REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

M. DUMAS

Choix et détermination pratique d'intervalles de confiance

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 3 (1955), p. 85-101
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_3_85_0>

CHOIX ET DÉTERMINATION PRATIQUE D'INTERVALLES DE CONFIANCE

par

M. DUMAS
Ingénieur de l'Artillerie Navale (R)

La présente note était déjà rédigée lorsque nous avons eu connaissance de la remarquable « Note sur la construction d'intervalles de confiance pour la proportion de défectueux d'un lot à partir d'échantillons d'effectif peu élevé » par Mme C. Cassignol (Revue de Statistique appliquée, 1954, n° 3).

Cette dernière note distingue l'un de l'autre, plus nettement que cela avait été fait antérieurement (et même dans des cas où il ne s'agit pas de la proportion de défectueux), deux types d'intervalles de confiance : le type N (intervalles au sens de Neyman) et le type F. (On se rendra compte aisément que notre note se rapporte à des intervalles du type F.)

Notre note, comme le § 2 de celle de Mme Cassignol, se borne aux cas qui se traitent à l'aide de la loi binomiale; Mme C. Cassignol envisage l'une et l'autre des deux précisions dites plus loin « plus extraordinaire » et « autant et plus extraordinaire »; notre note complète donc celle de Mme C. Cassignol puisqu'elle discute les avantages qu'il peut y avoir à adopter certaines précisions autres que celles-ci. Sans doute l'adoption de précisions telles que ces dernières présenterait-elle de l'intérêt, même dans le cas d'intervalles de confiance du type N. De toute façon, il n'y a aucune opposition entre les deux notes. Il y a cependant ceci: que les tables publiées ou annoncées par Mme C. Cassignol auraient besoin d'une adaptation pour être utilisables dans le cas des « précisions » que nous préconisons; à vrai dire, nous préconisons aussi l'emploi de formules d'usage très simple pour la détermination des limites d'un intervalle de confiance (formules des racines d'une équation du 2e degré, ce qui permet pratiquement d'éviter un recours à quelque table que ce soit).

1. - LES INTERVALLES DE CONFIANCE

Soit le cas où un essai répond de l'une ou de l'autre de deux façons : nous dirons qu'il répond par blanc ou par noir. Une épreuve de N essais a donné n blancs et N - n noirs. La proportion des blancs dans la population-mère, dont l'effectif est supposé infini est, très naturellement, estimée à n/N, sauf, éventuellement, le cas où des connaissances a priori autres que celles de l'épreuve sont prises en considération.

Reste à préciser la confiance que l'on est en droit d'accorder à l'estimation retenue ; dans le cadre d'un **seuil de probabilité** s (inférieur à 1/2) on le fait au moyen de deux proportions p_s et p_{1-s} encadrant l'estimation ($p_s < n/N < p_{1-s}$) et reliées à s d'une façon jugée adéquate.

L'intervalle (p_s ; p_{1-s}) est un **intervalle de confiance.**

Toutes les fois que cela est possible, les relations donnant p_s et p_{1-s} doivent être demandées à des considérations de probabilités à postériori;à défaut, il est de pratique courante de procéder ainsi qu'il suit :

- p_s est pris assez petit par rapport à n/N pour que si p_s était l'exacte proportion des blancs dans la population-mère, le résultat de l'épreuve, résumé par la proportion n/N, apparaisse comme extraordinairement grand.

- p_{1-s} est pris assez grand par rapport à n/N pour que si p_{1-s} était l'exacte proportion des blancs dans la population-mère, le résultat de l'épreuve, résumé par la proportion n/N, apparaisse comme extraordinairement faible.

Plus précisément, p_s est choisi tel que s'il était l'exacte proportion, la probabilité d'un résultat plus extraordinaire que celui constaté, serait égal à s ; de même pour p_{1-s}.

A vrai dire, les auteurs paraissent hésiter sur le point de savoir si dans les deux précisions qui précèdent, il convient d'écrire **plus extraordinaire** ou bien **autant et plus extraordinaire ;** d'autres auteurs adoptent une précision mixte, tenant de l'une et de l'autre de celles envisagées ; d'autres enfin mettent en avant d'autres précisions. Dans quelle mesure les uns et les autres ont-ils raison ? Nous en arrivons là au but de notre note.

Remarquons, pour n'avoir pas à y revenir, que l'hésitation n'est possible que dans le cas où l'intervalle de confiance est déterminé à l'aide d'une loi de probabilité qui, à l'opposé des lois continues comme les lois de Laplace, est discrète, comme les lois binomiales.

2. - BUTS DE LA NOTE

Notre premier but, en établissant cette note est d'indiquer et de discuter quelques règles conduisant à des intervalles de confiance, pour finalement en proposer une de préférence aux autres.

Un second but est de détailler quelques modes de calculs conduisant à des valeurs, au moins approchées, de p_s et de p_{1-s}, tandis que trop souvent l'on n'a à sa disposition que quelques abaques dont le mode d'établissement est à peine esquissé.

Nous nous proposons enfin d'aborder deux points sur lesquels les auteurs pour la plupart, sont muets, malgré les importances de premier plan que ces points présentent respectivement. Il s'agit, en l'occurrence du cas où tous les essais conduisent à une seule et même couleur [cas $n\,(N - n) = 0$] ; il s'agit aussi du cas des tirages exhaustifs, c'est-à-dire du cas où l'on veut tenir compte de ce que chaque tirage tend à épuiser la population-mère; c'est-à-dire enfin du cas où cette population-mère n'est pas d'effectif infini. Comme c'est là le **seul** cas de la pratique, n'avons-nous pas raison de le présenter comme important ? Sans doute les différences d'un cas à l'autre ne sont-elles pas toujours considérables mais qu'y a-t-il de préférable : éviter quelques calculs -ceux qui conduisent à déterminer ces différences - ou éviter des essais ? La réponse n'est pas douteuse.

3. - REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES DU PROBLÈME DES INTERVALLES DE CONFIANCE

a - Le problème des intervalles de confiance se représente graphiquement à l'aide du **diagramme en bâtons** des lois binomiales ; on sait qu'un tel diagramme lorsqu'il est relatif à la loi définie par les paramètres p et N, est obtenu à partir d'un axe portant toutes les valeurs entières de 0 à N ; on mène, pour chacune de ces valeurs un bâton perpendiculaire à l'axe et de longueur proportionnelle à la probabilité de cette valeur déduite de la loi binomiale considérée.

Ainsi, la figure (1) représente deux diagrammes en bâtons correspondant à une même valeur N ; pour le diagramme supérieur (inférieur) la valeur p est nettement supérieure (inférieure) à n/N, proportion qui résume le résultat d'épreuve à interpréter.

Soit s la valeur donnée d'un seuil de probalité.

Si la valeur de p correspondant au diagramme supérieur est telle que la somme des probabilités (la somme des longueurs des bâtons) pour, respectivement, les valeurs 0,1,2,.... et n - 1 est égale à s, c'est que cette valeur de p est précisément égale à celle à prendre pour p_{1-s} au cas où la convention faite est celle "plus extraordinaire" qui a été envisagée au paragraphe 1.

