Revue de statistique appliquée

J. Gelain

Réflexions sur le mode d'expression des conclusions statistiques

Revue de statistique appliquée, tome 3, n° 1 (1955), p. 103-106

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1955__3_1_103_0>

RÉFLEXIONS
SUR LE MODE D'EXPRESSION
DES CONCLUSIONS STATISTIQUES

par

J. GELAIN

Directeur-Adjoint des Recherches au Centre Technique des Industries de la Fonderie

I

En lisant, au cours des pluvieuses dernières vacances, un de ces vieux livres d'histoire que l'on conserve à la campagne, de génération en génération dans un coin de la bibliothèque familiale, j'y trouvais le récit que voici :

Cela se passe à PARIS en août 1835. Le mois précédent avait eu lieu l'attentat de FIESCHI contre LOUIS-PHILIPPE, avec cette machine infernale qui épargna le roi, mais faucha littéralement son escorte, tuant onze gardes ou officiers (dont un maréchal de France) et blessant plus ou moins grièvement une trentaine de personnes.

Naturellement le gouvernement d'alors voulut profiter de l'émotion causée dans le pays par cet attentat pour faire voter par le Parlement quelques lois repressives. Parmi ces lois(dont la plus importante concernait la presse, mais qui ne nous intéresse pas ici), il y en avait une relative au jury et en particulier à la majorité requise pour pouvoir prononcer une condamnation. Jusque là, cette majorité était celle des deux tiers, soit 8 contre 4, puisqu'il y avait 12 jurés. La proposition de loi consistait simplement à ramener cette majorité des deux tiers à la majorité simple : 7 contre 5.

Non moins naturellement, l'opposition prit parti contre la loi et lorsque celle-ci vint en discussion entre le 14 et le 20 août 1835, ARAGO, qui était un des membres les plus influents de cette opposition, prit la parole et voici le texte de son intervention, telle qu'il est rapporté aux pages 314 et 315 du tome XII de "L'Histoire de l'Europe depuis l'Avènement du roi Louis-Philippe" par M. CAPEFIGUE (Bruxelles, Méline Cans et Cie, 1846)

Monsieur ARAGO - "Vous parlez de certitude juridique ; j'ai vérifié et refait les calculs de LAPLACE, de BERNOUILLI, de CONDORCET, et je me suis convaincu par moi-même qu'à la majorité de 7 contre 5, la probabilité d'erreur était dans la proportion de un sur quatre ; j'admets au surplus que la probabilité de se tromper est tantôt favorable, tantôt contraire à l'accusé. Pour faire la part de la seule probabilité contre l'accusé, je doublerai donc les chances et j'arriverai à cette certitude mathématique que sur 8 jugements, il y a une erreur au préjudice de l'accusé. Eh bien ! n'est-ce donc rien que d'avoir la certitude que quand on fait monter 8 accusés sur l'échafaud, il y en a un d'innocent ?"

C'est devant ce texte que nous sommes restés en arrêt.

Il se ressent de l'improvisation peut être, mais certainement de la passion politique. C'est pourquoi nous ne pensons pas qu'il y ait quelque irrévérence de notre part à lui trouver quelques défauts.

II

C'est une tendance assez répandue et d'ailleurs compréhensible que de vouloir présenter les conclusions statistiques dans un langage courant, facilement accessible et faisant image.

On sait bien que ces conclusions ne devraient s'exprimer qu'en termes de probabilité, et pour ceux qui sont quelque peu familiers avec le calcul des probabilités, elles ont ainsi un sens suffisamment clair sans qu'il soit besoin de les accompagner de commentaires.

Cependant le plus souvent on les traduit en pour cent de chances. Par exemple, on dira qu'une éventualité de probabilité 0,20 est une éventualité qui a 20 chances sur 100 de se produire. Ce qui est parfaitement correct, mais ce que beaucoup comprennent que sur 100 cas, l'éventualité en question doit se produire 20 fois. Le mal n'est pas encore bien grave, car 100 est déjà un nombre relativement grand et il est probable que sur 100 cas intéressant l'éventualité considérée, celle-ci se produira un nombre de fois suffisamment voisin de 20 pour que l'attention ne soit pas trop surprise par la différence qui pourrait être effectivement constatée.

