REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

G. KREWERAS

La mise en équations du problème des stocks

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 1 (1955), p. 83-89
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_83_0>

LA MISE EN ÉQUATIONS DU PROBLÈME DES STOCKS[1]

par

G. KREWERAS

Ingénieur à la Société Qualitex

Une industrie transformatrice consomme des matières premières qu'elle peut, soit acheter au fur et à mesure de ses besoins, soit stocker dans certaines limites pour éviter de subir des cours momentanément trop élevés.

Le but du présent exposé est de montrer que les problèmes de décision d'achat en fonction du cours de la matière première et de l'état du stock peuvent être traités par le calcul, et qu'il peut en résulter des règles d'action qui suppriment les hésitations et réalisent l'économie maximum. La théorie exposée ci-après part d'hypothèses très simplifiées, pour la clarté de l'exposé elle peut néanmoins être étendue pour application à des cas plus concrets.

1 - HYPOTHÈSES GÉNÉRALES

Nous raisonnerons sur une industrie qui consomme une quantité constante a de matière première par jour, et dont le stock s de matière première peut varier entre 0 et un maximum (déterminé par exemple par la contenance des bâtiments destinés au stockage). Nous admettons en outre :

1°) qu'il existe un coût quotidien du stockage, qui est une fonction $h(s)$ du stock s ; ce coût comprend une partie indépendante de s, par exemple salaire des magasiniers, charges sociales correspondantes, amortissement des bâtiments de stockage, et une partie croissante en fonction de s, par exemple l'intérêt des capitaux immobilisés et les primes d'assurance incendie ;

2°) que le cours c de la matière première est une variable aléatoire indépendante ayant pour densité de probabilité $p(c)$, c'est-à-dire que la probabilité pour que le cours du jour soit compris entre c et $c + dc$ est $p(c)dc$. Remarquons que cette hypothèse n'est qu'une approximation de la réalité, puisqu'elle ne tient pas compte de l'influence que peut avoir sur le cours du jour celui de la veille, c'est-à-dire de la "tendance" du marché ; néanmoins en période de fluctuations relativement faibles, cette approximation dont les calculs plus complexes permettraient d'ailleurs de s'affranchir, peut être considérée comme suffisante.

Nous appellerons "fonction d'achat" toute règle permettant, dès que le stock s et le cours c sont connus, de déterminer la quantité de matière première et une dépense quotidienne moyenne de stockage. La fonction d'achat optimum sera celle pour laquelle la somme de ces deux dépenses moyennes sera la plus petite possible.

(1) Exposé fait au cours de la séance du 24 novembre 1954, du Séminaire de Recherche opérationnelle de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.

2 - MISE EN ÉQUATION

Une fonction d'achat $f(s,c)$ étant choisie, il en résulte une loi d'évolution du stock. Cette loi ne permet pas, bien entendu, de prévoir l'état du stock à une date future déterminée ; mais elle permet en général d'affirmer que sur une période assez longue (un an pour fixer les idées), la fréquence avec laquelle le stock sera compris entre s et $s+ds$ sera $\varpi(s)ds$, $\varpi(s)$ étant une fonction dite "densité de probabilité ergodique du stock", calculable quand $p(c)$ et $f(s,c)$ sont connus.

Parmi les jours où le stock sera compris entre s et $s+ds$, certains correspondront à un cours compris entre c et $c+dc$; la fréquence totale de ces derniers sera :

$$\varpi(s)ds \cdot p(c)dc$$

Ces jours-là la quantité achetée sera $f(s,c)$ et la dépense correspondante sera $c.f(s,c)$. La dépense quotidienne moyenne de matière première sera donc :

$$D_1 = \iint c f(s,c)\,\varpi(s)\,p(c)\,ds\,dc,$$

l'intégrale double étant étendue à l'ensemble des valeurs possibles du stock et au cours.

La dépense quotidienne moyenne de stockage sera exprimée par l'intégrale simple :

$$D_2 = \int h(s)\,\varpi(s)\,ds$$

étendue à l'ensemble des valeurs possibles du stock.

La mise en oeuvre mathématique consistera donc essentiellement :

a) à exprimer la probabilité ergodique $\varpi(s)$ à partir d'un choix arbitraire de la fonction d'achat $f(s,c)$.

b) à choisir $f(s,c)$ de manière que la dépense quotidienne moyenne totale $D_1 + D_2$ soit minimum.

3 - DÉTERMINATION DE LA PROBABILITÉ ERGODIQUE

L'achat de la quantité $f(s,c)$ de matière première fait passer le stock de la valeur s à la valeur :

$$(1) \qquad s' = s + f(s,c) - a$$

a étant, rappelons-le, la consommation journalière certaine de la matière première considérée.