Si l'on traçait le diagramme en bâtons correspondant à une valeur de p légèrement supérieure à la précédente et telle, cette fois, que ce soit la somme des probabilités pour les valeurs 0,1,2,.... n - 1 et n qui soit égale à s, alors, cette

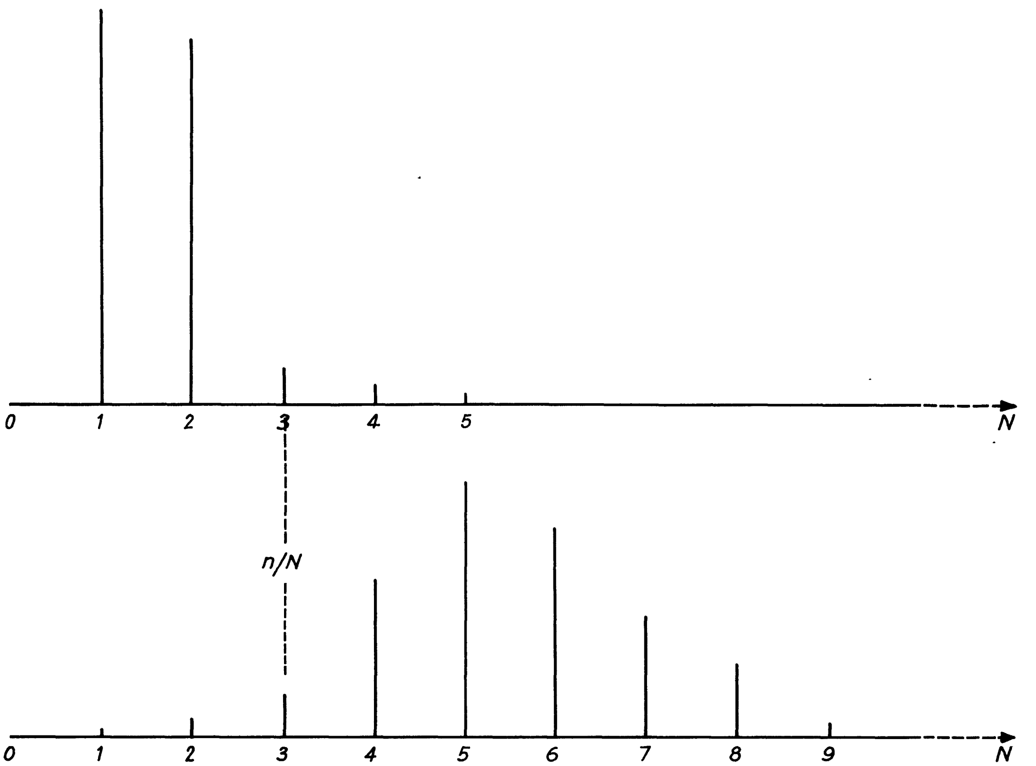

Fig. 1

nouvelle valeur serait égale à celle à prendre pour p_{1-s} au cas où la convention faite serait celle "autant et plus extraordinaire" qui a été envisagée au paragraphe 1.

Soit p' la valeur correspondant au diagramme inférieur de la figure 1.

Dans le cadre de la convention "plus extraordinaire" on prend $p_s = p'$ si la somme des probabilités pour n + 1, n + 2; .... et N est égale à s ; dans le cadre de la convention "autant et plus extraordinaire", on prend $p_s = p'$ si c'est la somme des probabilités pour n, n + 1, n + 2 .... et N qui est égale à s.

b - Il arrive souvent que, pour des facilités de calcul l'on remplace le diagramme en bâtons d'une loi binomiale par la courbe des densités d'une loi continue : cette dernière loi constitue une bonne approximation de la loi binomiale si l'aire limitée par la courbe, par l'axe des n et par les droites d'abscisses respectives m - 1/2 et m + 1/2 s'exprime, à très peu près, par le même nombre, pour toutes valeurs de m, que la longueur du bâton correspondant à m.

La figure 2 correspond à la figure 1 à la fois par ses parties supérieure et inférieure.

4. - NOTATIONS ET CALCULS - CONVENTIONS LES PLUS COURANTES

a - Nous convenons pour la suite de désigner par p'_s (n,N) et p'_{1-s} (n,N) - ou plus simplement par p'_s et p'_{1-s} - les valeurs correspondant à la convention "plus extraordinaire" ; ainsi, les valeurs correspondant à la convention "autant et plus extraordinaire" sont respectivement : p'_s (n-1,N) et p'_{1-s} (n+1,N).

Pour N donné, p'_s et p'_{1-s} sont des fonctions croissantes de n, du moins tant que n n'est ni nul ni égal à N (pour ces cas, voir le n°8); il s'ensuit que la convention "autant et plus extraordinaire" conduit à des valeurs de p_s et p_{1-s} comprenant à leur intérieur les valeurs qui leur correspondent respectivement dans le cadre de la convention "plus extraordinaire".

Les valeurs à prendre pour $p'_{1-s}(n, N)$ et pour $p'_s(n, N)$ sont respectivement les racines des équations suivantes :

(4.1) $$\sum_{x=0}^{n-1} \frac{N!}{x!(N-x)!} p'^{x}_{1-s} (1 - p'_{1-s})^{N-x} = s$$

(4.2) $$\sum_{x=n+1}^{N} \frac{N!}{x!(N-x)!} p'^{x}_{s} (1 - p'_{s})^{N-x} = s$$

A moins d'agir par tâtonnements (ce qui est pratiquement impossible) on peut recourir à l'une des règles suivantes :

Règle 4 A

Cette règle ne comporte pas d'approximation, mais elle est utilisable seulement lorsqu'on dispose des tables de la fonction $F(\nu_1, \nu_2)$ servant au test de SNEDECOR, ou, du moins, de celle de ces tables correspondant à la valeur de s que l'on considère ; on sait que cette table se présente sous la forme d'une table à double entrée, en fonction des "degrés de liberté" ν_1 et ν_2.

(4.3) Prendre $\nu_1 = 2n$ et $\nu_2 = 2(N - n + 1)$; lire F_1 sur la table ; alors :

(4.4) $$p'_{1-s}(n,N) = \frac{n F_1}{N - n + 1 + n F_1}$$

(4.5) Prendre $\nu_1 = 2(N - n)$ et $\nu_2 = 2(n + 1)$; lire F_2 sur la table, alors :

(4.6) $$p'_s(n,N) = \frac{n + 1}{n + 1 + (N - n) F_2}$$

EXEMPLE I : s = 0,05 ; N = 10 ; n = 3.