Mais il arrive que l'on va beaucoup plus loin et l'on dit qu'une éventualité de probabilité 0,20, pour garder l'exemple précédent, est une éventualité qui a une chance sur 5 de se produire. Ce n'est pas non plus incorrect en soi. Mais ce qui, cette fois devient grave, c'est que certains traduisent encore que cela signifie que sur 5 cas l'éventualité considérée doit se produire une fois.

Reconnaissons que la lecture du texte cité pourrait leur servir de sérieuse caution.

Or, il est facile de faire quelques expériences rapides et simples, comme de jouer aux dés ou à pile ou face, pour constater que le résultat peut être tout autre que celui attendu, et comme en général on ne va pas plus loin dans l'explication de ce résultat, il en reste un certain scepticisme ou tout au moins une sorte de préjugé défavorable à l'égard des méthodes statistiques.

III

Revenons maintenant au texte qui a motivé ces quelques réflexions.

Il nous paraît d'abord comporter une petite erreur - du moins si nous l'avons bien compris. Il nous semble qu'au fond ARAGO admet d'une part que la probabilité qu'a un juré de se tromper est de 1/2 et d'autre part que la probabilité pour un prévenu d'être coupable est aussi de 1/2. Autrement dit chaque rendu de jugement peut être assimilé à une partie de 12 coups de pile ou face. Supposons par exemple qu'on choisisse pile pour coupable. La probabilité de voir apparaître 7 piles et 5 faces est

$$C_{12}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 0,193 ,$$

soit en chiffres ronds 0,20 (et non 0,25, un sur quatre, comme il ressort du texte). Et comme la probabilité que pile représente coupable n'est que de 1/2, la probabilité d'erreur contre l'accusé, suivant l'expression du texte, est en chiffres ronds $0,20 \times 1/2 = 0,10$.

Mais l'important n'est pas là. Le véritable défaut du texte est de laisser croire qu'une éventualité de probabilité 0,10 se produira certainement 1 fois sur 10 cas.

Or, nous savons bien qu'il est impossible d'avancer une telle affirmation. Il suffit de se reporter aux tables de la loi binomiale pour voir que sur 10 répétitions, une telle éventualité a une probabilité encore très importante, puisqu'elle est égale à 0,3487, de ne pas se produire. Si on voulait parler de certitude ou plutôt de quasi-certitude (et, en admettant, ce qui paraît raisonnable qu'une probabilité de 0,999 représente une telle quasi-certitude), les mêmes tables montrent qu'il faudrait aller au moins jusqu'à 60 répétitions pour pouvoir dire que l'éventualité en question est certaine de se produire.

IV

Encouragé par l'exemple de BUFFON, qui ne dédaigna pas de faire 4040 parties de pile ou face, nous avons voulu voir dans quelle mesure les résultats pratiquement trouvés s'accordaient avec les résultats théoriques.

Et tout d'abord, il nous est apparu qu'il n'était peut être pas si facile qu'on le croit de jouer à pile ou face en laissant au hasard toute sa chance ou, si l'on veut, en étant sur de n'introduire aucun biais dans les essais, Nous avons renoncé à jouer coup par coup et après quelques tâtonnements, nous nous sommes arrêtés aux conditions expérimentales suivantes : nous avons utilisé 12 pièces en aluminium de 1 Fr. On a choisi un vaste local d'environ 4,50 m de hauteur de plafond et dont le plancher était recouvert d'un tapis destiné à empêcher les pièces de se déformer au choc et aussi de trop rouler. On mettait les 12 pièces dans une boîte en carton tronconique (pot de miel de 1 kg). Chaque fois on agitait soigneusement la boite dans tous les sens. Puis on prenait les pièces à poignée et on lançait la poignée en l'air en faisant varier le plus possible les hauteurs de chute. Dans ces conditions, nous avons fait 500 parties de 12 coups chacune.

