DARMOIS

Comparaison des moyennes de deux populations normales d'écarts-types inconnus et différents. Test de Darmois

Revue de statistique appliquée, tome 2, n° 3 (1954), p. 37-41

<http://www.numdam.org/item?id=RSA_1954__2_3_37_0>

COMPARAISON DES MOYENNES DE DEUX POPULATIONS NORMALES D'ÉCARTS-TYPES INCONNUS ET DIFFÉRENTS

TEST DE **DARMOIS**

I. — BUT DU TEST.

Comparaison de 2 populations normales :

P_1 de moyenne m_1 et d'écart-type σ_1 inconnus ;

P_2 de moyenne m_2 et d'écart-type σ_2 inconnus.

On désire tester (sur échantillons) l'hypothèse d'égalité des moyennes :

$$(H) \; : \; m_1 - m_2 .$$

II. — PRINCIPE DU TEST.

Sous des réserves très larges — en ce qui concerne la distribution des populations — on sait que si :

$\bar{x}$ est la moyenne d'un échantillon de n_1 observations provenant d'une population P_1,

$\bar{y}$ est la moyenne d'un échantillon de n_2 observations provenant d'une population P_2,

la variable aléatoire $d - \bar{x} - \bar{y}$ est normalement distribuée autour de $m_1 - m_2$ avec une variance :

$$\sigma_d^2 = \sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2 = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

Le test d'hypothèse $m_1 \quad m_2$ se fera donc aisément en utilisant la table de la loi normale pour la variable $t - \dfrac{d}{\sigma_d}$

Si les variances σ_1 et σ_2 sont inconnues mais si les échantillons sont importants, il suffira de remplacer σ_1 et σ_2 par leurs estimations faites à partir des échantillons.

Si par contre — ce qui est fréquemment le cas — les échantillons sont peu importants, l'utilisation de la loi normale n'est plus acceptable. Dans ce cas, si l'on a des raisons valables d'admettre que les deux populations ont la même variance σ^2 :

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

une estimation correcte de cette variance commune pourra être faite à partir de l'ensemble des deux échantillons :

$$\sigma^2 \text{ estimé par } s^2 - \frac{\Sigma \; (x_i - \bar{x})^2 + \Sigma \; (y_i - \bar{y})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

La variance de la différence d sera alors estimée par :

$$s_d^2 = \frac{s^2}{n_1} = \frac{s^2}{n_2}$$

d'où :

$$s_d = s\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}$$

La variable aléatoire t $\frac{d}{s_d}$ est alors distribuée suivant la loi de Student-Fisher.

L'étude du cas général (variances inconnues et différentes) a donné lieu à de nombreux travaux (Test de Behrens ; test de Welch). Une solution particulièrement simple a été étudiée par M. le Professeur G. Darmois.

Le test est basé sur la construction de régions de confiance pour le couple de paramètres (m_1, m_2). On considère 2 échantillons extraits indépendamment chacun d'une des populations :

Échantillon I extrait de P_1 :

Effectif : n_1 ; observations : x_i ; moyenne : $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n_1}$; variance : $s_1^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n_1}$.

Échantillon extrait de P_2 :

Effectif : n_2 ; observations : y_i ; moyenne : $\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n_2}$; variance : $s_2^2 = \frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n_2}$.

I) Construction de domaines de confiance pour (m_1, m_2) :

Les caractéristiques de Student :

$t_1 = \sqrt{n_1 - 1}\, \frac{\bar{x} - m_1}{s_1}$ et $t_2 = \sqrt{n_2 - 1}\, \frac{\bar{y} - m_2}{s_2}$ sont des variables indépendantes et suivent les lois de Student avec respectivement :

$\nu_1 = n_1 - 1$ et $\nu_2 = n_2 - 1$ degrés de liberté.

Dans le plan (t_1, t_2), la densité de probabilité est :

$$f(t_1, t_2) = f(t_1)\, f(t_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{(n_1-1)(n_2-1)}} \; \frac{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)} \cdot \left(1 - \frac{t_1^2}{n_1-1}\right)^{-\frac{n_1}{2}} \left(1 + \frac{t_2^2}{n_2-1}\right)^{-\frac{n_2}{2}}$$

Cette densité étant indépendante des paramètres m_1, m_2, σ_1, σ_2 et t_1 et t_2 dépendant des paramètres m_1 et m_2 seulement, à tout domaine Δ (α) du plan (t_1, t_2) de probabilité $1 - \alpha$:

$$\Pr\left\{T(t_1, t_2) \in \Delta(\alpha)\right\} = \iint_{\Delta(\alpha)} f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 = 1 - \alpha$$

correspond dans le plan paramètre (m_1, m_2) **un domaine de confiance D (α) de coefficient $1 - \alpha$.** Ce domaine aléatoire puisque dépendant des valeurs observées de $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_1 s_2, a une probabilité $1 - \alpha$ de contenir le point paramètre M (m_1, m_2), m_1 et m_2 étant les valeurs effectives des moyennes de P_1 et P_2.

