune, celle qui intéresse le poste i, ne soit plus prépondérante. En particulier, si les annulations de stocks ne sont pas trop fréquentes par rapport aux pannes machines, les évolutions des stocks s_{i-1} et si deviennent relativement indépendantes, presque ergodiques l'une par rapport à l'autre.

Si l'on veut cependant serrer de plus près le problème, on est conduit au schéma suivant qui est plus exact, mais qui a l'inconvénient d'être quasiment impraticable par le calcul.

SOLUTION THÉORIQUE GÉNÉRALE

Pour tenir compte de cette corrélation, on est conduit à associer à chaque état de la chaine - et non plus aux états de chaque élément de chaine - une fonction de probabilité.

Un état est défini par la situation des postes - en panne ou en marche - et la valeur des stocks correspondants. Pour une chaine de n postes et n-1 stocks, on peut donc décrire le système par un peu plus de 2 n fonctions de n-1 variables; à titre d'exemple, pour trois postes et deux stocks sans plafond imposé, l'étude du système exige l'introduction de 18 fonctions dont 8 sont des fonctions à deux variables (stocks s_1 et s_2), 8 à une variable et deux des constantes. A ces 18 fonctions, correspondent 18 relations différentielles qui suffisent à les déterminer, ainsi qu'on le verra par la suite.

Il faut cependant noter d'emblée que la complexité d'un tel système le rend rapidement impraticable. Avec la méthode précédente, on n'aurait eu que deux relations entre les inconnues $\varphi(0_1)$ et $\varphi(S_2)$ dont la résolution aurait suffi à déterminer le système.

On rencontre ici une difficulté analogue à celle à laquelle se heurte la généralisation de la théorie des files d'attente au problème de la conduite à plusieurs machines de cycles différents; la description exacte du modèle oblige à introduire rapidement un nombre très élevé de fonctions et conduit à des calculs impraticables.

La démonstration suivante a donc pour seul but d'indiquer les limites de possibilités du calcul, tout au moins dans l'état actuel des recherches, et de conduire à chercher d'autres solutions, telle, par exemple, la simulation.

Soit x_i, un paramètre qui prend la valeur 0 si le poste i est en panne, et 1 s'il est en état de marche.

On peut décrire un état de la chaine par une suite $x_1, x_2 \dots x_n, s_1, s_2 \dots s_{n-1}$. A cet état, on peut associer une densité de probabilité $x_1, x_2 \dots x_n (s_1, s_2 \dots s_{n-1})$, fonction des n variables $s_1, s_2 \dots s_{n-1}$.

Entre ces diverses fonctions, on peut écrire des relations de passage analogues à celles utilisées pour les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_n de la deuxième partie.

Considérons par exemple une fonction f pour laquelle les stocks $s_1 \dots s_n$ sont hors des barrières.

On a :

$$f\, x_1 \ldots x_n \left[t+dt;\ s_1 + (x_1k_1 - x_2k_2)dt,\ \ldots\ s_{n-1} + (x_{n-1}\,k_{n-1} - x_n\,k_n)dt \right]$$

$$= f\, x_1 \ldots x_n \left[t,\ s_1 \ldots s_{n-1} \right] \left(1 - \sum_j \left[\frac{x_j}{\ell_j} + \frac{1 - x_j}{v_j} \right] dt \right)$$

$$+ \sum_j f x_1, \ldots 1 - x_j, \ldots x_{n-1} \left(\frac{1 - x_j}{\ell_j} + \frac{x_j}{v_j} \right) dt$$

soit :

$$\boxed{\sum_j (x_j\, k_j - x_{j+1}\, k_{j+1}) \frac{\partial f_{x_1 \ldots x_n}}{\partial s_j} = - f\, x_1 \ldots x_n \sum_j \left(\frac{x_j}{\ell_j} + \frac{1 - x_j}{v_j} \right) + \sum_j f x_1, \ldots, 1 - x_j, \ldots x_n \left(\frac{1 - x_j}{\ell_j} + \frac{x_j}{v_j} \right)}$$

Cette relation générale lie toutes les fonctions de probabilité f décrivant le système lorsque aucun des stocks n'est sur les barrières.