Les résultats obtenus sont portés dans la colonne 0 du tableau suivant, les autres colonnes comportant les chiffres calculés pour éprouver à l'aide du test de χ^2 l'ajustement à la loi binomiale.

On trouve χ^2 = 13,42, ce qui pour 8 degrés de liberté correspond à un ajustement admissible.

Combinaisons possibles	probabilité	Fréquences théoriques calculées C		Fréquences observées O		$\frac{(O - C)^2}{C}$
12 P	0,0002441	0,1220	9,6419	0	15	2,97
11 P - 1 F	0,0029292	1,4646		2		
10 P - 2 F	0,0161106	8,0553		13		
9 P - 3 F	0,0537020	26,8510		21		1,27
8 P - 4 F	0,1208295	60,4147		76		4,02
7 P - 5 F	0,1933272	96,6636		88		0,77
6 P - 6 F	0,2255484	112,7742		115		0,04
5 P - 7 F	0,1933272	96,6636		83		1,93
4 P - 8 F	0,1208295	60,4147		58		0,09
3 P - 9 F	0,0537020	26,8510		30		0,36
2 P - 10 F	0,0161106	8,0533	9,6419	13	14	1,97
1 P - 11 F	0,0029292	1,4646		1		
12 F	0,0002441	0,1220		0		
						χ^2 = 13,42

Cependant, nous avons été un peu surpris de trouver un χ^2 aussi élevé. Comme on le voit cela provient des combinaisons extrêmes qui sont sorties plus fréquemment qu'on aurait pu s'y attendre - en particulier la combinaison 8 piles 4 faces qui est apparue 76 fois en regard d'une valeur théorique de 60. Pour cette combinaison de probabilité 0,1208, et en substituant à la loi binomiale la loi normale de moyenne.

$$m = 0,1208 \times 500 = 60,41$$

et d'écart-type $$s = \sqrt{500 \times 0,1208 \times 0,8792} = 7,287\ ;$$

on voit que l'écart réduit est $t = \frac{15,59}{7,28} = 2,15$ ce qui correspond à une probabilité assez faible de 0,03.

V

Sur cet ensemble de 500 parties de 12 coups, soit au total 6 000 coups, on a pu faire quelques remarques intéressantes.

En particulier on constate que sur les 6 000 coups, pile est sorti 3 019 fois, soit avec une fréquence relative de 0,5031 - ce qui est en excellent accord avec la probabilité théorique.

La combinaison 7 piles - 5 faces (qui avait été choisie comme entraînant le jugement de culpabilité) est apparue 88 fois, ce qui correspond à une fréquence relative de 0,176 pour une probabilité théorique de 0,193 - accord encore très convenable.

Si on range les 500 parties de 12 coups en 50 groupes de 10 parties chacun, dans l'ordre chronologique des parties, on a trouvé que pour 8 de ces groupes, la combinaison 7 piles - 5 faces n'est jamais apparue.

Si on les range en 25 groupes de 20 parties chacun, en respectant l'ordre chronologique des parties, on trouve qu'il y a encore 3 groupes pour lesquels la combinaison 7 piles - 5 faces n'est pas apparue.

Enfin, si on fait des groupes de 30 parties, toujours dans l'ordre des parties, on constate que dans les 16 groupes complets ainsi obtenus, cette combinaison 7 piles - 5 faces est toujours apparue au moins une fois.

VI

Ces résultats corroborent ce qui a été dit plus haut. Mais nous nous garderons bien de les rattacher à d'éventuelles erreurs judiciaires.

Car outre les remarques qui précèdent la lecture de cette page d'histoire nous a suggéré une dernière réflexion : c'est qu'il peut être vain et même dangereux d'appliquer les méthodes statistiques à des phénomènes dont on n'est pas absolument sûr qu'ils relèvent bien des lois statistiques. La règle, dans le doute, devrait être de s'abstenir.

Sinon, on risque de s'attirer quelque remarque du genre de celle qui fut faite précisément à ARAGO lui-même à la fin de son intervention. En effet, un obscur député du nom de RENOUARD laissa alors tomber cette simple observation:

"On peut être très fort sur les mathématiques, et voir faussement une question de morale et de législation".