En regard de $\nu_1 = 2 \times 3 = 6$ et de $\nu_2 = 2(10 - 3 + 1) = 16$, on lit $F_1 = 2{,}74$;

d'où : $$p'_{0,95}(3,10) = \frac{3 \times 2{,}74}{8 + 3 \times 2{,}74} = 0{,}501$$

En regard de $\nu_1 = 2(10 - 3) = 14$ et de $\nu_2 = 2(3 + 1) = 8$, on lit $F_2 = 3{,}21$;

d'où : $$p'_{0,05}(3,10) = \frac{4}{4 + 7 \times 3{,}21} = 0{,}151$$

Règle 4 B

Assimiler les deux courbes de la figure 2 respectivement à deux lois ayant pour espérances mathématiques des valeurs inconnues, encadrant n/N, mais voisines de n/N : c'est là un prétexte que l'on saisit pour estimer les écarts-types de ces lois à une seule et même valeur, à savoir :

$$\sqrt{\frac{n}{N^2}\left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

qui est la valeur de l'écart-type de la loi binomiale d'espérance mathématique précisément égale à n/N.

Posant :

(4.7) $$s = \int_{-\infty}^{-K(s)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad ,$$

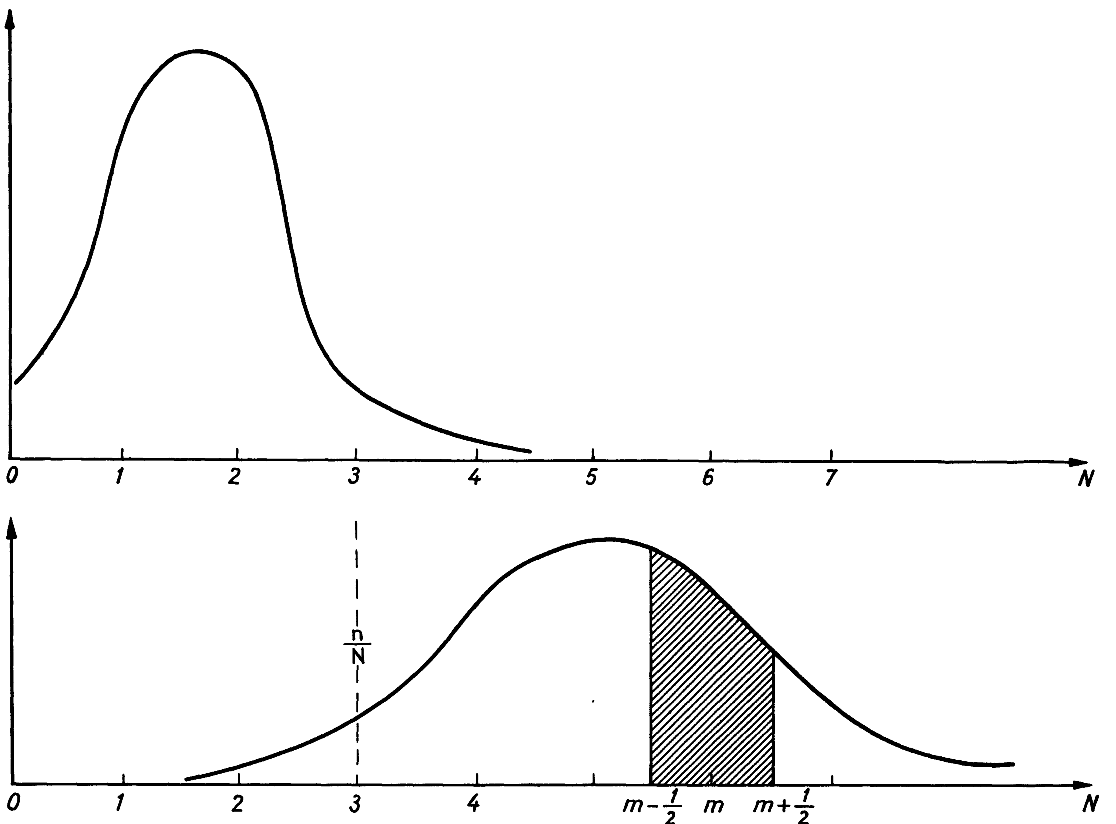

Fig.2

ce qui définit la fonction K (s) - numériquement, consulter la figure 3 ou en cas de besoin, une table de la loi de Laplace, réduite - prendre :

(4.8)
$$\left.\begin{matrix} p_s \\ p_{1-s} \end{matrix}\right\} \simeq \frac{n}{N} \pm K(s)\sqrt{\frac{n}{N^2}\left(1-\frac{n}{N}\right)}$$

Il s'agit là d'une approximation fréquemment utilisée - nous pensons que c'est celle qui est à la base de nombreux abaques en cause au n° 2 - mais elle risque d'être tellement grossière, notamment lorsque N n'est pas très grand, que nous ne jugeons pas utile de chercher à distinguer à quelle convention ("plus extraordinaire", "autant et plus extraordinaire"...) les valeurs p_s et p_{1-s} correspondent au moins mal.

EXEMPLE 2 : s = 0,05 ; N = 10 ; n = 3 comme pour l'exemple 1.

La relation (4.7) donne K (0,05) = 1,645, puis (4.8) donne :

$$\left.\begin{matrix} p_{0,05} \\ p_{0,95} \end{matrix}\right\} \simeq \frac{3}{10} \pm 1,645\sqrt{\frac{3}{100}\times\frac{7}{10}} = 0,300 + 0,238 = \left\{\begin{matrix} 0,062 \\ 0,538 \end{matrix}\right.$$

Règle 4 C

Assimiler, comme pour la règle 4.B les deux courbes de la figure 2 respectivement à deux lois de Laplace, ayant pour espérances mathématiques des valeurs inconnues, encadrant n/N ; mais, pour serrer la réalité de plus près (1) que pour la règle 4.B, prendre pour écarts-types de ces lois les valeurs correspondant

(1) Comme l'a indiqué MILLOT (1925) : Théorie Nouvelle de la Probabilité des causes (Gauthier-Villars, Editeur).

exactement, dans le cas des lois binomiales, aux valeurs inconnues p_s et p_{1-s}; en conséquence, prendre pour p_s et p_{1-s} les racines de l'équation du second degré en p :

$$(4.9) \qquad (p\,N - n)^2 = K^2(s)\left[N\,p\,(1-p)\right]$$

d'où :

$$(4.10) \qquad \left.\begin{matrix} p_s \\ p_{1-s} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+K^2}\left[n + \frac{K^2}{2} \mp K\sqrt{\frac{K^2}{4} + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\right]$$

La figure 3 donne explicitement ces solutions pour différentes valeurs de K.

N.B.1 - Si l'on veut plus précisément obtenir des valeurs approchées des fonctions p'_s (n, N) et p'_{1-s} (n, N) c'est-à-dire si l'on veut marquer que p'_s correspond à **plus** de n blancs et que p'_{1-s} correspond à **moins** de n blancs il faut **retoucher** les expressions (4.10) d'après les suivantes :

$$(4.11) \qquad p'_s \simeq \frac{1}{N+K^2}\left[n + \frac{1}{2} + \frac{K^2}{2} - K\sqrt{\frac{K^2}{4} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{n+\frac{1}{2}}{N}\right)}\right]$$

$$(4.12) \qquad p'_{1-s} \simeq \frac{1}{N+K^2}\left[n - \frac{1}{2} + \frac{K^2}{2} + K\sqrt{\frac{K^2}{4} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{n-\frac{1}{2}}{N}\right)}\right]$$

N.B.2. - Une réserve est à faire sur la validité de (4.9) et de ses conséquences : d'après l'énoncé lui-même de la règle, p_s n'a aucun sens si n = N tandis que p_{1-s} n'a aucun sens si n = 0; ce sont des cas examinés au n° 8.

