

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

J. C. MATHIEU

## Étude de la variabilité des épaisseurs des feuilles de fer blanc

*Revue de statistique appliquée*, tome 3, n° 1 (1955), p. 35-41

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1955\\_\\_3\\_1\\_35\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_35_0)

© Société française de statistique, 1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉTUDE DE LA VARIABILITÉ DES ÉPAISSEURS DES FEUILLES DE FER BLANC

par

**J. C. MATHIEU**

*Ingénieur à la Société Lorraine de Laminage Continu*

*Le développement de la technique permet parfois de remplacer le contrôle de réception sur échantillon d'une fabrication en grande série par un triage automatique de tous les objets fabriqués. Mais l'urgence de rapidité imposée au dispositif de triage en limite la précision : aussi, ce mode de contrôle entraîne-t-il, tout comme le contrôle sur échantillon, le rejet d'une certaine proportion d'objets conformes et l'acceptation d'une autre proportion d'objets non conformes.*

*La détermination de ces proportions en fonction du réglage du dispositif de triage permet de choisir, en connaissance de cause, le meilleur réglage — qui ne sera généralement pas le réglage sur les tolérances imposées — et de déterminer s'il est nécessaire de procéder à un tri plus précis du rejet.*

*M. Mathieu, ingénieur chargé des études statistiques à la S.O.L.L.A.C., a été amené à étudier un tel problème dans le but d'estimer les possibilités du matériel américain qui constitue les installations de l'usine.*

*Cette étude a conduit à définir la dispersion d'épaisseur affectant les produits finis et à élaborer des normes de contrôle qui permettent de satisfaire le plus économiquement possible les tolérances commerciales en vigueur.*

Un des intérêts de l'étude de la variabilité d'un processus opératoire est d'éclairer le producteur sur les conséquences qu'impliquent la fixation d'un barème de tolérance. Pour le producteur, tolérance est synonyme d'élimination, de triage, par conséquent de perte et de rejet.

De plus, certaines fabrications à haute cadence de production ne permettent pas d'exécuter le triage en contrôlant individuellement chaque objet ou produit avec une précision telle qu'aucun doute ne subsiste plus sur la conformité ou la non-conformité à un standard de qualité bien défini. Dans ces conditions on peut être amené à préférer au triage par contrôle individuel et total, les modalités d'un triage par sondage, mais nous allons voir que ni l'un ni l'autre de ces processus n'est entièrement satisfaisant.

Les triages par sondage, quelle que soit la variété du sondage utilisé, permettent d'exécuter sur un petit nombre d'objets prélevés des mesures précises à peu près dénuées d'erreur. Mais en étendant la signification de ces mesures fragmentaires à l'ensemble virtuel d'où elles sont extraites, on risque de commettre une erreur dite d'échantillonnage, tantôt au détriment du producteur (le client refuse un lot "bon"), tantôt au détriment du consommateur (le client accepte un lot "mauvais"). Le triage par contrôle total, lui, puisqu'il passe en revue tous les objets sans exception, élimine purement et simplement cette erreur. Par contre la mesure faite sur chaque objet ne peut se faire dans les mêmes conditions idéales : elle doit être rapide, presque instantanée. Or cette nécessité primordiale est techniquement limitative de précision. Ce qu'on sacrifie au nombre, on le retire à la précision. Ainsi l'exécution du triage, quelle que soit la forme adoptée entraîne inévitablement des erreurs d'appréciation qui, tantôt viennent

augmenter, tantôt viennent diminuer artificiellement le nombre des produits que l'imprécision du processus opératoire aurait dû condamner systématiquement à l'élimination.

