RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

NICOLAS PREUX
FATIHA BENDALI
JEAN MAILFERT
ALAIN QUILLIOT

Cœur et nucléolus des jeux de recouvrement

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 34, nº 3 (2000), p. 363-383
<http://www.numdam.org/item?id=RO_2000__34_3_363_0>

RAIRO Operations Research
RAIRO Oper. Res. **34** (2000) 363-383

CŒUR ET NUCLÉOLUS DES JEUX DE RECOUVREMENT (*)

par Nicolas PREUX (1), Fatiha BENDALI (2),
Jean MAILFERT (2) et Alain QUILLIOT (2)

Communiqué par Philippe CHRÉTIENNE

Résumé. – *Un jeu coopératif est défini par un ensemble de joueurs et une fonction de coût. Pour répartir le coût total entre tous les participants, la théorie nous apporte le concept de cœur : c'est l'ensemble des allocations de coûts qui empêchent toute formation d'une coalition de joueurs. Nous étudions un jeu dont la fonction coût est issue de la solution optimale d'un problème de recouvrement linéaire en variables entières. Nous obtenons les conditions de non vacuité du cœur de ce jeu et la caractérisation de ses allocations par le biais de la théorie de la dualité en programmation linéaire. Nous recherchons aussi d'une imputation de coûts particulière, le nucléolus. Après l'avoir caractérisé, nous montrons que sa détermination, basée sur une méthode de génération de colonnes, se fait polynomialement en fonction des données.*

Mots clés : Théorie des jeux, programmation linéaire réelle et entière, génération de colonnes, complexité.

Abstract. – *A cooperative game is defined as a set of players and a cost function. The distribution of the whole cost between the players can be done using the core concept, that is the set of all undominated cost allocations which prevent players from grouping. In this paper we study a game whose cost function comes from the optimal solution of a linear integer covering problem. We give necessary and sufficient conditions for the core to be nonempty and characterize its allocations using linear programming duality. We also discuss a special allocation, called the nucleolus. We characterize that allocation and show that it can be computed in polynomial time using a column generation method.*

Keywords: Game theory, continuous and integer linear programming, column generation, complexity.

1. INTRODUCTION

Le cadre général de la théorie des jeux coopératifs fournit des concepts de solutions intéressants dès lors que l'on souhaite répartir le coût total d'un service entre différents clients. Parmi ces concepts, le cœur correspond à un

(*) Reçu en mars 1999.

(1) France Telecom – CNET, 38-40 avenue du Général Leclerc, 92794 Issy-les-Moulineaux Cedex 9, France.

(2) LIMOS, Université Blaise Pascal, 63174 Aubière Cedex, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/00/03/$ 7.00

ensemble de répartitions de coût, pour lesquels aucune coalition de clients n'a intérêt à faire sécession.

Owen définit dans [8] le cadre général des jeux de production où la valeur caractéristique d'une coalition de joueurs est calculée par un programme linéaire à variables réelles. Avec une hypothèse d'additivité des ressources disponibles pour les différentes coalitions, Owen montre qu'un point du cœur du jeu est constructible à partir d'une solution duale optimale du programme linéaire de départ. Granot [4] étend ce dernier résultat à une classe plus large de problèmes.

Lorsque la fonction caractéristique du jeu s'obtient à partir d'un programme linéaire à variables entières, on entre dans le cas de jeux « combinatoires ». Granot [4] montre qu'un jeu d'arbre de poids minimum, formulé habituellement comme un jeu combinatoire, peut se mettre sous la forme d'un jeu de production en utilisant le formalisme d'Edmonds [2]. Tamir [12] prouve que d'autres problèmes discrets se ramènent également au formalisme d'Owen.

Cet article étudie les liens entre les jeux « réels » et « combinatoires » dans le cas où le programme linéaire considéré est un problème de recouvrement. Ce schéma permet de relier, sous un même formalisme, les différents articles [1, 3, 13].