EXEMPLE 3 : s = 0,05 ; N = 10 ; n = 3, comme pour les exemples 1 et 2.

K = 1,645 comme pour l'exemple 2 ; $K^2 = 2,706 \simeq 2,7$

D'après (4.10) :

$$\left.\begin{matrix} p_{0,05} \\ p_{0,95} \end{matrix}\right\} \simeq \frac{1}{12,7}\left[4,35 \pm 1,645\sqrt{0,67 + 3 \times 0,7}\right] = \left\{\begin{matrix} 0,128 \\ 0,558 \end{matrix}\right.$$

d'après (4.11) :

$$p'_{0,05} = \frac{1}{12,7}\left[4,85 - 1,645\sqrt{0,67 + 3,5 \times 0,65}\right] = 0,159$$

d'après (4.13)

$$p'_{0,95} = \frac{1}{12,7}\left[3,85 + 1,645\sqrt{0,67 + 2,5 \times 0,75}\right] = 0,510$$

b - Les trois conventions qui peuvent être considérées comme les plus courantes sont, avec la terminologie du n° 1 :

- convention "plus extraordinaire",
- convention "autant et plus extraordinaire",
- et enfin convention "mixte" d'après laquelle, d'une part, la convention "autant et plus extraordinaire" est admise par la limite inférieure de l'intervalle (à moins que ce soit par la limite supérieure) et d'autre part, la convention "plus extraordinaire" est admise par l'autre limite de l'intervalle.

Les limites correspondant à l'une ou à l'autre de ces conventions les plus courantes sont immédiatement évaluables à partir du moment ou l'on a choisi les expressions des fonctions p'_s et p'_{1-s}, éventuellement parmi celles du a) ci-dessus, auxquelles on se référera.

Racines de l'équation en *p* : Fig.3

$$(n - pN)^2 = Np(1-p)\left[\; K(s) \;\right]^2$$

$$\left.\begin{matrix} p_s \\ p_{1-s} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+K^2}\left[\; n + \frac{K^2}{2} \pm K\sqrt{\frac{K^2}{4} + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

En particulier :

s = 0,001

K = 3,090 ≃ 3

$$\left.\begin{matrix} p_{0,001} \\ p_{0,999} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+9,5}\left[\; n + 4,78 \pm 3,09\sqrt{2,39 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

$$\simeq \frac{1}{N+9}\left[\; n + 4,5 \pm 3\sqrt{2,25 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

s = 0,010

K = 2,326

$$\left.\begin{matrix} p_{0,010} \\ p_{0,990} \end{matrix}\right\} \frac{1}{N+5,4}\left[\; n + 2,7 \pm \sqrt{1,35 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

s = 0,025

K = 1,960 ≃ 2

$$\left.\begin{matrix} p_{0,025} \\ p_{0,975} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+3,8}\left[\; n + 1,92 \pm 1,96\sqrt{0,95 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

$$\simeq \frac{1}{N+4}\left[\; n + 2 \pm 2\sqrt{1 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

s = 0,050

K = 1,645

$$\left.\begin{matrix} p_{0,050} \\ p_{0,950} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+2,7}\left[\; n + 1,35 \pm 1,64\sqrt{0,67 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

s = 0,100

K = 1,282

$$\left.\begin{matrix} p_{0,100} \\ p_{0,900} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{N+1,6}\left[\; n + 0,83 \pm 1,28\sqrt{0,42 + n\left(1 - \frac{n}{N}\right)}\;\right]$$

5. - CONVENTION DE LA CONFIANCE MOYENNE

L'idée de la règle que nous proposons en 6 nous est venue à l'occasion de l'étude du mémoire du Dr H. C. HAMAKER : **« Average Confidence » Limits for binominal probabilities** publié par la Revue de l'Institut International de Statistique 1/2 p. 17/27 - 1953.

Le Dr HAMAKER délaisse la convention "mixte" (1) qu'il considère plus spécialement et propose une nouvelle convention, d'après laquelle p_s et p_{1-s} sont à prendre respectivement égaux aux moyennes arithmétiques qu'ils ont dans l'une et l'autre des conventions "plus extraordinaire" et "autant et plus extraordinaire".

Avec les notations du n° 4 la convention proposée par le Dr HAMAKER donne :

$$(5.1) \qquad p_s = \frac{1}{2}\left[p'_s\,(n-1,\,N) + p'_s\,(n,N)\right],$$

$$p_{1-s} = \frac{1}{2}\left[p'_{1-s}\,(n,N) + p'_{1-s}\,(n+1,\,N)\right]$$

Le Dr HAMAKER justifie sa proposition par une considération de **confiance moyenne** dont nous donnons ici une idée.

Plaçons-nous dans le cadre de la convention "autant et plus extraordinaire" et considérons la limite supérieure de l'intervalle de confiance ; pour N donné, il y a seulement N + 1 valeurs possibles de cette limite supérieure, à savoir les valeurs de $p'_{1-s}(n+1,\,N)$ pour n = 0, 1 ... N. Soit à tracer la courbe donnant, en fonction de la proportion effective des blancs, dans la population-mère (soit ϖ cette proportion) la probabilité que la convention considérée conduise, relativement à la limite supérieure, à une **erreur**; c'est la probabilité que la convention indique une limite supérieure qui soit inférieure à ϖ ; c'est aussi la probabilité que ϖ conduise à une valeur de n telle que le $p'_{1-s}(n+1,N)$ correspondant soit inférieur à ϖ . Or :

- Lorsque ϖ est précisément égal à l'une des valeurs possibles de $p'_{1-s}(n+1,N)$, soit à la valeur $\varpi_a = p'_{1-s}(n_a+1,N)$, la probabilité en cause est exactement égale à s.

- Lorsque ϖ est légèrement supérieur à ϖ_a, la probabilité d'avoir n blancs diminue, et la courbe à tracer est décroissante.

- Lorsque ϖ est légèrement inférieur à ϖ_a , il n'y a plus à craindre d'erreur, du fait que l'on aurait n_a blancs, mais il y a une erreur à craindre, du fait que l'on aurait **moins** de n_a blancs ; la courbe marque donc une discontinuité.

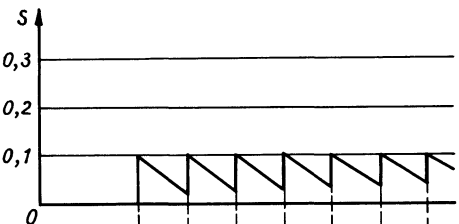

Fig.4

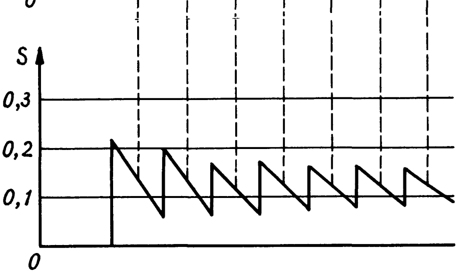

Fig. 5

(1) On se rend compte en effet que les courbes A et A' de la figure 4 du mémoire du Dr HAMAKER correspondent à ceci :

- Courbe A donnant p_k (limite supérieure de l'intervalle):convention "autant et plus extraordinaire" que k, ce qui englobe les valeurs O, 1, 2 . . etk.