Nous allons voir qu'en l'occurrence, le mode de triage choisi étant le second, ce chassé-croisé ne profite à personne. En effet, s'il est évident qu'il risque d'indisposer et de gêner le consommateur lorsque la proportion de non-conformes livrés dépasse une certaine valeur, toujours très faible, qui dépend du prix et de l'utilisation du produit, en revanche, quelles que soient les erreurs commises par le dispositif de triage, à condition qu'elles ne relèvent que du hasard bien entendu, le rejet obtenu pratiquement ne peut être inférieur à celui que l'on aurait provoqué si le triage avait été exécuté d'une manière rigoureuse et idéale. Le problème revient donc à déterminer, eu égard à un certain critère de tolérance et compte tenu de la variabilité du processus de fabrication, les conditions dans lesquelles il faut exercer le triage pour que :

- 1°) les produits conformes soient préservés contre une proportion limite d'acceptation de non-conformes par le client, cette limite étant à débattre.
- 2°) les produits classés en rejet ne comportent pas une proportion excessive de conformes qui ne seraient récupérables qu'au prix d'un triage feuille à feuille beaucoup plus précis, par conséquent long et onéreux.

Le fer blanc laminé à froid en bandes de métal cisailées ensuite en feuilles, se substituant à l'ancien fer blanc laminé à chaud par paquets de feuilles, il fallait attribuer à ce produit nouveau (en France) des tolérances en rapport avec ses caractéristiques métallurgiques et les contingences du marché des consommateurs de fer blanc. De plus, il s'avérait indispensable d'assurer à la production, étant donné son importance, un écoulement aussi simple que possible, confiant à des dispositifs automatiques toutes les opérations de triage et de classement. Le circuit de fabrication du fer blanc présente deux étapes principales en ce qui concerne les épaisseurs. D'abord le laminage proprement dit au cours duquel l'épaisseur de la bande de métal est centrée sur une certaine valeur nominale grâce aux indications d'une jauge à Rayons X. Ensuite, après cisailage de cette bande en feuilles, le triage automatique classant en produits conformes ou non-conformes à l'épaisseur nominale visée, la totalité de la production suivant des tolérances d'épaisseur que le dispositif de triage permet de régler à volonté.

Il s'agissait donc en premier lieu de déterminer la variabilité du laminoir à froid et de l'explicitier par une courbe de densité de probabilité d'épaisseurs caractérisant la population des bobines produites pour une épaisseur nominale déterminée. Pour cela on a choisi convenablement un certain nombre de profils de bandes obtenus par l'enregistrement en continu des indications de la jauge d'épaisseur à Rayons X et on les a découpés en tronçons au sein desquels l'épaisseur ne variait pas de plus de 1 % de l'épaisseur nominale (0,25 mm). Puis on a reporté ces tronçons suivant l'épaisseur qu'ils accusaient dans les différentes classes d'épaisseur résultant de la décomposition en pourcent de l'épaisseur nominale. On a ainsi obtenu un histogramme de fréquence donnant la répartition des longueurs des bandes entre les différentes épaisseurs possibles. On a testé le caractère gaussien de l'histogramme obtenu. La courbe de Gauss ajustée explicite dont la loi de distribution des épaisseurs des bandes le long de la ligne virtuelle explorée par le pinceau de Rayons X. Aucune erreur de visée systématique n'a jamais été décelée sur un lot important de bandes, grâce à la surveillance attentive et aux étalonnages systématiques de la jauge à Rayons X.

Les bobines obtenues après laminage à froid subissent, avant d'être cisailées en feuilles, divers traitements qui ne modifient pas sensiblement le profil d'épaisseur acquis. Après cisailage et avant d'être empilées par paquets, ces feuilles sont l'objet d'un triage contrôlé par une jauge d'épaisseur, électromécanique, celle-ci. En réalité ce triage s'élabore avant le cisailage. En effet, l'appréciation de l'épaisseur se fait en continu sur la bande, avant qu'elle ne soit découpée

et sensiblement au même endroit que pour la jauge à Rayons X. La jauge étant réglée pour l'épaisseur nominale correspondant à l'épaisseur visée au laminoir, on introduit en plus deux limites de tolérances. Lorsque l'une ou l'autre de ces limites est atteinte un volet est déclenché avec un retard compatible avec la distance qui le sépare de la jauge et la vitesse de défilement des feuilles. Sa nouvelle orientation canalise ainsi en rejet la ou les feuilles découpées dans la zone de bande réputée être hors tolérances.

