Revue de statistique appliquée

B. Cyffers

Irrégularité de remplissage dans le paquetage mécanique

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 2 (1955), p. 49-54

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_2_49_0>

IRRÉGULARITÉ DE REMPLISSAGE DANS LE PAQUETAGE MÉCANIQUE

par

B. CYFFERS

Ingénieur des Manufactures de l'Etat

Le paquetage automatique, réalisé dans de très nombreuses industries, conduit à constater, lors du contrôle — qu'il s'agisse d'un contrôle quantitatif ou d'un contrôle qualitatif — des irrégularités qui peuvent être soit des variations aléatoires indépendantes, soit des variations liées d'un paquet au suivant.

Il est donc intéressant d'étudier la distribution des observations faites : l'étude de cette distribution pourra faire apparaître l'existence éventuelle de cette probabilité de liaison et la nécessité d'en rechercher les causes sur lesquelles il serait possible d'agir.

Origine de l'étude

Le paquetage mécanique des Ninas (sur machine ROSE) présente quelques difficultés du fait que les cigarillos ne sont pas des cylindres parfaits. La descente des Ninas dans les organes de distribution ne se fait pas toujours régulièrement, et on observe de temps en temps soit des étuis incomplets, soit des étuis contenant un cigarillo sectionné.

La machine possède un dispositif de comptage électrique qui déclenche une sonnerie lorsque une Nina manque, et qui de plus agit sur un mécanisme,de telle sorte que l'étui correspondant sorte non fermé.

Cependant quelques étuis présentant des défauts de contenance (étuis incomplets, ou contenant des tronçons) échappent à la fois à ce dispositif et à la surveillance de l'ouvrière mécanicienne.

C'est pourquoi, chaque jour on procède au contrôle de la contenance des étuis d'un ou deux cartons. Un carton contient au total 800 étuis.

Nous avons examiné les résultats des contrôles effectués sur une de nos machines ROSE entre le 27 Avril et le 31 Décembre 1953 période que l'on peut considérer comme "homogène" pour la machine : même qualité de tabacs de cape, même équipe d'ouvrières.

La répartition des 245 cartons examinés durant cette période est la suivante :

Nombre d'étuis incomplets dans un carton	Nombre de cartons
0	136
1	49
2	35
3	13
4	5
5 et plus	7
	245

La probabilité de constater un étui incomplet dans un carton étant faible, on pouvait s'attendre à ce que les fréquences observées s'ajustent selon une loi de Poisson. Il n'en est rien : Calculons en effet les deux premiers moments :

Nombre moyen d'étuis incomplets par carton :

$$m_1 = 0{,}869\ 388$$

Moment centré du deuxième ordre :

$$\mu_2 = 1{,}533\ 961$$

La différence entre m_1 et μ_2 qui, dans le cas d'une loi de Poisson sont égaux, est déjà un indice de ce fait.

Pour préciser davantage les idées effectuons le test χ^2 : m_1 est l'estimation par le maximum de vraisemblance du paramètre m définissant la loi de Poisson (probabilité : $e^{-m} \frac{m^k}{k!}$ de constater k étuis incomplets dans un carton).

Avec cette valeur de m = 0,869 388, le test s'établit comme suit :

Nombre d'étuis incomplets par carton	Probabilité	Effectif calculé c	Effectif observé o	$\frac{(o-c)^2}{c}$
0	0.41921	102.71	136	10.79
1	0.36446	89.29	49	18.18
2	0.15843	38.81	35	0.37
3	0.04591	11.25	13	
4	0.00998	2.45 } 14.19	5 } 25	8.23
5 et +	0.00201	0.49	7	
Total	1.00000	245.--	245	37.57

La valeur considérable du χ^2 (37.57) pour 2 degrés de liberté montre que l'hypothèse d'une distribution selon une loi de Poisson ne saurait être retenue. Ceci provient de ce que les étuis incomplets se présentent souvent en série. C'est pourquoi nous admettrons qu'il existe une probabilité p pour qu'un étui incomplet soit suivi d'un autre étui incomplet.

Nous sommes donc conduits à étudier la loi de probabilité suivante :

Définition de la loi de probabilité

Dans un lot de N objets rangés dans le temps (ici N = 800) il existe une faible probabilité $\frac{m}{N}$ pour qu'apparaisse un objet défectueux et une probabilité p pour qu'un objet défectueux suive immédiatement un autre objet défectueux. Quelles sont les probabilités d'apparition de 0, 1, 2, ..., k ; ... objets défectueux ?

Avant de passer au calcul de ces probabilités, rappelons les résultats suivants dont nous aurons besoin :

Nombre de rangements de n objets dans k cases

Il existe :

$$C_{n+k-1}^{n} \text{ ou } C_{n+k-1}^{k-1}$$

manière de ranger n. objets dans k cases.

Ce résultat s'établit aisément, par récurrence :

1 case : 1 seule manière de ranger n objets.

