Revue de statistique appliquée

R. Henon

Combien de machines peut-on confier à un seul agent ?

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 1 (1955), p. 73-81
<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_73_0>

COMBIEN DE MACHINES PEUT-ON CONFIER A UN SEUL AGENT ?

par

R. HENON

Industriel

Professeur à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris

Dans toutes les industries où se trouvent en service des machines multiples ou têtes de machines, l'ingénieur est conduit à organiser les postes de travail en confiant plusieurs de ces machines ou têtes de machines à un seul agent. Le cas se présente, en particulier, dans le textile : combien de métiers faut-il confier au tisserand, combien de broches peut-on surveiller ? L'étude de ce problème est très générale et conduit à trouver les plans d'organisation les plus économiques.

A la suite d'un échange de vues avec M. E. Philippe, maître tisseur au Thillot, M. Hénon a été conduit à examiner plus particulièrement le problème qui se pose dans un atelier de tissage.

On trouvera ci-après les résultats de cette étude qui a pu être menée à bien grâce à la collaboration de M. E. Fourgeaud, chargé de recherches au C. N. R. S., qui a exécuté les calculs et préparé les abaques.

Si l'on analyse l'emploi du temps d'un agent conduisant **une seule machine** dans des conditions de travail bien standardisées, son temps se décompose en deux catégories :

temps main (machine arrêtée),

temps machine (agent inoccupé).

Exemple : un tisserand intervient en moyenne douze fois par heure :

dix fois pour ranger les canettes, ce qui représente une durée globale de	4 minutes
deux fois pour réparer les casses de fil, durée	2 minutes
Temps main en douze intervention	6 minutes
Temps machine	54 minutes
Total	60 minutes

Les probabilités de marche et d'arrêt sont donc respectivement

$$p = \frac{54}{60} = 0,90 \text{ et } q = 0,10.$$

Si au lieu de 1 métier on en confie N au tisserand, il va apparaitre une troisième catégorie de temps : ce sont les temps d'attente, machines arrêtées. En effet, le tisserand ne soigne qu'**une seule machine à la fois,** et les métiers arrêtés attendront leur tour pour être mis en marche.

Le temps machine qui était 60 p = 54 minutes devient 60 x, en désignant par x le nouveau **coefficient d'utilisation** en durée.

Le temps main qui était 60 q minutes deviendra proportionnel au nombre N de machines et à la durée d'utilisation, d'où :

temps main = $60\, q \,.\, N \,.\, \dfrac{x}{p}$ (agent occupé).

Si d'autre part on désigne par P (n) la probabilité pour que toutes les machines marchent en même temps, on aura l'identité.

$$(1)\ P(N) \equiv 1 - N\frac{q}{p}x\ ,$$

de laquelle on déduit les valeurs asymptotiques du coefficient d'utilisation x.

$$x = \frac{p}{Nq}\left[(1 - P(M)\right] \longrightarrow \frac{p}{Nq}\text{, puisque } P(N) \longrightarrow 0\ .$$

L'agent n'est donc jamais "saturé", puisque son temps occupé tend vers l'unité quand N augmente indéfiniment

$$Nx\frac{q}{p} = \frac{p}{q}\left[(1 - P(N))\right]\frac{q}{p} \rightarrow 1\ .$$

Tout ceci nous conduit à étudier la valeur numérique de P (N) et par conséquent à chercher une schématisation du modèle expliquant la loi de formation des P (N).

SCHÉMATISATION DU MODÈLE

Dans le cas de métiers à tisser, la seule observation des faits soulève des problèmes statistiques. En effet, les changements de canettes se font au hasard. Cependant, si la longueur de fil était constante, on pourrait organiser le travail en changeant les canettes toutes ensemble, ce qui ne ferait qu'une seule intervention, il n'y aurai plus de hasard. On pourrait parvenir à ce résultat en mettant sous contrôle statistique le bobinage des canettes et se baser sur la longueur la plus courte bobinée dont la loi correspond à une distribution extrémale (loi du moins disant). Il faudrait tenir compte aussi du cout de la gâche supplémentaire de fil. Cette remarque n'est pas spéciale au textile, mais parait très importante dans beaucoup de cas rencontrés dans les ateliers (classement des matières à usiner en sous-lots plus homogènes - changement des outils de coupe suivant un programme optimum - inspection périodique des machines). Dans ce qui suit nous acceptons les choses comme elles sont : les changements de canettes seront des événements soumis au hasard.