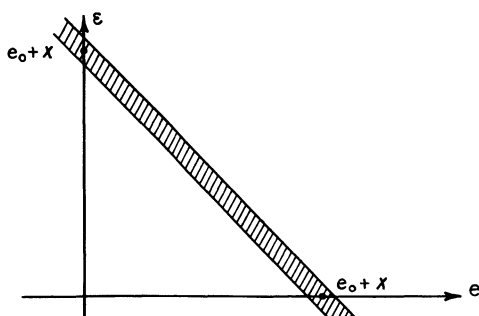
Or la jauge associée à son volet de triage ne possède qu'une précision limitée. Ses erreurs offrent la possibilité tantôt à une feuille ayant une épaisseur inférieure à la tolérance d'être canalisée en rejet, tantôt à une feuille hors tolérance d'être introduite dans les produits conformes. Ces éventualités ont évidemment une probabilité qui varie en fonction de l'épaisseur de la feuille considérée. Le rejet n'est donc pas ce que l'on pourrait calculer simplement de déterminant l'aire des extrémités de la courbe de Gauss traduisant la variabilité du laminoir, ces extrémités étant délimitées par les valeurs des tolérances,  $\pm x$  par exemple. Il faut tenir compte de l'imprécision du triage. Pour l'atteindre et la déterminer mathématiquement on a prélevé systématiquement les feuilles "responsables du déclenchement du volet" et on a mesuré au micromètre de précision, l'épaisseur qu'elles accusaient le long de la ligne virtuelle explorée par la jauge de triage. Par "feuille responsable du déclenchement du volet" il faut entendre la première d'une série quelconque de feuilles consécutives envoyées en rejet, le volet ne revenant pas à sa position initiale entre chacune de ces feuilles puisque l'appréciation continue de l'épaisseur condamne non pas des feuilles considérées indépendamment les unes des autres, mais une certaine portion de bande à être canalisée en rejet. Reste à savoir maintenant la signification qu'il convient d'attribuer aux mesures d'épaisseur exécutées sur ces feuilles et à leur répartition.

Soit  $e$  l'épaisseur réelle d'une feuille. En appréciant cette épaisseur la jauge commet une erreur  $\epsilon$ . Elle interprète donc  $e + \epsilon$ . Appelons  $f(e)$  et  $g(\epsilon)$  les densités de probabilité caractérisant d'une part la population des épaisseurs  $e$  des feuilles soumises au triage, d'autre part la loi des erreurs  $\epsilon$  commises par la jauge. L'expression mathématique de  $f(e)$  est entièrement connue, car elle caractérise aussi la loi de distribution des épaisseurs laminées. L'identification est justifiée puisque cette distribution a été obtenue comme étant la répartition moyenne de la longueur des bandes entre toutes les classes d'épaisseurs possibles. Par contre  $g(\epsilon)$  est précisément ce que l'on cherche.

Admettons en première approximation que les variables  $e$  et  $\epsilon$  sont indépendantes, c'est-à-dire que les erreurs ne dépendent pas de l'épaisseur réelle de la bande au moment de son appréciation. La probabilité élémentaire pour que la jauge rencontre une feuille (virtuelle, car elle n'est pas encore découpée) d'épaisseur  $e$  sur laquelle elle commettra une erreur d'appréciation  $\epsilon$  est donc  $f(e) g(\epsilon) de d\epsilon$ ,

$f(e) g(\epsilon)$  représente la densité de probabilité de la loi à deux variables indépendantes  $e$  et  $\epsilon$ .