2 cases : n + 1 manières de ranger n objets, selon que l'on met n, n-1, n-2, ..., 2 1, 0 objets dans la 1ère case, et le complément dans la seconde case :

$$n + 1 = C_{n+1}^{1} = C_{n+1}^{n}$$

3 cases : 1 objet : 1 dans la première case : 1 solution

0 dans la première case : C_2^1 solutions

Total C_3^1 solutions

2 objets : 2 ou 1 dans la première case : C_3^1 solutions

0 dans la première case : C_3^2 solutions

Total C_4^2 solutions

Ce raisonnement se généralise immédiatement.

Développement de : $\frac{I}{(I - p)^n}$

$$\frac{I}{(I - p)^n} = 1 + C_n^1 p + C_{n+1}^2 p^2 + \dots + C_{n+k-1}^k p^k + \dots .$$

Probabilité d'apparition de k objets défectueux

Si la probabilité de liaison p n'existait pas, la probabilité d'apparition de k objets défectueux serait donnée par la loi de Poisson :

$$P_k = e^{-m} \frac{m^k}{k!} \cdot$$

Mais du fait de l'existence de cette liaison, les probabilités réelles sont des quantités P'_k différentes de P_k et que nous nous proposons de calculer :

P'_0 .- De toute évidence : $P'_0 = P_0 = e^{-m}$

P'_1 .- Il est clair que $P'_1 = P_1 (1-p)$, puisque la probabilité pour que le premier étui incomplet ne soit pas suivi d'un second est : $1 - p$.

Le complément $p P_1$ est réparti dans les probabilités d'apparition de 2, 3, ..., k, ..., étuis incomplets, proportionnellement à $p, p^2, \dots, p^{k-1}, \dots$

La probabilité de liaison p introduit donc déjà dans l'expression de P'_k la quantité $p^{k-1} P_1 (1 - p)$ qui est la probabilité d'apparition d'une **chaîne** de k objets défectueux consécutifs. La somme de P'_1 et de ces quantités est bien égale à P_1.

P'_2 .- A la probabilité d'apparition d'une chaîne de 2 : $p\ P_1\ (1 - p)$ s'ajoute la probabilité d'apparition de 2 étuis incomplets "indépendants", soit $P_2 (1 - p)^2$, puisque pour chacun des 2 étuis, la probabilité de rester seul est $1 - p$.

$$P'_2 = p P_1 (1 - p) + P_2 (1 - p)^2$$

P'_k .- Décomposons P'_k en probabilités élémentaires correspondant aux différents nombres de chaines possibles :

1° - **une chaine** de k étuis consécutifs : probabilité $p^{k-1}\ P (1 - p)$;

2° - **deux chaînes** : ces deux chaînes sont obtenues par toutes les façons dont k - 2 étuis défectueux ont pu succéder à deux étuis isolés. Il y a donc autant de fois deux chaînes possibles qu'il y a de manières de ranger k - 2 objets dans deux cases, soit C'_{k-1}. La probabilité d'avoir k étuis défectueux en deux chaînes est donc :

$$C'_{k-1} p^{k-2}\ P_2 (1 - p)^2$$

et on a bien :

$$P_2 (1 - p)^2 + C'_2 p P_2 (1 - p)^2 + C'_3 p^2 P_2 (1 - p)^2 + \dots$$
$$+ C'_{k-1} p^{k-2} P_2 (1 - p)^2 + \dots = P_2$$

3° - **J chaînes** ($j < K$). Ces j chaînes sont obtenues par k - j étuis incomplets liés à j étuis incomplets indépendants. Il y a autant de fois j chaînes possibles qu'il y a de manières de ranger k - j objets dans j cases, soit C_{k-1}^{j-1}. La probabilité d'avoir j chaines est donc :

$$C_{k-1}^{j-1}\, p^{k-j}\, P_j\, (1-p)^j \; .$$

4° - **k étuis isolés** : la probabilité est : $P_k\,(1-p)^k$.

En définitive :

$$P'_k = p^{k-1} P_1 (1-p) + C'_{k-1}\, p^{k-2} P_2 (1-p)^2 + \ldots$$
$$+ C_{k-1}^{j-1}\, p^{k-j} P_j (1-p)^j + \ldots + P_k (1-p)^k$$

On vérifie que : $\sum_{i=0}^{\infty} P'_i = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1.$

Les expressions des P' successifs s'écrivent très facilement, les coefficients numériques s'obtenant par le triangle de Pascal :

$$P'_0 = P_0$$
$$P'_1 = P_1 (1-p)$$
$$P'_2 = p\,P_1 (1-p) + P_2 (1-p)^2$$
$$P'_3 = p^2 P_1 (1-p) + 2p\,P_2 (1-p)^2 + P_3 (1-p)^3$$
$$P'_4 = p^3 P_1 (1-p) + 3p^2 P_2 (1-p)^2 + 3p\,P_3 (1-p)^3 + P_4 (1-p)^4$$
$$P'_5 = p^4 P_1 (1-p) + 4p^3 P_2 (1-p)^2 + 6p^2 P_3 (1-p) + 4p\,P_4 (1-p)^4 + P_5 (1-p)^5$$

Dans l'établissement des expressions des P', nous avons négligé les cas d' "enchevêtrement", c'est-à-dire les cas où un étui incomplet "tête de chaine" se présenterait avant l'épuisement de la chaine précédente. Théoriquement, il eut fallu tenir compte de ce fait, mais nous avons adopté cette position car pratiquement l'on constate que le nombre d'étuis d'une même chaine est toujours petit devant le nombre d'étuis contenus dans un carton (800).