Après avoir rappelé les notions issues de la théorie des jeux coopératifs en 2, nous définissons les jeux de recouvrement réels et entiers et établissons la non vacuité de leur cœur en sections 3 et 4. Les parties 4 et 5 traitent d'un élément particulier du cœur qui offre une notion de stabilité : le nucléolus. Il est alors caractérisé pour le jeu de recouvrement entier en se basant sur l'algorithme de Kopelowitz ; une méthode de génération de colonnes est mise en œuvre pour le calculer dans les cas où le cœur du jeu est non vide. On montre que l'algorithme utilisé pour générer des coalitions violées est polynômial en fonction du nombre de colonnes de la matrice du programme linéaire de recouvrement. On étend ainsi les résultats de Chardaire [1] pour le problème de localisation.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LES JEUX COOPÉRATIFS

Un ensemble N de clients désire obtenir un certain service de la part d'un opérateur. Le coût total $v(N)$ de ce service doit être réparti entre tous les clients. La théorie des jeux coopératifs permet de proposer des techniques de tarification où la notion de groupe de clients ou coalition joue un rôle essentiel.

DÉFINITION 1 : *Un jeu de coût coopératif* (N, v) *est défini par la donnée de :*

- *Un ensemble* $N = \{1, \ldots, n\}$ *fini de joueurs.*
- *Une fonction caractéristique* v *qui associe à toute coalition de clients* $S \subseteq N$ *le coût de service* $v(S) \in R^+$ *de la coalition* S.

La valeur $v(S)$ définit, pour chaque coalition possible, le coût du service des seuls clients de S. On suppose raisonnablement que $v(\emptyset) = 0$.

Pour ces jeux, on cherche à obtenir des imputations de coût, c'est-à-dire que l'on souhaite proposer une répartition du coût total $v(N)$ entre les différents clients. Chacun d'entre eux ne paie ainsi qu'une partie du service dont le coût total est globalement recouvert.

DÉFINITION 2 : *Le cœur* $C(N, v)$ *du jeu coopératif* (N, v) *correspond à l'ensemble des imputations telles qu'aucune coalition de clients ne se voit imputer plus que son coût d'accès au réseau.*

Formellement, un élément du cœur est un vecteur $(u_1, \cdots, u_n)$ tel que

$$\begin{cases} u(N) = \sum_{i \in N} u_i = v(N) & \text{(recouvrement du coût total)} \\ u(S) = \sum_{i \in S} u_i \leq v(S) \quad \forall S \subseteq N & \text{(rationalité de la coalition } S\text{).} \end{cases}$$

DÉFINITION 3 : *Le nucléolus [11] du jeu* (N, v) *correspond à l'ensemble des imputations* u *qui maximisent lexicographiquement le vecteur d'excès* $\theta(u)$ *dont les composantes sont les excès* $e(u, S) = v(S) - u(S)$ *classés de manière croissante pour l'ensemble des coalitions* S *possibles.*

Deux propriétés importantes d'un jeu coopératif sont la monotonie et la sous-additivité :

DÉFINITION 4 : *Un jeu coopératif* (N, v) *est monotone si* $v(S) \leq v(T) \quad \forall S \subseteq T \subseteq N$.

Il est facile de montrer que la monotonie d'un jeu entraîne la non négativité des éléments de son cœur.

DÉFINITION 5 : *Un jeu est sous-additif si*

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) \quad \forall S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset.$$

3. LE JEU DE RECOUVREMENT

On considère un ensemble N de clients et un ensemble M de ressources. Une ressource $j \in M$ peut satisfaire ou non le besoin d'un client $i \in N$. La matrice $A = (a_{ij})$ indique, pour chaque i, les ressources j qui peuvent assurer la demande du client i, c'est-à-dire $a_{ij} \in \{0, 1\}$. L'utilisation d'une ressource $j \in M$ est associée à un coût d'utilisation G_j. Toute coalition $S \subseteq N$ de joueurs cherche, au vu des besoins exprimés par chacun de ses membres, à minimiser le coût total des produits qu'elle doit utiliser.