- Courbe A' donnant p'_k (limite inférieure de l'intervalle): "plus extraordinaire" que k, ce qui englobe les valeurs k + 1, k + 2, ... et N.

On se rend compte, par ailleurs, que le Dr HAMAKER se place dans le cadre des intervalles de confiance du type N (Avant-propos de la présente note).

Finalement, la probabilité que la convention choisie conduise, relativement à la limite supérieure, à une **erreur**, est représentable en fonction de ϖ par une courbe en dents de scie, telle que celle de la figure 4 où s = 0,10

Le Dr HAMAKER estime que c'est faire preuve d'un rigorisme trop étroit que de caractériser par s la courbe de la figure 4 , sous prétexte qu'aucun de ses points ne dépasse s : elle mériterait d'être caractérisée par une valeur constituant une certaine moyenne des dents de scie, moyenne manifestement inférieure à s ; autrement dit, en gardant s inchangé, on est en droit d'adopter une règle dont la courbe en dents de scie en fonction de ϖ serait à cheval sur la droite d'ordonnée s, comme celle de la figure 5 (grossièrement tracée), où s est de l'ordre de 0,13.

Le Dr HAMAKER raisonne de même en ce qui concerne la limite inférieure de l'intervalle de confiance ; il établit qu'un moyen de satisfaire aux conditions dégagées par lui est de définir les limites par les formules (5.1).

EXEMPLE : s = 0,05 ; N = 10 ; n = 3. Les tables du Dr HAMAKER donnent :

$p_{0,05} = 0,118 \qquad p_{0,95} = 0,557$

6. - CONVENTION PROPOSÉE

La variété des conventions passées en revue plus haut peut jeter quelque trouble dans les esprits ; elle a du moins le mérite de bien faire apparaître qu'il n'est pas possible de parler avec précision d'un intervalle de confiance, dans le cadre d'une loi discrète, sans spécifier la convention lui correspondant. Sans doute, certaines conventions sont-elles préférables à d'autres. Peut-être même y a-t-il une convention qui s'impose de préférence à toute autre ; ce sont là des points qui sont examinés au n° 7 qui suit. Nous nous bornons dans le présent numéro à exposer une nouvelle convention (une de plus !) convention dont nous pensons qu'elle se place mieux que les autres de l'ensemble des points de vue du n° 7 et aussi convention donnant lieu à des calculs approchés, particulièrement simples.

Nous proposons la convention, pouvant être dite **« demi-autant et plus extra ordinaire »**, d'après laquelle la probabilité d'arrivée de n blancs contribue à la somme devant être égale à s **pour la moitié de sa valeur** (alors qu'elle contribue pour la totalité dans le cas de la convention "autant et plus extraordinaire" et qu'elle n'y contribue aucunement dans le cas de la convention "plus extraordinaire"). Ainsi, dans le cadre de la convention proposée, les limites de l'intervalle de confiance sont respectivement les racines des deux équations ci-après :

$$(6.1) \quad \frac{1}{2}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p_{1-s}^{n}\,(1-p_{1-s})^{N-n} + \sum_{x=0}^{n-1}\frac{N!}{x!\,(N-x)!}\,p_{1-s}^{x}\,(1-p_{1-s})^{N-x} = s$$

$$(6.2) \quad \frac{1}{2}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p_{s}^{n}\,(1-p_{s})^{N-n} + \sum_{x=n+1}^{N}\frac{N!}{x!\,(N-x)!}\,p_{s}^{x}\,(1-p_{s})^{N-x} = s$$

Pour trouver ces racines, du moins de façon approchée, on peut adopter respectivement, ainsi qu'il suit, les règles 4.A et 4.C.

Règle 6 A

(6.3) Prendre $\nu_1 = 2\,n + 1$ et $\nu_2 = 2\,(N - n) + 1$; lire F_3 sur la table définie à propos de la règle 4.A ; alors :

$$(6.4) \qquad p_{1-s} = \frac{(2\,n+1)\,F_3}{2\,(N-n)+1+(2n+1)\,F_3}$$

(6.5) Prendre $\nu_1 = 2(N - n) + 1$ et $\nu_2 = 2n + 1$; lire F_4 sur la même table ; alors :

(6.6)
$$p_s = \frac{2n+1}{2n+1+(2N-2n+1)F_4}$$

N.B. Manifestement, la valeur p_{1-s} ainsi obtenue est à l'intérieur de celles qui conduisent à retenir pour p_{1-s} les conventions "plus extraordinaire" et "autant et plus extraordinaire" ; de même pour p_s.

Ce fait, joint à la réciprocité établie au n° 7 (paragraphe b, 3°) justifie qu'il y ait effectivement correspondance entre (6.1) et (6.4), comme entre (6.2) et (6.6).

EXEMPLE 1 : $s = 0,05$; $N = 10$; $n = 3$ comme pour les exemples du n°4.

En regard de $\nu_1 = 7$ et de $\nu_2 = 15$, on lit $F_3 = 2,72$.

d'où :
$$p_{1-s} = \frac{7 \times 2,72}{15 + 7 \times 2,72} = 0,560$$

En regard de $\nu_1 = 15$ et de $\nu_2 = 7$, on lit : $F_4 = 3,45$.

d'où :
$$p_s = \frac{7}{7 + 15 \times 3,45} = 0,119$$

Règle 6 B

Prendre pour p_s et p_{1-s} l'une et l'autre des deux racines de l'équation (4.9), c'est-à-dire les valeurs (4.10).

N.B. Cette règle dont la justification est manifeste, ne comporte pas d'approximations autres que celles admises à propos de la règle 4.C, pour ce qui concerne les expressions **retouchées** (4.11) et (4.12) ; Elle conduit à des expressions particulièrement simples puisque le même radical intervient à la fois pour p_s et pour p_{1-s}.

EXEMPLE 2 : Voir dans l'exemple 3 du n° 4 les résultats d'après (4.10).
Voir dans la Fig.3 quelques expressions explicitées de (4.10).

7. - COMPARAISON DES CONVENTIONS

a) Comparaison relative de la "symétrie"

Une convention peut être dite **symétrique** lorsque les valeurs de p_s et p_{1-s} auxquelles elle conduit tiennent également compte de la probabilité correspondant à n.

Toute dissymétrie nous paraît illogique et de nature à faire considérer que la convention correspondante ne doit pas être retenue.

La convention mixte du n° 4 est essentiellement dissymétrique.