Il faudrait considérer d'autres fonctions à n-2, n-3 ... variables décrivant le système lorsque 1, 2 ... stocks sont sur une barrière. Les relations sont similaires à la différence près qu'intervient la probabilité d'occurrence de l'évènement : arrivée ou départ d'un stock sur la barrière considérée; l'expression de cet évènement a déjà été résolue dans la deuxième partie et sa généralisation ne présente aucune difficulté.

Mis a part le nombre considérable de fonctions introduites, ce système est impraticable dans le cas général du fait de l'introduction de dérivées partielles.

Dans le cas où il n'y a pas de stockage maximum imposé, il est possible cependant de ramener ce système à un ensemble d'équations linéaires par une transformation de Laplace à n dimensions.

En effet, on a

$$\sqsubset_{p_1 \cdots p_{n-1}} \frac{\partial f}{\partial s_j} = - p_j \sqsubset_{p_1 \cdots p_{n-1}} f \;-\; \sqsubset_{p_1 \cdots p_{j-1}, p_{j+1} \cdots p_{n-1}} f\,(s_1 \ldots s_{j-1}, o, s_{j+1}, \ldots s_{n-1})$$

L'équation générale précédente (I) peut dont être transformée en une équation linéaire par rapport aux transformées des fonctions f, en introduisant en paramètre la transformée à n dimensions des valeurs prises par les fonctions f sur les barrières 0 (le dernier terme de l'égalité précédente).

Mais multipliée par $(x_j\, k_j - x_{j+1}\, k_{j+1})$, cette dernière valeur n'est autre que la probabilité d'entrée ou de sortie de la barrière 0; elle intervient donc dans les équations écrites entre les situations pour lesquelles un stock est sur une barrière, et ainsi de suite.

En somme, les valeurs aux limites du système différentiel (I), que fait apparaitre la transformation de Laplace, sont reliées par un deuxième système d'équations différentielles qui, transformé, fait apparaitre ses valeurs aux limites, qui transformées, etc ...

On est ainsi conduit à un ensemble d'équations linéaires par rapport aux transformées des fonctions f; le déterminant du système est d'ailleurs nul et l'indétermination est levée par l'équation égalant à 1 la somme des probabilités.

Il est donc théoriquement possible d'en déduire toutes les transformées des fonctions f, et en particulier, en annulant les paramètres de Laplace d'obtenir toutes les probabilités $\iiint f\, ds_1 \ldots ds_n$ correspondant à un état donné de l'ensemble des postes (méthode déjà utilisée dans la deuxième partie).

CONCLUSION

Par delà la théorie complexe explicitée dans cette étude, il faut voir qu'en pratique les analyses s'avèreront plus simples.

Ou bien l'un des ensembles de la chaîne lâche aura une cadence moyenne de production très inférieure à celle des autres ensembles et la production de la chaîne s'alignera sur ce goulot d'étranglement ; car, en amont de ce goulot, les stockages seront le plus souvent pleins et en aval le plus souvent vides ; et les arrêts survenus sur les autres ensembles n'affecteront pour ainsi dire jamais l'ensemble formant goulot d'étranglement.

Ou bien tous les ensembles de la chaîne lâche auront même cadence moyenne, la chaîne sera bien "équilibrée" et l'on pourra appliquer pratiquement les résultats obtenus par deux ensembles identiques (deuxième partie ; deuxième application).

Il sera possible alors de calculer rapidement les aires de stockage intermédiaires qui "isolent" suffisamment deux ensembles successifs l'un de l'autre (pourcentage d'annulation ou de saturation du stock virtuellement nul).

Dans ces conditions, la production moyenne de la chaîne sera celle d'un des éléments que l'on calculera avec les formules simples de la première partie.

En conclusion, on peut considérer que la chaîne idéale doit être ainsi formée d'ensembles "équilibrés", séparés par des aires de stockage convenables ; et **tout le problème revient, en définitive, à déterminer en fonction des coûts économiques, la longueur optimum de ces éléments, celle qui rend optimum le bilan établi entre les avantages techniques de la chaîne stricte et la perte de production qu'elle entraine.**