Supposons que l'on trie pour une épaisseur nominale  $e_0$  et des tolérances symétrique  $\pm x$ . Considérons la seule limite supérieure de tolérance. Les



feuilles "responsables du déclenchement du volet" sont celles pour lesquelles :  $e + \epsilon = e_0 + x$  ( $x$  limite supérieure de tolérance introduite dans la jauge). Dans

le plan  $(e, \varepsilon)$  concrétisant le champ de probabilité total, ces feuilles sont telles que leurs coordonnées  $(e, \varepsilon)$  se trouvent à l'intérieur de la bande élémentaire hachurée, centrée sur la droite  $e + \varepsilon = e_0 + x$  et de largeur  $dx$ . Les probabilités que l'on lit sur la loi de distribution des épaisseurs réelles de ces feuilles ont le sens de probabilités conditionnelles. L'évènement conditionnel est le déclenchement du volet provoqué par le triage d'une population gaussienne d'épaisseurs dont les paramètres sont bien déterminés. Par conséquent la probabilité élémentaire  $f_{e/D}$  de d'une épaisseur  $e$  dans l'ensemble des feuilles ayant déclenché le volet admet pour valeur la probabilité élémentaire de trouver une feuille de coordonnées  $(e, \varepsilon)$  situées à l'intérieur de la bande hachurée, cette dernière devant être rapportée au champ de probabilité conditionnel, c'est-à-dire à l'étendue de la bande elle-même.

La probabilité élémentaire de trouver une feuille de coordonnées  $(e, \varepsilon)$  à l'intérieur de la bande hachurée s'obtient en faisant le changement de variable

$$\begin{cases} e + \varepsilon = e_0 + x \\ e = e \end{cases}$$

$$\text{soit : } f(e) g(e_0 + x - e) \frac{D(e, \varepsilon)}{D(e, x)} \text{ de } dx = f(e) g(e_0 + x - e) \text{ de } dx .$$

D'autre part la bande hachurée porte la probabilité :

$$\Pr \left\{ e_0 + x - \frac{dx}{2} \leq e + \varepsilon \leq e_0 + x + \frac{dx}{2} \right\} .$$

$$\text{Or : } \Pr \left\{ e_0 + x - \frac{dx}{2} \leq e + \varepsilon \leq e_0 + x + \frac{dx}{2} \right\} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \Pr \left\{ e + \varepsilon \leq e_0 + x \right\} \right] dx$$

$$\Pr \left\{ e + \varepsilon \leq e_0 + x \right\} = \iint f(e) g(\varepsilon) \text{ de } d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e) \text{ de } \int_{-\infty}^{e_0+x-e} g(\varepsilon) \text{ de } \varepsilon$$

demi plan délimité par :  $e + \varepsilon = e_0 + x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Pr \left\{ e + \varepsilon \leq e_0 + x \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e) g(e_0 + x - e) \text{ de } e = K, \text{ Intégrale définie par rapport à } e$$

$$\text{Ainsi : } f_{e/D} \text{ de } e = \frac{f(e) g(e_0 + x - e) \text{ de } dx}{K \text{ de } dx} = \frac{1}{K} f(e) g(e_0 + x - e) \text{ de } e .$$

L'histogramme de fréquences obtenu à partir des mesures effectuées sur les feuilles prélevées dans les conditions indiquées traduit donc la loi  $f_{e/D}$ . Appelons  $h(e)$  l'estimation expérimentale de  $f_{e/D}$ . On a testé sur plusieurs séries de prélèvements le caractère gaussien de cette loi de probabilité. Mais, par contre, tous les histogrammes étudiés présentaient une moyenne qui différait nettement de la limite de tolérance  $(+x$  ou  $-x)$  introduit dans la jauge, Ceci va se justifier par les calculs ultérieurs ; mais on peut déjà expliquer cette observation par le fait qu'on trie une répartition d'épaisseurs dissymétrique par rapport aux limites de tolérance, ce qui provoque un déplacement systématique de la moyenne vers les épaisseurs les plus fréquentes.