$f(s,c)$ est naturellement une fonction décroissante de c, puisque dans un état donné du stock on achètera d'autant moins que le cours sera plus élevé : s' est donc également fonction décroissante de c. Dans le même état actuel s du stock, c peut s'exprimer à l'aide de s', et nous écrirons :

$$(2) \qquad c = \varphi(s,s'),$$

formule équivalente à (1). Il est alors possible de trouver la probabilité $P(s,s')$ pour que, le stock d'aujourd'hui s étant connu, le stock de demain soit inférieur ou égal à s' ; c'est la probabilité pour que le cours soit supérieur à $\varphi(s,s')$, soit :

$$P(s,s') = \int_{\varphi(s,s')}^{\infty} p(c)\,dc$$

De la connaissance de la fonction $P(s,s')$ résulte la densité de probabilité de passage $\frac{\partial P}{\partial s}(s,s')$; la probabilité pour que le lendemain du stock s on ait un stock compris entre s' et s' + ds' est :

$$K(s,s')\,ds' = \frac{\partial P}{\partial s'}(s,s')\,ds' = -p\left[\varphi(s,s')\right] \frac{\partial \varphi}{\partial s'}\,ds'$$

$$= \frac{-p(c)}{\frac{\partial f}{\partial c}(s,c)}\,ds'$$

c étant remplacé par la valeur $\varphi(s,s')$ tirée de (2)

S'il existe une densité de probabilité ergodique $\varpi(s)$, celle-ci satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\omega(s') = \int_0^{\infty} K(s,s')\,\varpi(s)\,ds,$$

$$K(s,s') = -\frac{p\left[\varphi(s,s')\right]}{\frac{\partial f}{\partial c}\left[s,\varphi(s,s')\right]}$$

Cette équation fonctionnelle, jointe à la condition :

$$\int_0^{\infty} \varpi(s)\,ds = 1,$$

(qui exprime que $\varpi(s)$ est bien une densité de probabilité) permet en général de déterminer $\varpi(s)$ quand p(c) est connu et quant f(s,c) est choisi.

4 - CHOIX DE LA RÈGLE D'ACHAT OPTIMUM

$\varpi(s)$ étant calculé, les expressions de D_1 et D_2 données de § 2 permettent de calculer la dépense quotidienne totale pour toute fonction d'achat f(s,c) arbitrairement choisie. Il reste alors à choisir, parmi toutes les fonctions d'achat possibles, celle qui donne à la somme d'intégrales $D_1 + D_2$ la valeur minimum.

Le problème est donc purement mathématique. A défaut d'une méthode de résolution générale, qui ne paraît pas facile à construire, il est toujours possible de l'aborder par des méthodes d'approximation.

5 - ANALYSE COMPLÈTE D'UN CAS FICTIF

A seule fin d'illustrer la méthode générale exposée ci-dessus et de montrer sur un exemple simple comment elle peut être poussée jusqu'à l'application numérique, nous allons traiter un cas purement fictif, où les variables envisagées plus haut varient d'une manière discontinue au lieu de continue (ceci pour que les intégrales soient remplacées par des sommes).

5. 1 - Hypothèses

Nous supposerons que la matière première se présente sous forme d'unités indivisibles, et que l'usine traite une unité par jour. Nous supposerons que le stock d'avance ne peut se composer que de zéro, une ou deux unités. Nous admettrons en outre que le cours de l'unité, sur le marché de la matière première ne peut avoir que l'une ou l'autre de deux valeurs c et d ($d>c$), la première avec la probabilité p, la seconde avec la probabilité $q = 1 - p$. Enfin, en ce qui concerne les frais de stockage quotidiens, nous les supposerons égaux à h_0 quand le stock du jour est 0, à h_1 quand le stock du jour est d'une unité, à h_2 quand il est de deux unités.

Dans ces conditions une "fonction d'achat" apparaîtra sous forme d'un tableau donnant, pour les 3 volumes du stock et les 2 valeurs du cours, le nombre d'unités à acheter. Exemple :

cours \ stock	0	1	2
c (prob. p)	2	2	1
d (prob. q)	1	0	0

5. 2 - Nombre de tableaux possibles

Dans la première colonne de ce tableau (stock 0) ne peuvent figurer que les chiffres 1, 2, ou 3, puisqu'il faut acheter au moins l'unité à traiter immédiatement; dans la deuxième colonne (stock 1) ne peuvent figurer que les chiffres 0, 1 ou 2 ; enfin dans la troisième (stock 2) ne peuvent figurer que des chiffres 0 ou 1 puisque le stock ne doit pas dépasser deux unités.