Les conventions "plus", "autant et plus", "demi-autant et plus" extraordinaire sont toutes symétriques. Sans doute la convention de la confiance moyenne du Dr HAMAKER ne répond-t-elle pas strictement à la définition de la symétrie donnée plus haut, mais sa symétrie d'ensemble est manifeste et on aurait mauvaise grâce à lui reprocher quoi que ce soit de ce point de vue.

b) Comparaison relative de la "réciprocité"

Une convention appliquée au résultat n blancs en N conduit pour la proportion des **blancs** aux limites p_s et p_{1-s} ; la même convention, appliquée au même résultat, mis sous la forme N-n noirs en N conduit, pour la proportion des **noirs** aux limites q_s et q_{1-s} ; nous disons que cette convention est **réciproque** si les relations suivantes sont satisfaites :

(7.1) $$p_s = 1 - q_{1-s} \qquad \text{et} \qquad p_{1-s} = 1 - q_s$$

Aucune convention non réciproque ne mérite d'être retenue. Or :

1° - La convention mixte est non réciproque.

2° - Les conventions "plus", "autant et plus", "demi-autant et plus" extraordinaire sont toutes réciproques, ainsi qu'on le voit par le raisonnement suivant, relatif, à titre d'exemple, à un cas de la convention "plus extraordinaire".

D'après (4.1) nous avons :

$$\sum_{x=0}^{N-n-1} \frac{N\,!}{x\,!\,(N-x)\,!}\, q_{1-s}^{x}\,(1 - q_{1-s})^{N-x} = s$$

Dans cette somme, le changement de variable $x = N - \xi$ donne :

$$\sum_{\xi=N}^{n+1} \frac{N\,!}{(N-\xi)\,!\,\xi\,!}\, q_{1-s}^{N-\xi}\,(1 - q_{1-s})^{\xi} = s$$

ce qui, rapproché de (4.2), montre que l'on a bien :

$$q_{1-s} = 1 - p'_s$$

3° - L'application de la règle 6.A conduit à des valeurs réciproques au sens où nous les entendons ici ; en effet, d'après cette règle et, plus particulièrement, d'après (6.3) et (6.4), on doit, pour avoir q_{1-s}, prendre : $\nu_1 = 2\,(N - n)+1$ et $\nu_2 = 2\,(N - N + n) + 1$; lire F_5 sur la table, puis :

$$q_{1-s} = \frac{\left[2\,(N - n) + 1\right]\, F_5}{2\,n + 1 + \left[2\,(N - n) + 1\right] F_5}$$

Or, les ν_1 et ν_2 étant les mêmes, F_5 est précisément égal à F_4 envisagé en (6.5); le rapprochement de (6.6) avec cette valeur de q_{1-s} montre que l'on a bien

$$p_s + q_{1-s} = 1$$

et établit par suite la proposition du N.B. de la règle 6.A.

4° - L'application de la règle 6.B conduit également à des valeurs réciproques, étant donné que d'après cette règle, les q_s et q_{1-s} sont, par application de (4.9), les racines de :

$$(qN - N + n)^2 = K^2 \left[\; Nq\,(1 - q)\;\right]$$

et que le changement dans cette équation de q en 1 - p redonne (4.9).

5° - La convention de la "confiance moyenne" est non réciproque. A vrai dire, il paraît s'en falloir de bien peu et, pour justifier notre affirmation, nous ne pouvons guère mettre en avant que quelques résultats comme ceux-ci, tirés des tables annexées au mémoire du Dr HAMAKER :

	$s = 0{,}01$; $N = 30$; $n = 10$:	$p_s = 0{,}163$;	$p_{1-s} = 0{,}544$
	$n = 20$:	$q_{1-s} = 0{,}836$;	$q_s = 0{,}455$
Totaux (au lieu de 1)	:	$0{,}999$;	$0{,}999$

c) Comparaison relative au cas; *s* voisin de 0,50

Un idéal, pour une convention, serait qu'elle fût valable, même à la limite pour $s = 0{,}50$ et qu'elle conduisît, pour p_s et p_{1-s} à une limite commune, à savoir l'estimation retenue; mais, d'une part, cet idéal a un caractère plus théorique que pratique et, d'autre part, cet idéal paraît ne pouvoir être atteint que si l'estimation de la proportion des blancs (estimation encadrée par la limite de confiance) était prise égale, non pas à l'espérance mathématique - soit n/N - de la loi binomiale à considérer mais à la valeur équiprobable de cette loi, - ce qui paraît peu souhaitable, du moins pour ce qui concerne la simplicité des expressions mises en jeu.

Quoi qu'il en soit, du point de vue considéré ici, une convention conduit, pour s voisin de 0,50, à des résultats que nous considérons comme admissibles tant que p_s reste inférieur à n/N et que p_{1-s} reste supérieur à n/N.

Nous pensons que l'examen d'un cas particulier, sans rien démontrer pour le cas général, peut cependant être intéressant ; soit comme cas particulier, $N = 2\,n$; l'estimation est $1/2$; on se rend compte de ce qui suit, valable pour $s = 1/2$:

- avec la convention "plus extraordinaire", p_{1-s} est **inférieur** à $1/2$ tandis que p_s est **supérieur** à $1/2$: ces résultats sont inadmissibles ;
- avec la convention "autant et plus extraordinaire", on a bien :

$$p_s < \frac{1}{2} < p_{1-s}$$

mais on peut reprocher à l'intervalle (p_s, p_{1-s}) de ne pas être nul ;

- avec la convention "demi-autant et plus extraordinaire", on a de façon parfaite :

$$p_s = \frac{1}{2} = p_{1-s}$$

La règle 6.A conduit de même à ce dernier résultat, car pour $s = 0{,}50$ et $\nu_1 = \nu_2$, la fonction F est égale à 1.

Comme K (0,50) = 0, les règles 4.C et 6.B conduisent pour $s = 0{,}50$ à $p_s = p_{1-s} = n/N$ même dans le cas où N n'est pas égal à 2 n.

d) Comparaison relative au cas où *s* voisin de 0

Un idéal pour une convention, serait qu'elle fût valable même à la limite pour $s = 0$ et qu'elle conduisît aux limites $p_0 = 0$ et $p_1 = 1$; cet idéal ne présente pas seulement un intérêt théorique puisque de très faibles valeurs de s (par exemple ; $s = 0{,}001$) sont parfois considérées.

Sous leurs formes rigoureuses respectives, les conventions "plus", "autant et plus", "demi-autant et plus" extraordinaire sont toutes conformes à cet idéal il en est de même pour leurs formes approchées données par (4.10) par (4.11), par (4.12) ou par des expressions analogues, car K (0) est infiniment grand ; par contre, la règle approchée 4.B est absolument à proscrire car elle conduit à des valeurs de p_s et de p_{1-s} infiniment grandes, l'une négative, l'autre positive.

8. - CAS PARTICULIERS n (N-n) = 0

a - Le cas n = N donnerait lieu à des remarques analogues à celles ci-dessous, relatives à n = 0.

A supposer que pour n = 0, il soit en tout point correct de parler d'un intervalle de confiance (nous ne le pensons pas, comme nous l'indiquons plus bas) on doit penser que la valeur $p_s = 0$ s'impose comme limite inférieure.

Voyons ce que les différentes conventions proposées donnent pour n = 0.