Avant de poursuivre les calculs et pour les simplifier, faisons effectuer une translation à l'axe des  $\varepsilon$  de manière à réaliser  $e_0 = 0$ .  $e$  représenté alors les écarts d'épaisseurs par rapport à l'épaisseur nominale. Ecrivons en outre que lors des prélèvements la jauge ne commettait pas d'erreurs systématiques (ceci avait été vérifié).  $E(\varepsilon) = 0$ . Les développements précédents permettent d'écrire :

$$\frac{1}{K} f(e) g(x - e) = h(e)$$

$$g(x - e) = K \frac{h(e)}{f(e)} \quad \text{où } h(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_v} \exp. - \frac{(e - m_v)^2}{2\sigma_v^2} ,$$

$m_v$  et  $\sigma_v$  ayant été estimés sur l'histogramme de fréquences des épaisseurs des feuilles ayant déclenché le volet.

$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp - \frac{e^2}{2\sigma^2}$ ,  $\sigma$  caractérisant la variabilité du laminoinr.

$$g(x - e) = K \frac{\sigma}{\sigma_v} \exp - \left[ \frac{(e - m_v)^2}{2\sigma_v^2} - \frac{e^2}{2\sigma^2} \right]$$

$$= K \frac{\sigma}{\sigma_v} \exp - \frac{1}{2\sigma^2\sigma_v^2} \left[ \sigma^2(e - m_v)^2 - \sigma_v^2 e^2 \right]$$

$\sigma^2(e - m_v)^2 - \sigma_v^2 e^2$  est un trinôme admettant des racines réelles donc décomposable en un carré contenant e, diminué d'une quantité indépendante de e :

$$\sigma^2(e - m_v)^2 - \sigma_v^2 e^2 = (\sigma^2 - \sigma_v^2) \left[ e - \frac{m_v \sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_v^2} \right]^2 - \frac{\sigma^2 \sigma_v^2}{\sigma^2 - \sigma_v^2} m_v^2.$$

Par conséquent  $g(x - e)$  traduit aussi une loi de Gauss comme il fallait s'y attendre, et celle-ci s'explícite en fonction des paramètres étudiés par :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma \sigma_v}{\sqrt{\sigma^2 - \sigma_v^2}} \exp - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \sigma_v^2}{\sigma^2 - \sigma_v^2} \left( e - \frac{m_v \sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_v^2} \right)^2.$$

Il en résulte que l'écart type caractérisant la loi spécifique des erreurs

d'appréciation du dispositif de triage a pour valeur

$$\sigma_\epsilon = \frac{\sigma \sigma_v}{\sqrt{\sigma^2 - \sigma_v^2}}.$$

En outre puisque  $E(\epsilon) = 0$ ,  $e - x = e - \frac{m_v \sigma^2}{\sigma^2 - \sigma_v^2}$  soit  $m_v = x \frac{\sigma^2 - \sigma_v^2}{\sigma^2}$  comme ceci avait été observé expérimentalement.

Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments nécessaires au calcul du rejet réel provoqué par l'introduction dans la jauge de tolérances symétriques ( $\pm x$ ). On continuera à ne considérer que la limite supérieure de tolérance, la résolution du problème étant parfaitement symétrique pour l'autre limite.

Le "rejet élémentaire" pour une épaisseur e est égal à la probabilité élémentaire de e dans la loi de distribution des épaisseurs laminées, multipliée par la probabilité pour que cette épaisseur e soit interprétée par la jauge comme étant égale ou supérieure à x ( $e_0 = 0$ ), cette interprétation signifiant que le volet se déclenche ou est déjà orienté vers le rejet. Il a donc pour expression mathématique :

$$f(e) \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] \text{ de }.$$

Le rejet total est l'intégrale de ce rejet élémentaire étendue à toutes les épaisseurs rencontrées et aux 2 limites de tolérance, soit :

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(e) \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] \text{ de }.$$