Le nombre de tels tableaux possibles à priori est de 324 : en effet, il y a 3 chiffres possibles pour chacune des quatre premières cases (stocks 0 ou 1) et 2 chiffres possibles pour chacune des deux dernières cases :

$$3^4 \times 2^2 = 324$$

En fait le nombre de tableaux "plausibles" est beaucoup moins élevé : en effet puisque $d > c$ il n'est certainement pas raisonnable, pour un stock donné, d'acheter plus quand le cours est d que quand le cours est c : de plus, pour un cours donné, il n'est certainement pas raisonnable d'acheter davantage quand le stock est supérieur. Tout tableau plausible devra donc comporter des chiffres non croissants dans chaque ligne et dans chaque colonne ; c'est le cas pour celui donné plus haut à titre d'exemple. Cette considération réduit le nombre de tableaux plausibles de 324 à 70.

Une autre considération permet de réduire encore ce nombre. En effet, lorsque le cours a la valeur la plus élevée, d, il est certainement préférable d'attendre plutôt que d'acheter, à moins d'y être obligé parce que le stock est à 0; encore est-il préférable d'acheter dans ce cas juste l'unité nécessaire. Toute autre consigne d'achat quand le cours est d augmenterait à la fois les dépenses quotidiennes moyennes d'achat et de stockage ; un instant de réflexion suffit à s'en convaincre. Dans ces conditions la 2e ligne du meilleur tableau d'achat sera obligatoirement 1. 0. 0, ce qui réduit le nombre de règles plausibles aux 13 suivantes (que nous donnons sans la ligne et la colonne d'en tête) :

321	320	311	310	300	$\boxed{221}$	220	211	210	200	111	110	100
100	100	100	100	100	$\boxed{100}$	100	100	100	100	100	100	100

Le tableau encadré est celui 5. 1

5. 3 - Probabilités ergodiques de stock

Du tableau (5.1), qui représente la fonction $f(s,c)$ de la théorie générale, peuvent se déduire les probabilités de passage $K(s,s')$ d'un stock quelconque s d'aujourd'hui à un stock quelconque s' de demain. On voit que :

si $s = 0$, on achète 2 unités avec la probabilité p,
1 unité avec la probabilité q
donc $s' = 1$ avec la probabilité p
$s' = 0$ avec la probabilité q

si $s = 1$, on achète 2 unités avec la probabilité p
0 unité avec la probabilité q
donc $s' = 2$ avec la probabilité p
$s' = 0$ avec la probabilité q

si $s = 2$, on àchète 1 unité avec la probabilité p
0 unité avec la probabilité q
donc $s' = 2$ avec la probabilité p
$s' = 1$ avec la probabilité q

On a donc :

$K(0,0) = q$	$K(0,1) = p$	$K(0,2) = 0$
$K(1,0) = q$	$K(1,1) = 0$	$K(1,2) = p$
$K(2,0) = 0$	$K(2,1) = q$	$K(2,2) = p$

Pour déterminer la fonction $\overline{\omega}(s)$, c'est-à-dire les probabilités ergodiques $\overline{\omega}(0)$, $\overline{\omega}(1)$ et $\overline{\omega}(2)$, on écrira les équations qui correspondent à celles données au § 3 (en remplaçant les parenthèses par des indices pour alléger l'écriture) :

$$\begin{aligned}\overline{\omega}_0 &= K_{00}\,\overline{\omega}_0 + K_{10}\,\overline{\omega}_1 + K_{20}\,\overline{\omega}_2\\ \overline{\omega}_1 &= K_{01}\,\overline{\omega}_0 + K_{11}\,\overline{\omega}_1 + K_{21}\,\overline{\omega}_2\\ \overline{\omega}_2 &= K_{02}\,\overline{\omega}_0 + K_{12}\,\overline{\omega}_1 + K_{22}\,\overline{\omega}_2\\ &\overline{\omega}_0 + \overline{\omega}_1 + \overline{\omega}_2 = 1\end{aligned}$$

système linéaire dont la solution est, avec les valeurs des K trouvées :

$$\overline{\omega}_0 = \frac{q^2}{1-pq}$$
$$\overline{\omega}_1 = \frac{pq}{1-pq}$$
$$\overline{\omega}_2 = \frac{p^2}{1-pq}$$