Dans le cas du tisserand, nous avions indiqué qu'il y avait deux processus d'intervention de durée $\theta_1 = 4/10$ de minute pour changer les canettes et, $\theta_2 = 2/2$ minutes pour réparer les casses. Mais on peut simplifier le modèle en considérant la durée moyenne θ de l'intervention, qui sera ici :

$$12\ \theta = 10\ \theta_1 + 2\ \theta_2 = 6 \text{ minutes}\ ,$$

d'où

$$\theta = 1/2 \text{ minute.}$$

Cette simplification conduit à diviser le temps en une succession de durées élémentaires **égales** à θ (ici 120 unités par heure) et considérer les situations "marche" ou "arrêt" comme **invariables** pendant cette durée* .

Ceci nous conduit à substituer au processus continu dans le temps un **processus discontinu** analogue à un tirage de boules dans une urne.

Supposons donc un agent surveillant N machines et qu'il y ait à l'époque t_0 "r machines" en marche dans la période θ. A l'ouverture de la période suivante, **une seule machine** sera remise en route, et sur ces r + 1 machines, par le jeu du hasard, un certain nombre s, vont s'arrêter. Finalement à l'époque t_1 il

---

* Si θ_1 était petit par rapport à θ_2, il y aurait avantage à ne pas faire attendre la machine arrêtée pour la cause 1 et à déplacer l'agent occupé pour la cause 2 sur une autre machine.

restera m= r + 1 - s machines en marche. La probabilité de passage K_r^m de la "situation r" à la "situation m sera donc $K_r^m = C_{r+1}^s\ p^m\ q^s$ comme dans un tirage de boules, la probabilité d'arrêt étant

$$q = \frac{12\ \theta}{120\ \theta} = 0,10$$

En remarquant que s = r + 1 - m

$$C_{r+1}^s = C_{r+1}^{r+1-m} = C_{r+1}^m \ .$$

Nous pourrons exprimer K_r^m en fonction de r et m seulement

$$K_r^m = C_{r+1}^m\ p^m\ q^{r+1-m}$$

Sur la figure (1) on a représenté dans un carré de côté égal à n + 1 l'ensemble des "passages possible de r à "m" dans les parties claires. Si l'on part de r = 3, par exemple, les situations possibles dans la seconde période se trouvent dans la colonne 3 au niveau des lignes m =.4, 3, 2, 1, 0.

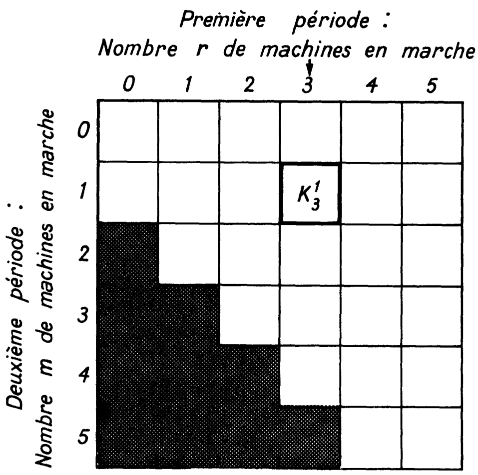

Fig. 1

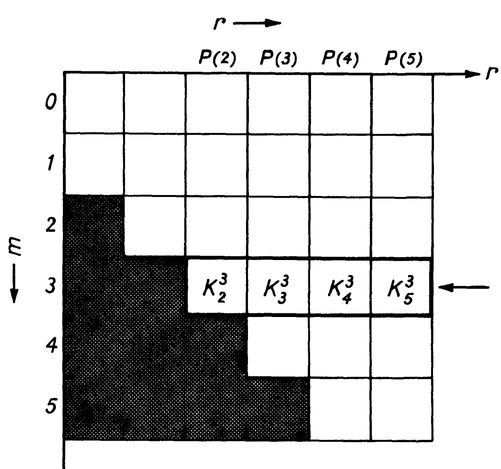

Fig. 2

Sur la figure 2, la ligne en trait fort pour m : 3 donne toutes les possibilités d'obtenir 3 machines en marche à partir des situations initiales depuis r = 2 jusqu'à r = 5.