C'est une fonction R(x) des limites de tolérance qui peut s'explíciter plus simplement en remarquant que :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(e) \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] \text{ de} = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(e) g(x - e) \text{ de}$$

$$f(e) g(x - e) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_\epsilon} \exp - \left[ \frac{e^2}{2\sigma^2} + \frac{(e - x)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma \sigma_\epsilon}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2}} \left[ \exp - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 \sigma_\epsilon^2}{\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2} \left( e - \frac{x \sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2}} \exp - \frac{x^2}{2(\sigma^2 + \sigma_\epsilon^2)}$$

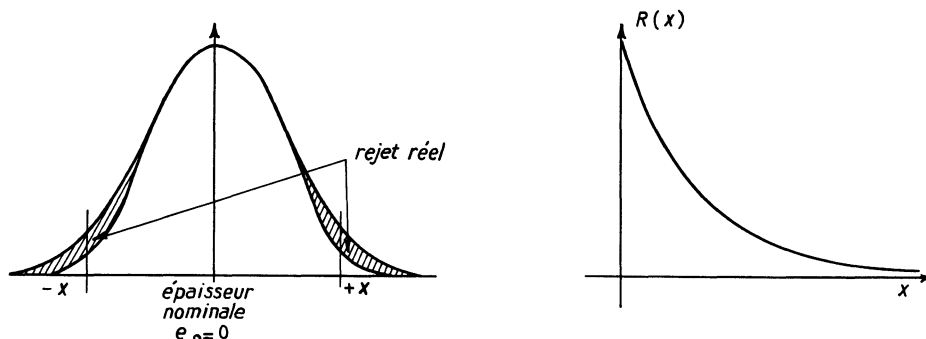
L'intégrale de  $-\infty$  à  $+\infty$  du premier terme du produit qui, seul, contient  $e$  est égale à 1 puisque l'élément différentiel traduit une loi gaussienne.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(e) g(x - e) de = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_e^2}} \exp - \frac{x^2}{2(\sigma^2 + \sigma_e^2)}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = - 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_e^2}} \exp - \frac{x^2}{2(\sigma^2 + \sigma_e^2)}$$

$$\text{et } R(x) = 2 \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma^2 + \sigma_e^2}} \exp - \frac{x^2}{2(\sigma^2 + \sigma_e^2)} dx .$$

On peut donc construire aisément la courbe représentative de  $R(x)$  en fonction de  $x$  à partir des tables de la fonction des probabilités totales de la loi de Gauss.



Ainsi on trouve pour les réglages de tolérance de :

$\pm 10\mu$  un rejet moyen de 9,296 % des longueurs de bande au lieu de 6,876, calculés d'après l'aire des extrémités de la courbe de Gauss des épaisseurs laminées tronquée à  $\pm x$  ;

$\pm 15\mu$  un rejet moyen de 1,174 % au lieu de 0,634

$\pm 20\mu$  un rejet moyen de 0,072 % au lieu de 0,028

Des considérations d'ordre commercial nous ayant amenés à admettre que le triage en épaisseur ne doit laisser subsister dans les produits conformes que trois classes d'épaisseur de 1/100 mm centrées sur l'épaisseur nominale  $e_0$ , ceci imposait à priori l'élimination de toute feuille dont l'épaisseur serait extérieure à l'intervalle  $e_0 \pm 15\mu$ . Or, en toute rigueur, si l'on affecte à la jauge effectuant le triage des tolérances d'exploitation de  $\pm 15\mu$ , on provoquera conformément à ce qui a été dit au début de cet exposé :

- d'une part une aliénation de l'homogénéité en épaisseur des feuilles constituant les paquets conformes en introduisant une certaine proportion de feuilles extérieures à l'intervalle  $e_0 \pm 15\mu$  ;
- d'autre part une perte de produits conformes évacués en rejet et qu'on ne pourra récupérer qu'au prix d'un triage manuel feuille à feuille.