5. 4 - Dépenses quotidiennes moyennes

En se reportant au tableau (5.1), on voit que les jours où le stock est nul, la dépense moyenne d'achat

$$p \,.\, 2c + q \,.\, 1d = 2pc + qd.$$

Les jours où le stock est 1, la dépense moyenne d'achat sera :

$$p \,.\, 2c + q \,.\, 0d = 2pc$$

Les jours où le stock est 2, la dépense moyenne d'achat par jour sera :

$$p \cdot 1c + q \cdot 0d = Pc$$

Donc sur une longue période (un an), la dépense moyenne d'achat sera :

$$D_1 = \overline{\varpi}_0 \, (2\,pc + qd) + \overline{\varpi}_1 \cdot 2\,pc + \overline{\varpi}_2 \cdot pc \; ,$$

d'où en remplaçant les $\overline{\varpi}$ par leurs valeurs, compte tenu de $p + q = 1$,

$$D_1 = \frac{(2pq + p^3)\,c + q^3 d}{1 - pq}$$

En ce qui concerne le stockage, la dépense moyenne par jour, sur une année, sera :

$$\begin{aligned} D_2 &= \overline{\varpi}_0 h_0 + \overline{\varpi}_1 h_1 + \overline{\varpi}_2 h_2 \\ &= \frac{q^2 h_0 + pq h_1 + p^2 h_2}{1 - pq} \end{aligned}$$

La dépense quotidienne moyenne, achat et stockage, correspondant à la règle d'achat définie par le tableau (5.1), est donc :

$$D_1 + D_2 = \frac{(2pq + p^3)\,c + q^3 d + q^2 h_0 + pq h_1 + p^2 h_2}{1 - pq}$$

5. 5 - Règle d'achat optimum

Un calcul analogue à celui des §§ 5.3 et 5.4 peut être refait pour les 13 règles d'achat plausibles. Bien que le calcul soit très rapide, nous ne le reproduisons pas pour éviter d'allonger le présent résumé. Une comparaison très facile des 13 valeurs de $D_1 + D_2$ obtenues permet de constater que 3 règles d'achat seulement peuvent être retenues :

5.5.1. - Règle A.-

stock / cours	0	1	2
c	1	0	0
d	1	0	0

$$D_1 + D_2 = pc + qd + h_0$$

La règle A consiste à laisser le stock descendre à 0 s'il n'y est pas initialement, et à le maintenir indéfiniment à 0 en achetant tous les jours l'unité consommée, quel que soit le cours.

5,5.2. - Règle B.-

stock / cours	0	1	2
c	2	1	0
d	1	0	0

$$D_1 + D_2 = (2pq + p^2)\,c + q^2 d + q h_0 + p h_1$$

La règle B consiste à ne permettre au stock que les volumes 0 ou 1 unité, sans jamais le laisser remonter à 2 unités, en portant ou en maintenant le stock à 1 quand le cours est d et à 0 quand le cours est c.

5.5.3.- Règle C.-

cours \ stock	0	1	2
c	3	2	1
d	1	0	0

$$D_1 + D_2 = (1 - q^3)c + q^3 d + q^2 h_0 + pqh_1 + ph_2$$

La règle C consiste à porter ou à maintenir le stock à 2 unité chaque fois que le cours est c, et au contraire à s'abstenir d'acheter quand le cours est d (sauf si le stock est nul, auquel cas on achètera strictement l'unité à consommer immédiatement).

Suivant les inégalités qui peuvent exister entre les données du problème (c, d, p, h_0, h_1, h_2), ce sera l'une des trois règles A, B, ou C qui donnera à $D_1 + D_2$ la plus petite valeur, c'est-à-dire qui sera à adopter effectivement comme règle d'achat. Le résultat qui s'obtient immédiatement est le suivant :

si $0 < d - c < \frac{h_1 - h_0}{q}$, adopter la règle A

si $\frac{h_1 - h_0}{q} < d - c < \frac{h_1 - h_0}{q} + \frac{h_2 - h_1}{q^2}$, adopter la règle B

si $d - c > \frac{h_1 - h_0}{q} + \frac{h_2 - h_1}{q^2}$, adopter la règle C

Ce résultat peut s'interpréter grossièrement comme suit : $d - c$ représente la variabilité du cours, et les différences $h_1 - h_0$ et $h_2 - h_1$ représentent les accroissements des frais de stockage. Si ces derniers sont prépondérants, il faut adopter la règle A, qui fait prendre les décisions d'achat uniquement en fonction du stock ; si au contraire la variabilité du cours est prépondérante, il faut adopter la règle C, c'est-à-dire profiter au maximum des variations de cours ; la règle B, enfin, représente le compromis optimum dans les cas intermédiaires.

N.B.- il apparait que la règle choisie à titre d'exemple au § 5.1. n'est en aucun cas la meilleure, bien que cette règle soit loin de paraître nécessairement déraisonnable à priori. Le cas traité ci-dessus, si fictif soit-il, donne un exemple de la manière dont le calcul permet d'améliorer, en matière d'achats, les résultats dûs à la seule intuition commerciale.