2) Choix du domaine Δ (α) :

La forme de Δ (α) est arbitraire. **Pour des raisons de simplicité et d'efficacité, M. Darmois a été amené à considérer des domaines circulaires, centrés à l'origine.**

Δ (α) est le domaine intérieur au cercle $t_1^2 + t_2^2 = R^2(\alpha)$, $R(\alpha)$ étant défini par :

$$\iint_{t_1^2 + t_2^2 \leq R^2(\alpha)} f(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2^2 = 1 - \alpha$$

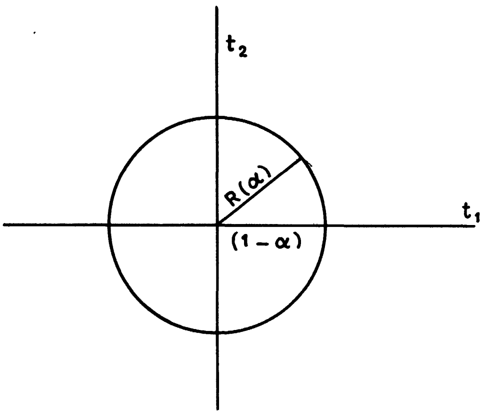
3) Domaines de confiance D (α) correspondant aux cercles de probabilité $1 - \alpha$:

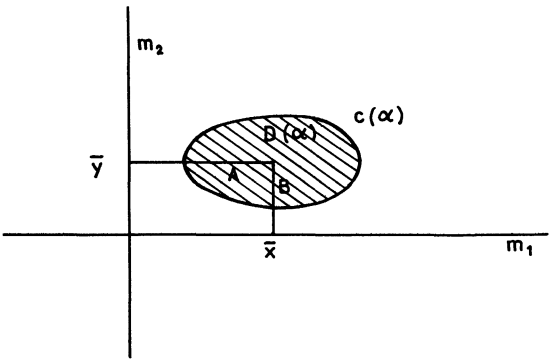
L'inégalité $t_1^2 \cdot t_2^2 \leq R^2$ s'écrit, en remplaçant t_1 et t_2 par leur valeur :

$$(n_1 - 1)\frac{(m_1 - \bar{x})^2}{s_1^2 R^2} + (n_2 - 1)\frac{(m_2 - \bar{y})^2}{s_2^2 R^2} \leq 1.$$

Le domaine de confiance, de coefficient $1 - \alpha$, pour (m_1, m_2) est l'intérieur de l'ellipse $C(\alpha)$ de centre le point $(\bar{x}, \bar{y})$, de directions d'axes les directions des axes de coordonnées, de longueurs des 1/2 axes :

$$A = \frac{s_1 R(\alpha)}{\sqrt{n_1 - 1}} \qquad\qquad B = \frac{s_2 R(\alpha)}{\sqrt{n_2 - 1}}$$





La probabilité que cette ellipse contienne en son intérieur le point paramètre effectif (m_1, m_2) est égale à $1 - \alpha$.

4) Tests basés sur ces domaines de confiance :

a) Test d'une hypothèse de la forme :

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = a_1 \\ \\ m_2 = a_2 \end{array}\right\} \quad a_1 \text{ et } a_2 \text{ sont des valeurs numériques données.}$$

Rejeter l'hypothèse au niveau α si l'ellipse $C(\alpha)$ ne contient pas en son intérieur le point $A(a_1, a_2)$.

α est le niveau significatif du test, c'est-à-dire le risque que l'on court de rejeter l'hypothèse lorsqu'elle est vraie.

b) Test de l'hypothèse (H) : $m_1 = m_2$ (populations de même moyenne non spécifiée) :

Il est logique de considérer que l'hypothèse (H) est peu vraisemblable si l'ellipse $C(\alpha)$, pour α petit, ne contient aucun point de la première bissectrice (lieu des points $m_1 = m_2$).

Test de Darmois : Rejeter l'hypothèse $m_1 = m_2$ si l'ellipse de confiance $C(\alpha)$ ne coupe pas la première bissectrice.

Cette condition s'exprime analytiquement par :

$$\text{si : } d = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1 - 1} + \dfrac{s_2^2}{n_2 - 1}}} > R(\alpha), \text{ rejeter l'hypothèse } m_1 = m_2.$$

Niveau significatif du test : Le niveau du test (risque de conclure à la non égalité des moyennes lorsqu'en fait ces moyennes sont égales) n'est pas égal à α. **Il a une valeur α' inférieure à α.**

La valeur α, qui sert de base au calcul de $R(\alpha)$, donc au test, est une limite supérieure de ce risque (erreur de 1re espèce).