- la convention "plus extraordinaire" conduit à un p_s non nul (indication défavorable), et ne permet de déterminer aucune limite supérieure p_{1-s} puisque la probabilité d'arrivée d'un nombre de blancs plus petit que 0 est rigoureusement nulle (autre indication défavorable).

- la convention "autant et plus extraordinaire" ne conduit pas à $p_s = 0$ puisque si petit que soit p_s, la probabilité d'arrivée de 0 à N blancs est égale à 1. Elle conduit sans difficulté à une valeur de p_{1-s}.

- la convention "demi-autant et plus extraordinaire" conduit à un p_s non nul (indication défavorable) et sans difficulté, à un p_{1-s} admissible. Dans le cadre de cette convention, la règle 6.A s'applique sans difficulté; quant à la règle 6.B, elle conduit, comme le montre (4.10) à :

$$p_s = 0 \; ; \; p_{1-s} = \frac{K^2}{N + K^2}$$

c'est-à-dire, en particulier à une valeur approchée de p_s plus satisfaisante que la valeur déduite directement de la convention.

La convention de la confiance moyenne ne conduit, pour p_s à aucune valeur s'imposant ; le Dr HAMAKER a dû adopter pour n = 0 une sorte d'avenant applicable à la convention générale, ce qui n'est pas très satisfaisant en raison du caractère arbitraire de cet avenant.

b - Par ce qui précède, nous avons montré quelques difficultés rencontrées comme correspondant au cas n = 0. Nous pensons que, dans ce cas, on ne peut, en toute rigueur parler d'un intervalle de confiance ; on doit dire, après détermination d'une limite supérieure p_{1-s}, non pas "j'ai confiance que la proportion véritable ϖ est comprise entre 0 et p_{1-s}" (même si l'on ajoute "limites comprises", mais quelque chose comme :

"Si ϖ n'est pas nul, j'ai confiance que sa valeur est inférieure à p_{1-s}".

Cela est à rapprocher de certains résultats obtenus lorsque (n° 1 ci-dessus) la notion d'intervalle de confiance est rattachée à quelques considérations de probabilités a posteriori ; nous pensons en effet (1) que, lorsque tous les essais ont fait apparaître une même couleur, on ne peut affecter une probabilité précise à aucune des différentes compositions possibles de la population-mère.

9. - LE CAS D'UNE ÉPREUVE EXHAUSTIVE

a - Dans le cas d'une épreuve exhaustive pour l'interprétation du résultat de laquelle on désire tenir compte de ce qu'aucun élément essayé n'est réincorporé à l'ensemble, la quantité U, effectif de l'ensemble avant l'épreuve, est à considérer, et ce que l'on cherche, ce sont deux effectifs limites u_s et u_{1-s} entre lesquels, **limites comprises,** on peut avoir confiance, dans le cadre du seuil s, que se trouvait avant l'épreuve, l'effectif réel des blancs dans l'ensemble.

Soit, comme plus haut, n blancs et N essais, le résultat de l'épreuve, et soit p_s et p_{1-s} les limites correspondant au cas non exhaustif, compte tenu de la convention que l'on a retenue ; on conçoit aisément que l'intervalle (u_s ; u_{1-s}), limites comprises, d'une part, comprend n à son intérieur, et d'autre part est entièrement compris entre p_s U et p_{1-s}U.

(1) M. DUMAS : Interprétation de résultats de tirages exhaustifs - C.R. des Séances de l'Académie des Sciences - 14 Mars 1949.

La détermination directe, par tâtonnements, de u_s et de u_{1-s} n'offre pas d'autres difficultés que celle de la longueur, rebutante, des calculs à faire, à moins que l'on dispose de tables ad hoc (1). Cela montre l'intérêt qui s'attache à déterminer, au moins approximativement, les quantités $u_s - p_s U$ et $p_{1-s}U - u_{1-s}$ (c'est le début du paragraphe b ci-dessous), car alors la règle à suivre se réduit à celle-ci :

- Faire choix d'une convention et d'un seuil s puis déterminer, d'aprè les données les quantités p_s et p_{1-s} leur correspondant dans le sens non exhaustif (par exemple: 2 n° 6 ci-dessus).

- Déterminer par tâtonnements, au moyen de calculs exacts, quelles valeurs entières sont à retenir pour u_s et u_{1-s}, en prenant pour point de départ de ces opérations des valeurs entières encadrant juste les valeurs approchées précédemment déterminées (voir l'exemple ci-dessous).

b - Dans le cas exhaustif, l'équation (4.1) prise à titre d'exemple est remplacée par la suivante donnant u_{1-s}.

(9.1) $$\sum_{x=0}^{n-1} \frac{N\,!}{x\,!\,(N-x)\,!} \cdot \frac{(U-N)\,!}{U\,!} \cdot \frac{u\,!}{(u-x)\,!} \cdot \frac{(U-u)\,!}{(U-u-N+x)\,!} = s$$

Si $N + u - U$ est positif, la limite inférieure $x = 0$ est à remplacer par : $x = N + u - U$.

Le terme général de la somme figurant au premier membre est :

$$\frac{N\,!}{x\,!\,(N-x)\,!} \cdot \frac{u\,(u-1)\,\ldots\,(u-x+1)\,(U-u)\,(U-u-1)\,\ldots\ldots\,(U-u-N+x+1)}{U\,(U-1)\,\ldots\ldots\ldots\,(U-N+1)}$$

$$\simeq \frac{N!}{x\,!\,(N-x)\,!} \cdot \frac{\left(u - \frac{x-1}{2}\right)^x \left(U - u - \frac{N-x-1}{2}\right)^{N-x}}{\left(U - \frac{N-1}{2}\right)^N} \qquad (2)$$

$$= \frac{N\,!}{x\,!\,(N-x)\,!} \cdot \left[\frac{u - \frac{x-1}{2}}{U - \frac{N-1}{2}}\right]^x \left[1 - \frac{u - \frac{x}{2}}{U - \frac{N-1}{2}}\right]^{N-x}$$

$$\simeq \frac{N\,!}{x\,!\,(N-x)\,!}\,\rho^x (1-\rho)^{N-x}$$

avec

(9.2) $$\rho = \frac{u - \frac{x}{2}}{U - \frac{N-1}{2}}$$

Ainsi, le terme général, de rang $x + 1$, est approximativement égal à celui de la loi binomiale de paramètre N et ρ ; le fait que ρ dépende de x empêche de faire la sommation en regardant ρ comme constant, si ce n'est à titre de nouvelle approximation.

---

(1) Ainsi, les tables de M. EWEN, sans être directement utilisables évitent quelques calculs ; ces tables sont présentées au n° 137 de l'ouvrage de DUMAS et MAHEU : Les méthodes statistiques .... (Eyrolles, Editeur - 1951).

(2) Pour ces approximations, voir n°707 de DUMAS et MAHEU (Op.Cit.).