Fonctions caractéristiques

La première fonction caractéristique a pour expression :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P'_k\, e^{kt}$$

il vient :

$$\varphi(t) = P_0 + P_1 (1-p)\, e^t \left[1 + p\,e^t + p^2 e^{2t} + \ldots \right]$$
$$+ P_2 (1-p)^2 e^{2t} \left[1 + 2pe^t + 3p^2 e^{2t} + \ldots \right]$$
$$+ P_3 (1-p)^3 e^{3t} \left[1 + 3pe^t + 6p^2 e^{2t} + \ldots \right]$$
$$+ \ldots .$$

$$\varphi(t) = P_0 + P_1 \frac{e^t (1-p)}{1-pe^t} + P_2 \frac{e^{2t}(1-p)^2}{(1-pe^t)^2} + P_3 \frac{e^{3t}(1-p)^3}{(1-pe^t)^3} + \ldots$$
$$= e^{-m} \left[1 + m \frac{e^t (1-p)}{1-pe} + \frac{m^2}{2!} \left(\frac{e^t (1-p)}{1-pe^t} \right)^2 + \frac{m^3}{3!} \left(\frac{e^t (1-p)}{1-pe^t} \right)^3 + \ldots \right]$$
$$= e^{-m}\, e^{m \frac{(1-p)e^t}{1-pe^t}}$$

$$\boxed{\varphi(t) = e^{m \frac{e^t - 1}{1-pe^t}}}$$

On vérifie que : $\varphi(o) = 1$.

La seconde fonction caractéristique est :

$$\boxed{\phi(t) = m \frac{e^t - 1}{1 - p e^t}}$$

avec $\phi(o) = 0$.

En prenant le développement limité de $\phi(t)$, on obtient :

coefficient de t : $\frac{m}{1 - p}$

coefficient de $\frac{t^2}{2!}$: $\frac{m(1 - p)}{(1 - p)^2}$

d'où, en désignant par m_1 le moment du premier ordre, μ_2 le moment centré du second ordre :

$$\boxed{\begin{aligned} m_1 &= \frac{m}{1 - p} \\ \mu_2 &= \frac{m(1 + p)}{(1 - p)^2} \end{aligned}}$$

m et p s'expriment simplement en fonction des moments des deux premiers ordres.

On a :

$$\frac{\mu_2}{m_1} = \frac{1 + p}{1 - p}$$

d'où :

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{\mu_2 - m_1}{\mu_2 + m_1} \\ m &= \frac{2 m_1^2}{\mu_2 + m_1} \end{aligned}}$$

Ajustement des fréquences observées

En ajustant les deux premiers moments, nous obtenons :

$$m = 0.628\,985$$
$$p = 0.276\,520$$

Ainsi la probabilité d'apparition d'un premier étui incomplet est : $\frac{0.628\,985}{800}$, mais il existe une probabilité de 0,276.520 pour qu'un étui incomplet soit suivi immédiatement d'un autre, et de ce fait le nombre moyen d'étuis incomplets par carton passe de 0.628 985 à 0.869 388.

Nous avons calculé les probabilités P'_0 P'_1 P'_2 P'_3 P'_4 P'_5 correspondant à ces valeurs de m et p. L'ajustement est le suivant :

Nombre d'étuis incomplets par carton	Probabilités	Effectif calculé c	Effectif observé o	$\frac{(o-c)^2}{c}$
0	0.53314	130.62	136	0.2216
1	24261	59.44	49	1.8337
2	12229	29.96	35	0.8478
3	5745	14.08	13	0.0828
4	2570	6.29	5	0.2646
5	1110	4.61	7	1.2391
6 et +	771			
Total	1.00000	245.--	245	4.4896

L'ajustement est satisfaisant. On obtient un χ^2 de 4.49 pour trois degrés de liberté ; $P(\chi^2) > 0.20$.

CONCLUSION

Cette étude fait ressortir l'existence de deux paramètres agissant sur l'apparition d'étuis incomplets. Si la probabilité d'apparition d'un premier étui défectueux est assez faible, par contre la probabilité pour que le premier étui soit suivi d'un second est relativement importante (supérieure à 1/4).

On peut admettre que la première de ces probabilités dépend pour beaucoup de la qualité des cigarillos paquetés, tandis que la seconde est surtout liée au fonctionnement de la machine et à la surveillance exercée par l'ouvrière mécanicienne.

Cette étude nous guide donc dans l'action à entreprendre en vue d'améliorer les conditions de paquetage des Ninas, et nous permet de mesurer le bénéfice que l'on peut tirer de cette action. Ainsi, si nous parvenions à supprimer la probabilité de liaison, nous réduirions de plus de 25 % le nombre d'étuis défectueux livrés au commerce.