III. — EXAMEN DU TEST DANS LE CAS OU LES EFFECTIFS n_1 ET n_2 DES ÉCHANTILLONS SONT ÉLEVÉS.

$\frac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}$ et $\frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}$ sont les estimations convergentes sans biais des variances σ_1^2 et σ_2^2 et la quantité d sur laquelle est basée le test est pratiquement égale à :

$$d = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

c'est-à-dire à la quantité utilisée pour le test classique de $m_1 - m_2$ lorsque les variances sont connues.

Il peut être intéressant, à titre indicatif, de comparer dans ce cas α au niveau significatif réel α' du test. t_1 et t_2 sont asymptotiquement des variables normales réduites et, par suite, $R^2(\alpha)$ est la valeur d'un χ^2 à 2 degrés de liberté correspondant à la valeur $1 - \alpha$ de la fonction de répartition.

$$Pr\left[x^2 \leqslant R^2(\alpha)\right] = 1 - \alpha ,$$

d est par ailleurs une variable normale réduite. Le niveau α' est donc donné par :

$$\alpha' = Pr\left[|d| > R(\alpha)\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{R(\alpha)}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

Le tableau ci-dessous donne la correspondance (α, α') pour un certain nombre de valeurs usuelles :

α	$1 - \alpha$	$R^2(\alpha)$	$R(\alpha)$	α'
0,1	0,90	4,605	2,15	0,032
0,05	0,95	5,991	2,45	0,014
0,02	0,98	7,824	2,80	0,005
0,01	0,99	9,210	3,04	0,002
0,001	0,999	13,815	3,72	0,0002

α' est en gros de l'ordre de $\frac{\alpha}{3}$.

On est par suite amené à penser que, quels que soient n_1 et n_2, le t est utilisé pour $\alpha = 0,05 = 5\ \%$ par exemple correspond à un niveau de l'ordre de 1 à 3 %.

Utilisation du test de Darmois.

On trouvera ci-après une table donnant $R(\alpha)$ en fonction de :

$$\nu_1 = n_1 - 1 \qquad \nu_2 = n_2 - 1, \text{ pour } \alpha = 0,05 = 5\ \%.$$

Cette table a été calculée au Laboratoire de Calcul de l'Institut Henri Poincaré sous la direction de M. Erokin.

Mode d'emploi :

Extraire : un échantillon d'effectif n_1 de P_1 : $x_1, x_2 \dots$

un échantillon d'effectif n_2 de P_2 : $y_1, y_2 \dots$

Calculer :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n_1} ; \qquad s_1^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{n_1}$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n_2} ; \qquad s_2^2 = \frac{\Sigma (y_i - \bar{y})^2}{n_2}$$

$$d = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1 - 1} + \frac{s_2^2}{n_2 - 1}}}$$

Lire R (α) à l'intersection de la ligne $\nu_1 = n_1 - 1$ et de la colonne $\nu_2 = n_2 - 1$ (ou de la colonne $n_1 - 1$ et de la ligne $n_2 - 1$, la table étant symétrique).

Rejeter l'hypothèse d'égalité des moyennes si :

$$d > R(\alpha)$$

ν_1 \ ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	25,43	14,22	13,07	12,84	12,79	12,77	12,76	12,76	12,76	12,76	12,76	12.75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75	12,75
2		6,37	5,32	4,95	4,77	4,68	4,62	4,58	4,55	4,53	4,52	4,50	4,50	4,49	4,48	4,48	4,47	4,47	4,47
3			4,36	4,02	3,85	3,75	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,54	3,53	3,52	3,51	3,50	3,49	3,48	3,48
4				3,69	3,52	3,43	3,36	3,32	3,28	3,25	3,23	3,22	3,20	3,19	3,18	3,17	3,17	3,16	3,15
5					3,36	3,27	3,20	3,16	3,12	3,10	3,07	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	3,01	3,00	2,99
6						3,17	3,11	3,06	3,03	3,00	2,98	2,97	2,95	2,94	2,93	2,92	2,91	2,91	2,90
7							3,04	3,00	2,97	2,94	2,92	2,90	2,89	2,88	2,87	2,86	2,85	2,84	2,84
8								2,95	2,92	2,90	2,88	2,86	2,84	2,83	2,82	2,81	2,81	2,80	2,80
9									2,89	2,86	2,84	2,83	2,81	2,80	2,79	2,78	2,78	2,77	2,76
10										2,84	2,82	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,74
11											2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72
12												2,76	2,75	2,74	2,73	2,72	2,71	2,71	2,70
13													2,74	2,73	2,72	2,71	2,70	2,69	2,69
14														2,72	2,71	2,70	2,69	2,68	2,68
15															2,69	2,69	2,68	2,67	2,67
16																2,68	2,67	2,66	2,66
17																	2,66	2,66	2,65
18																		2,65	2,65
19																			2,64