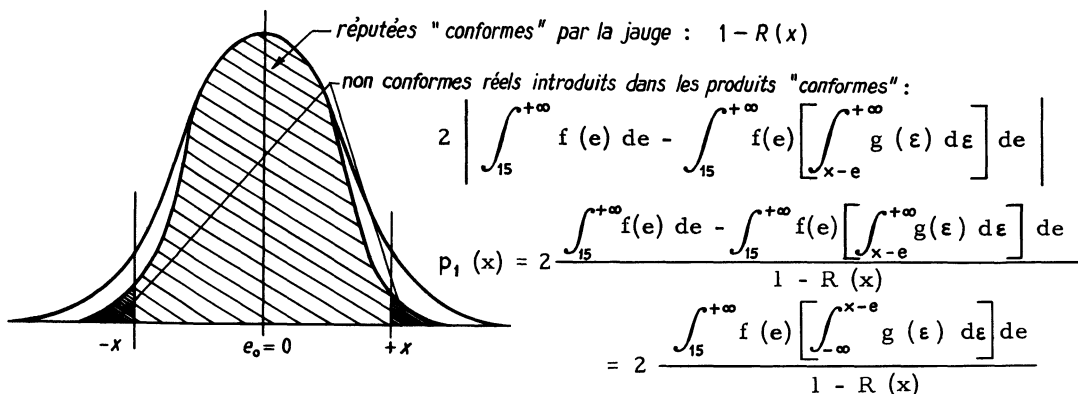
Il est impossible de concilier ces deux facteurs antagonistes, la diminution de l'un entraînant systématiquement l'augmentation de l'autre. Seul un compromis basé sur l'étude en fonction des tolérances d'exploitation  $\pm x$ , des variations corrélatives :

- 1\*) de la proportion des hors tolérances commerciales ( $\pm 15\mu$ ) dans les paquets conformes
- 2\*) de la proportion des feuilles conformes introduites en rejet, permet de se fixer  $x$  en connaissance de cause.

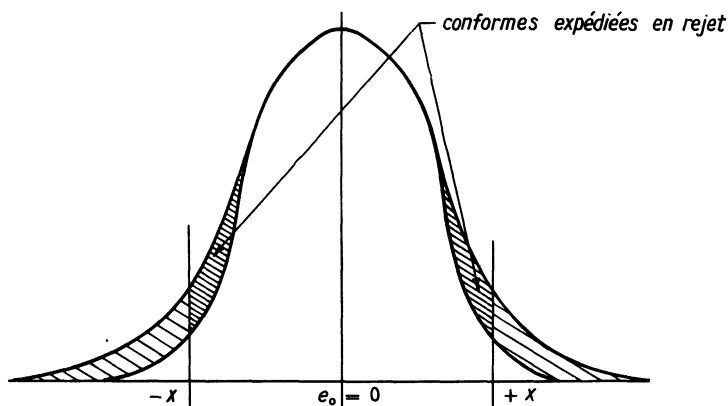
REMARQUE :

Ces proportions. peuvent s'expliciter par des expressions mathématiques, mais leur formulation n'est pas simple et ne se prête pas à des calculs numérique immédiats.

En effet la première  $p_1(x)$  s'exprime par le rapport du nombre de feuilles non conformes ( $e \geq 15\mu$   $e \leq -15\mu$ ) expédiées dans les produits conformes par suite des erreurs de la jauge, sur le nombre total de feuilles réputées conformes.



Quant à la seconde, c'est le rapport  $p_2(x)$  du nombre de feuilles conformes ( $-15\mu < e < +15\mu$ ) expédiées en rejet sur le rejet total.



$$2 \int_{-15}^{+15} f(e) \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] de \neq 2 \int_{-\infty}^{+15\mu} f(e) \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] de$$

$$p_2(x) = \frac{2 \int_{-\infty}^{+15\mu} f(e) \left[ \int_{x-e}^{+\infty} g(\epsilon) d\epsilon \right] de}{R(x)}$$

(1) Noter d'ailleurs que ce résultat n'est qu'approximatif car il ne tient pas compte de la possibilité, pour une feuille trop épaisse, d'être rejetée comme trop mince.