Admettons cette approximation : la solution de (9.1) transformée d'après ce qui précède est une valeur ρ_{1-s} qui, portée dans (9.2) donne :

$$u_{1-s} = \left(\frac{x}{2}\right)_{moyen} + \rho_{1-s}\left[U - \frac{N-1}{2}\right] = \rho_{1-s}\,U + \frac{1}{2}\left[x_{moyen} - \rho_{1-s}\,(N-1)\right]$$

La valeur à prendre pour x_{moyen} est un cas d'espèce ; cependant, on doit penser que ce x_{moyen} doit être voisin de celle des limites de la somme **qui n'est** pas **nulle** (ou - en cas de recherche de u_s - **qui n'est égale à N).** D'où finalement :

$$u_{1-s} \simeq \rho_{1-s}U - \frac{1}{2}(N\rho_{1-s} - n) \tag{9.3}$$

$$u_s \simeq \rho_s\,U + \frac{1}{2}(n - N\rho_s) \tag{9.4}$$

N.B Pour le calcul exact de u_s, la formule est identique à (9.1) sauf que la somme est à prendre de $x = n + 1$ à la plus petite des deux quantités N et u.

EXEMPLE : $s = 0{,}05$; $N = 10$; $n = 3$: $U = 20$.

Avec la "convention proposée", l'exemple 1 du n°6 donne :

$$\rho_{1-s} = 0{,}560 \qquad \rho_s = 0{,}119$$

d'où :

$$u_{1-s} \simeq 20 \times 0{,}560 - \frac{1}{2}(10 \times 0{,}560 - 3) = 9{,}9$$

$$u_s \simeq 20 \times 0{,}119 + \frac{1}{2}(3 - 10 \times 0{,}119) = 2{,}38 + 0{,}90 = 3{,}28$$

Cela incite à rechercher par calculs directs si l'intervalle de confiance (limites comprises) ne serait pas l'intervalle (4.9) au lieu de l'intervalle $(20 \times 0{,}119; 20 \times 0{,}560)$, c'est-à-dire (2,38 11,2) soit pratiquement (3 ; 11), auquel on serait conduit si l'on négligeait toute l'influence possible de l'exhaustivité. En fait, l'intervalle est en toute rigueur (3 ; 10) ainsi que le montrent des calculs tels que les suivants :

Pour $u = 10$, la formule (9.1) retouchée d'après (6.1) conduit, après avoir posé d'une façon générale :

$$y(x) = \frac{N!\,(U-N)!}{U!}\;\frac{u!}{x!\,(u-x)!}\;\frac{(U-u)!}{(N-x)!\,(U-u-N+x)!};$$

soit ici :

$$y(x) = \frac{10!\,10!}{20!}\;\frac{10!}{x!\,(10-x)!}\;\frac{10!}{(10-x)!}$$

à faire la somme :

$$\frac{1}{2}y(3) + y(2) + y(1) + y(0)$$

On trouve 0,0505 ; comme ce résultat est supérieur à $s = 0{,}05$ et, comme le résultat analogue qui aurait été obtenu avec $u = 11$ est nettement inférieur à 0,05 (il est égal à 0,0019), u_{1-s} doit bien être pris égal à 10.

Pour u = 3, la somme a effectuer se réduit à un terme ; à savoir :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10 ! \, 10 !}{20 !} \cdot \frac{3 !}{3 ! \, 7 !} \cdot \frac{17 !}{1 \times 10 !} = 0{,}053 > 0{,}05$$

10. - RÉSUMÉ ET CONCLUSIONS

a - On ne peut pas parler avec précision d'un intervalle de confiance sans spécifier la convention que l'on retient pour déterminer les limites de cet intervalle.

Dans le cadre d'une loi discrète, comme l'est la loi binomiale, bien des conventions peuvent être envisagées et notamment :

- Celles du n°4 caractérisées par les mots "plus extraordinaire", "autant et plus extraordinaire", ou "mixtes" qui sont classiques ;

- Celle du n°5 sur la "confiance moyenne", préconisée récemment par le Dr HAMAKER ;

- Celle du n°6 - nous la proposons - caractérisée par les mots "demi-autant et plus extraordinaire".

Mais **aucune** de ces conventions n'est **entièrement** satisfaisante de **tous** les points de vue examinés au n° 7 (symétrie, réciprocité, valeurs extrêmes du seuil s) ou au n° 8 (cas où le résultat d'épreuve est constitué uniquement de blancs ou uniquement de noirs). Nous estimons cependant que la convention préférable aux autres est celle du n°6.

b - Nous attirons l'attention sur une autre convention, à savoir celle d'après laquelle les proportions limitant un intervalle de confiance sont à déterminer comme étant les solutions de l'équation en p :

$$(4.9) \qquad (pN - n)^2 = K(s)^2 \left[Np(1 - p) \right]$$

explicitée au n°4 et faisant notamment l'objet de la figure 3

Cette convention a pour elle ceci :

- elle se prête à des calculs extrêmement simples ;

- elle conduit à des valeurs **entièrement** satisfaisantes de tous les points de vue examinés au n° 7 et au n° 8.

- elle constitue très directement une approximation de la convention du n°6, préférable à toutes les autres citées en a ; à ce titre, on peut avoir confiance que le risque couru est inférieur au seuil s, à condition de compter ce risque conformément à ce qu'évoquent les mots "demi-autant et plus extraordinaire".

- elle constitue une très bonne approximation de la convention de la "confiance moyenne" du Dr HAMAKER.

c - Tout cela vaut pour le cas non exhaustif, c'est-à-dire pour le cas idéal où la population-mère serait d'effectif infini ; mais l'adaptation au cas exhaustif, qui est le cas général, se fait simplement, dans les conditions du n° 9.

d - Le tableau ci-après résume les résultats de plusieurs exemples numériques; dans ce tableau :

- nous faisons état de la convention du b ci-dessus; même si l'on ne veut considérer cette convention que comme une approximation d'une autre donnant lieu à des définitions précises des risques encourus, nous n'hésitons pas à dire que cette approximation est largement suffisante dans tous les cas de la pratique, ne serait-ce que du fait de l'arbitraire qui préside à la fois au choix de la valeur s et au choix de la convention elle-même.

- nous faisons état du cas exhaustif (n° 9 ci-dessous), les valeurs marquées étant celles obtenues en divisant par N = 20 les valeurs décimales, d'ailleurs approximatives, de u_s et de u_{1-s}.

- nous avons souligné les valeurs correspondant sans aucune approximation à la convention faite.

Convention	p'_s	p'_{1-s}	Référence	Observations
"plus extraordinaire"	0,151	0,501	n° 4 Fn1	
	0,062	0,538	n° 4 Fn2	approximation suivant règle 4 B
	0,128	0,558	n° 4 Fn3	approximation suivant règle 4 C
"autant et plus extraordinaire"	0,088	0,618	n° 4	règle 4 A
"Confiance moyenne"	0,118	0,557	n° 5 Fn	
"$\frac{1}{2}$ autant et plus extraordinaire"	0,119	0,560	n° 6 Fn1	
(convention proposés)	0,128	0,558	n° 6 Fn2	approximation suivant règle 6 B
Convention du b ci-dessus	0,118	0,558	n° 6 Fn2	
Cas exhaustif N = 20 (convention proposée)	0,164	0,495	n° 9 Fn	

TABLE DES MATIÈRES