Si l'on désigne par P (2), P (3), P (4), P (5) les probabilités inconnues d'obtenir 2, 3, 4, 5 machines en marche, les probabilités des chemins qui aboutissent en 3 sont

Probabilité de passer de 2 à 3 = P (2) K_2^3

Probabilité de passer de 3 à 3 = P (3) K_3^3

Probabilité de passer de 4 à 3 = P (4) K_4^3

Probabilité de passer de 5 à 3 = P (5) K_4^3

d'où

$$P\ (3) = P\ (2)\ K_2^3 + P\ (3)\ K_3^3 + P\ (4)\ K_4^3 + P\ (5)\ K_4^3 \ .$$

Nous n'avons pas écrit K_5^3 puisque, le nombre de machines étant limité à 5, le terme en C_6^3 n'existe pas. En effet, la situation P (5) correspond au cas où **toutes** les machines marchent, il ne peut donc y avoir de machine supplémentaire remise en route, et il faut remplacer K_5^3 par K_5^3 . C'est une **condition limitative.**

Ce schéma nous donne le moyen d'évaluer la probabilité P (m). On trouve :

$$P(m) = P(m-1)\,K^m_{m-1} + P(m)\,K^n_m + \dots P(r)\,K^m_r + \dots P(N-1)\,K^m_{N-1} + P(N)\,K^m_{N-1}.$$

Il existe m + 1 équations homogènes entre m + 1 valeurs inconnues des P depuis m = 0 à m = M.

CAS DE DEUX MACHINES

Examinons le cas de deux machines. Les probabilités de marche et d'arrêt sont p et q. Le système des trois équations en P (m) s'écrit, en explicitant les valeurs de K

$$\begin{array}{rcl}
P(0) &=& P(0)\,q + P(1)\,q^2 + P(2)\,q^2 \\
P(1) &=& P(0)\,p + P(1)\,2pq + P(2)\,pq \\
P(2) &=& P(1)\,p^2 + P(2)\,p^2 \\
\hline
1 &=& P(0) + P(1) + P(2)
\end{array}$$

Remplaçant la première ligne par la somme des 3 et ordonnant par rapport aux inconnues on obtient un nouveau système de trois équations dont le tableau des coefficients est

$$\left[\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 \\
p & 2pq-1 & 2pq & . \\
. & p^2 & p^2-1 & .
\end{array}\right]$$

d'où

$$P(0) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ . & 2pq-1 & 2pq \\ . & p^2 & p^2-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & 2pq-1 & 2pq \\ . & p^2 & p^2-1 \end{vmatrix}} = q^2\,\frac{1}{1-pq}$$

$$P(1) = 2pq.\,\frac{1+p}{2\,(1-pq)}$$

$$P(2) = p^2.\,\frac{p}{1-pq}$$

Pour faire apparaître le calcul du moment μ'_r d'ordre r, on ajoute au système de trois inconnues la relation supplémentaire

$$\mu'_r = 0.P(0) + 1^r\,P(1) + 2^r\,P(2)\,.$$

Pour éliminer les trois inconnues P entre les quatre équations, il suffit d'exprimer que le déterminant du système est nul.

$$(2)\quad \begin{vmatrix} . & 1 & 2^r & -\mu'_r \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ p & 2pq-1 & 2pq & . \\ . & p^2 & p^2-1 & . \end{vmatrix} = 0\,,$$

d'où

$$\mu'_r = \frac{(2^r - 1)\, p^3 + p}{1 - pq} .$$

Si r = 1, on a la moyenne.

$$\mu'_1 = 2p \cdot \frac{\left(\frac{p\ +1}{2}\right)}{1 - pq} .$$

La valeur du coefficient d'utilisation x_2 est alors

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{p^3 + p}{1 - pq} \text{ (au lieu de } x_1 = p) .$$

Si r = 2, on a

$$\mu'_2 = \frac{3\, p^2 + p}{1 - pq} .$$

Ces valeurs vérifient la première identité (1)

$$P\ (2) \equiv 1 - 2 \cdot \frac{q}{p} x_2 , \qquad \text{qui devient :}$$

$$\frac{p^3}{1 - pq} \equiv 1 - 2 \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p^3 + p}{1 - pq} .$$