On définit un jeu coopératif $(N, \bar{v})$ pour lequel le coût $\bar{v}(S)$ de toute coalition $S \subseteq N$ est donné par le programme linéaire suivant :

$$\bar{R}(S) \begin{cases} \min \mathcal{Z} & = \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j \\ \sum_{j \in M} a_{ij} \cdot x_j \geq 1 & \forall i \in S \\ x_j \in \mathcal{N} & \forall j \in M \end{cases} \tag{1}$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.

La variable décisionnelle x_j indique si le produit est utilisé ou non. Le calcul de $\bar{v}(S)$ correspond typiquement à un problème de recouvrement des joueurs par les ressources en variables entières. On peut définir, de la même manière, un jeu (N, v) pour lequel les variables x du programme linéaire ne sont pas contraintes à être entières. Le coût $v(S)$ d'une coalition est alors donné par l'optimum du programme linéaire :

$$R(S) \begin{cases} \min \mathcal{Z} & = \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j \\ \sum_{j \in M} a_{ij} \cdot x_j \geq 1 & \forall i \in S \\ x_j \geq 0 & \forall j \in M. \end{cases} \tag{2}$$

Le programme $R(S)$ peut être considéré comme un cas particulier du jeu de production de Granot [4]. Ceci demande cependant quelques précisions. D'une part, Granot considère des jeux de gains, mais ses résultats sont facilement transposables aux jeux de coût qui nous intéressent. D'autre part la définition générale du jeu de Granot implique l'existence, pour chaque coalition, d'un vecteur de ressources disponibles. Pour notre modèle, on considère qu'il y a une seule ressource par client ; le vecteur ressource d'une coalition quelconque S correspond alors au vecteur de $\{0,1\}^N$, caractéristique de cette coalition, dont la composante i est égale à 1 si $i \in S$ et 0 sinon. On montre facilement que notre jeu de recouvrement est équilibré au sens de la définition de Granot. On en déduit la non vacuité du cœur pour le jeu réel. Le même résultat peut d'ailleurs être obtenu en constatant que toute solution duale optimale du programme linéaire utilisé pour calculer $v(N)$ est une solution du cœur du jeu.

L'intérêt de cette étude se situe à la rencontre des jeux à variables réelles et des jeux à variables entières. Des propriétés relient les différents concepts de stabilité entre les deux jeux.

4. CARACTÉRISATION DU CŒUR DU JEU DE RECOUVREMENT ENTIER

Les jeux entiers et réels que nous étudions possèdent les propriétés essentielles de monotonie et de sous-additivité qui seront utilisées ultérieurement.

4.1. Existence du cœur du jeu entier

Le cœur du jeu de recouvrement réel n'est jamais vide. Il n'en va pas de même pour le cœur du jeu à variables entières. Une condition nécessaire et suffisante pour assurer la non-vacuité du cœur du jeu entier $(N, \bar{v})$ est donnée par l'égalité entre les solutions optimales des programmes linéaires entiers et réels pour le calcul du coût de la « grande coalition » N. Ce résultat est déjà présent dans [1] pour le jeu de localisation et dans la proposition 3 de [3]. On en présente ici une démonstration générale pour le jeu de recouvrement.

THÉORÈME 1 : $C(N, \bar{v}) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{v}(N) = v(N)$

Preuve.