Contrairement à ce qui a souvent été avancé, on n'a pas le droit d'écrire **a priori**

$$(x_N)^N = 1 - N \frac{q}{p} x_N ,$$

Puisque la probabilité pour que toutes les machines marchent en même temps n'est pas $(x_N)^N$ mais P (N), on peut le vérifier sur P (2)

$$P\ (2) \neq (x_2)^2$$

$$\frac{p^3}{1 - pq} \neq \frac{1}{4} \frac{p^2 (p^2 + 1)^2}{(1 - pq)^2} = \frac{p^3}{1 - pq} \left[1 + \frac{q^4}{4p\ (1 - pq)} \right] ,$$

La valeur numérique du terme correctif est faible : on peut donc écrire sans erreur grossière

$$P\ (2) \neq (x_2)^2 ,$$

ce qui revient encore à remplacer la loi de distribution des P (m) par la loi binomiale $\left[(1 - X_N) + X_N \right]^N$.

Exemple numérique

		p = 0.90	p = 0.10
	P (0)	011	890
	P (1)	188	109
	P (2)	801	001
Coeff. d'utilisation	: x_2	896	055
Valeur approchée de P (2)	: $(x_2)^2$	802	003
Variance	: σ^2	200	0.101

Remarquons la valeur approchée de $P(3) = (x_2)^2 = 0,802$ au lieu de 0,801 pour $p = 0,90$ et celle de $P(2) = (x_2)^2 = 0,003$ au lieu de 0,001 pour une valeur de $p = 0,10$, exceptionnelle en pratique.

CALCULS ET ABAQUES

Les calculs des moyennes ont été effectués à partir du déterminant (2) généralisé pour N machines de N = 2 jusqu'à N = 10 et pour différentes valeurs de P. Les calculs ont été poussés jusqu'au moment où les valeurs x atteignaient leur valeur asymptotique P/Nq à 0,001 près x. - Le tableau suivant en donne les résultats.

Tableau du coefficients d'utilisation d'un groupe de machines identiques a partir du coefficient p relatif a une machine unique.

p	N =2	3	4	5	6	7	8	9	10
95	949	947	946	944	942	940	938	935	932
90	895	889	882	873	862	848	831	810	783
85	839	830	806	782	741	712	665	613	562
80	781	755	720	674	618	556	496	443	
70	660	610	533	455	387				
60	537	454	368	299					
50	416	323							
40	305								
30	205								
20	119								
10	055.								

L'abaque de la figure 3 donne les valeurs du coefficient d'utilisation du groupe en fonction de p pour différentes valeurs de N. Les courbes ont été tracées en tenant compte de la valeurs asymptotiques. En prenant des coordonnées logarithmiques on écrit, au lieu de $x = P/Nq$,

$$\log x = \log \frac{p}{q} - \log N ,$$

et les asymptotes deviennent des droites parallèles. Les interpolations sont ainsi grandement facilitées.

L'abaque de la figure 4 donne les valeurs du coefficient d'utilisation du groupe en fonction du nombre de machines conduites simultanément. Il a été tracé pour $p = 0,90$. La comparaison de quelques chiffres pris au hasard semble montrer une différence sensible avec ceux obtenus par l'approximation $P(N) = x^N$. Par exemple, on trouve :

pour p = 0,90 : n = 5,	6,	8,	10
valeur exacte .873	.862	.831	.783
valeur approchée .877	.869	.845	.805

APPLICATION A LA RECHERCHE DU GROUPE OPTIMUM

Faisons intervenir dans le coût le coefficient d'utilisation.

Pour cela on désigne par :

V. le prix de vente net de l'unité de production (commissions et taxes déduites)

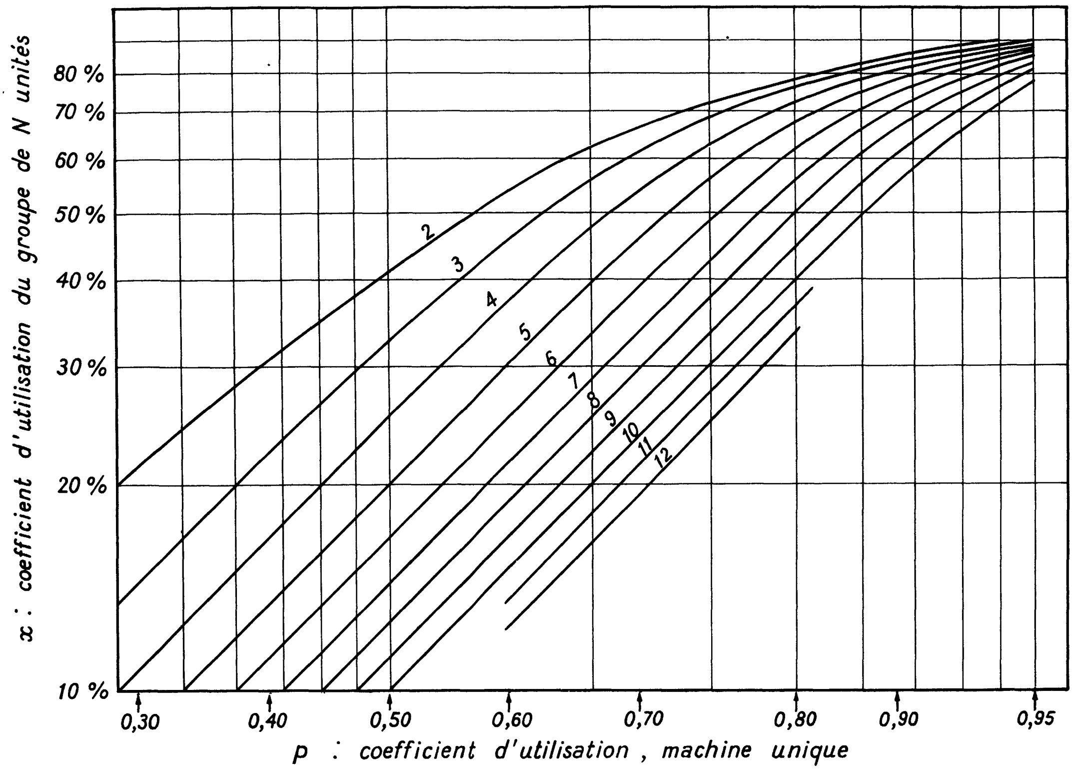

Fig. 3

c. le coût horaire de consommation : matières premières, énergie, proportionnelles à l'utilisation.

d. le coût horaire des charges proportionnelles au temps (amortissement compris).

s. les taux horaires des salaires.

La recette horaire par machine est Vx. Le coût $= cx + d + \frac{s}{N}$ pour N machines conduites ensemble.

Une première méthode cherche à maximiser le bénéfice par unité de temps, c'est un calcul de **rentabilité.** Le bénéfice horaire B (N), fonction de N, s'écrit :

$$B(N) = x(V - c) - d - \frac{s}{N} \cdot$$

La constante n'intervenant pas, il suffit d'étudier

$$x(V - c) - \frac{s}{N}$$

ou encore :

$$x - \frac{s}{V - c} \cdot \frac{1}{N} \cdot$$

C'est la distance de la courbe représentative du coefficient d'utilisation x (fonction de N) à l'hyperbole, d'équation :

$$\frac{s}{V - c} \cdot \frac{1}{N}$$

qui est tracée en pointillé sur la figure 4.

Cette distance est maximum pour une certaine valeur de N obtenue en faisant glisser verticalement l'hyperbole tracée sur transparent jusqu'à ce que les deux courbes soient tangentes. L'abscisse du point de contact donne la valeur de N cherchée. Pour des métiers à tisser de type classique, on a : $p \simeq 0{,}90$ et

$s/(V-c) = 4$. La figure donne le tracé pour ces valeurs numériques. On trouve N = 10 métiers.

Une deuxième méthode fait intervenir le prix de revient unitaire minimum. C'est un calcul d'**économicité.** Le prix de vente n'apparait pas.

Prenons le coût horaire déjà exprimé :

$$\text{Coût horaire} : cx + d + \frac{s}{N} \cdot$$

$$\text{Le prix de revient unitaire} = c + \frac{d}{x} + \frac{s}{Nx}.$$

Il est minimum en même temps que

$$\left(\frac{d}{s} + \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{1}{x} ,$$

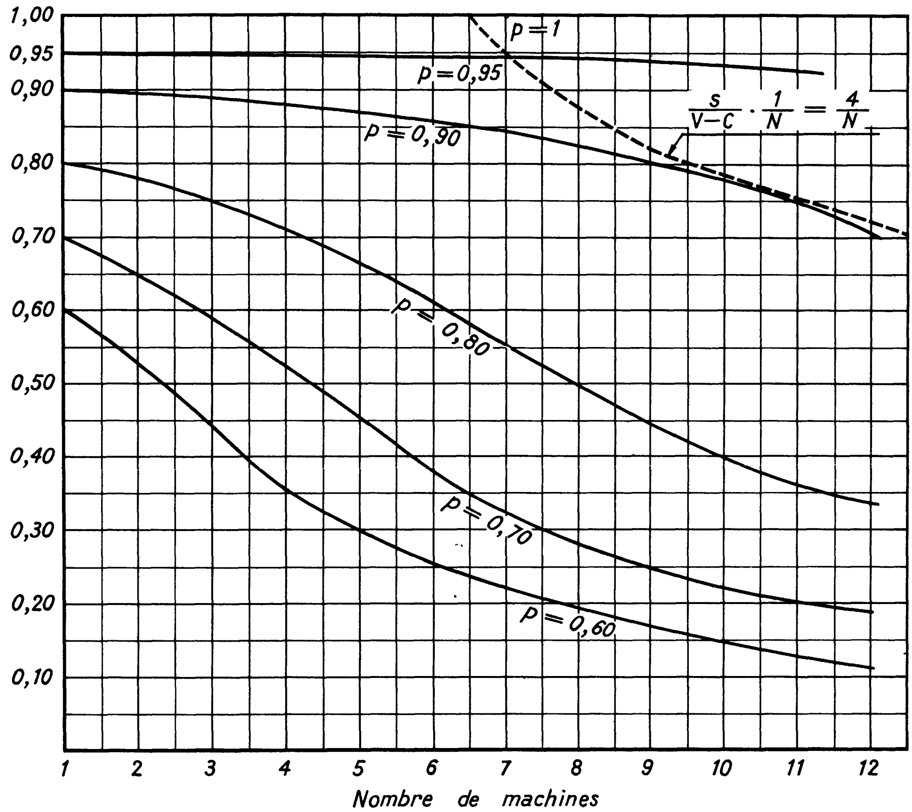

Fig. 4

puisque la constante n'intervient pas. Le calcul se fait pratiquement en évaluant quelques points. Par exemple, dans le même tissage déjà signalé, $s/d = 1$, d'où le tableau :

p = 0,90			
N	$1 + \frac{1}{N}$	$\frac{1}{x}$	$(1 + \frac{1}{N}) \frac{1}{x}$
5	1.20	1.14	1.370
6	1.16	1.16	1.345
7	1.14	1.18	1.345
8	1.12	1.20	1.344
9	1.11	1.23	1.370

Le minimum se trouve au voisinage de 6, 7, 8, au lieu de 10 métiers trouvés précédemment. Cet différence s'explique par l'introduction dans le calcul de rentabilité du bénéfice horaire B (N) Il y a avantage a fabriquer une quantité légèrement plus grande pour un P.R. légèrement plus élevé. Si le prix de vente décroit et tend vers le prix de revient unitaire, alors B (N) = 0.

$$v = c + \frac{d}{x} + \frac{s}{Nx} = \text{PR unitaire} .$$

On retrouve le calcul d'économicité.

Le calcul de rentabilité est plus général, il est mieux adapté aux besoins de la gestion de l'entreprise et, sur le plan économique, il satisfait au théorème du **rendement social** de ALLAIS. Par contre il n'est pas toujours possible de calculer simplement le prix de vente V de l'unité de production. En effet, si l'on considère plusieurs stades dans le processus de fabrication, on peut trouver une estimation du prix de vente V au stade i en exprimant que le bénéfice net réalise a ce stade est proportionnel du Prix de revient du produit mi-fini.En pratique, cette approximation n'est pas très bonne: des calculs de **régression multiple** montrent que les taux partiels de bénéfices sont différents pour les matières et pour les oeuvres effectuées aux différents stades du processus et, quelques-uns de ces taux partiels peuvent être significativement négatifs. C'est pourquoi il est quelquefois préférable d'adopter la définition d'économicité pour obtenir des résultats comparables entre plans d'organisation.

En résumé, cette étude constitue une base de recherche. Elle permet de prévoir l'ajustement de salaires plus élevés aux agents dont le degré d'occupation et la responsabilité seront accrus ; de plus, elle montre que souvent, de faibles variations du paramètre p, lié aux qualités des matières, entrainent de grandes variations dans le coefficient x d'utilisation du groupe. C'est donc un champ très large qui est ouvert aux recherches du bureau d'études (Contrôle de qualité, recherche des spécifications matières, organisation du travail).