- Pour démontrer l'implication, on considère un vecteur u appartenant au cœur du jeu entier $(N, \bar{v})$. Le vecteur u est positif ou nul car le jeu est monotone. On pose $I(j) = \{i \in N \mid a_{ij} = 1\}$ pour désigner l'ensemble des clients i qui peuvent être servis par la ressource j. On peut écrire par hypothèse

$$\sum_{i \in N} a_{ij} \cdot u_i = \sum_{i \in I(j)} u_i \leq \bar{v}(I(j)) \leq G_j \quad \forall j \in M. \qquad (3)$$

La dernière inégalité provient du fait que le vecteur $(0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$, dont la seule composante j est égale à 1, est une solution réalisable de

$\bar{R}(I(j))$. On retient, de l'expression précédente, que $\sum_{i \in N} a_{ij} \cdot u_i \leq G_j \quad \forall j \in M$. On considère alors x une solution réalisable de $R(N)$. En multipliant l'inégalité précédente par $x_j \geq 0$, on obtient $\left(\sum_{i \in N} a_{ij} \cdot u_i\right) x_j \leq G_j \cdot x_j \quad \forall j \in M$. Il s'ensuit que

$$\bar{v}(N) = \sum_{i \in N} u_i \leq \sum_{i \in N} u_i \underbrace{\left(\sum_{j \in M} a_{ij} \cdot x_j \right)}_{\geq 1} \leq \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j. \qquad (4)$$

Cette inégalité est vérifiée en particulier pour x^*, solution optimale de $R(N)$. On peut donc écrire $\bar{v}(N) \leq \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j^* = v(N)$. L'inégalité contraire étant acquise trivialement, on peut conclure que $\bar{v}(N) = v(N)$.

- On considère pour la réciproque que $\bar{v}(N) = v(N)$. L'ensemble des solutions réalisables de $\bar{R}(N)$ est inclus dans l'ensemble des solutions réalisables de $R(N)$. De plus, les deux programmes ont par hypothèse la même fonction objectif. On a donc de suite $v(S) \leq \bar{v}(S)$ pour toute coalition S incluse dans N. Soit u une imputation du cœur du jeu (N, v). Il vient $\sum_{i \in S} u_i \leq v(S) \leq \bar{v}(S)$. On a de plus $\sum_{i \in N} u_i = v(N) = \bar{v}(N)$. Ceci prouve que u appartient au cœur du jeu $(N, \bar{v})$.

□

La preuve du théorème nous permet d'écrire directement :

COROLLAIRE 1 : *Si $\bar{v}(N) = v(N)$, les ensembles $C(N, v)$, $C(N, \bar{v})$ et l'ensemble des solutions optimales duales de $R(N)$ sont identiques.*

4.2. Une caractérisation du cœur du jeu entier $C(N, \bar{v})$

On définit, à partir du jeu $(N, \bar{v})$, un jeu $(N, \bar{w})$ de la manière suivante :

DÉFINITION 6 : *Soit $(N, \bar{w})$ le jeu caractérisé par :*

$$\bar{w}(S) = \begin{cases} \min\{G_j\} & \textit{pour} \quad j \in K(S) \\ \bar{v}(S) & \textit{si} \quad K(S) = \emptyset \quad \textit{ou} \quad S = N \end{cases} \qquad (5)$$

où $K(S) = \{j \in M \mid S \subseteq I(j)\}$ représente l'ensemble des ressources j qui peuvent au moins servir les clients de la coalition S.

Le jeu $(N, \bar{w})$ est monotone, mais pas forcément sous-additif. Ce jeu monotone, qui nous sera fort utile pour le calcul du nucléolus, possède exactement le même cœur que le jeu $(N, \bar{v})$.

THÉORÈME 2 : $C(N, \bar{w}) = C(N, \bar{v})$

Preuve.

- Soit u un point du cœur du jeu $(N, \bar{v})$. On a $u(S) \leq \bar{v}(S) \leq \bar{w}(S) \quad \forall S \subseteq N$. De plus $u(N) = \bar{v}(N) = \bar{w}(N)$, ce qui prouve que u est dans le cœur du jeu $(N, \bar{w})$.
- Soit u un point du cœur du jeu $(N, \bar{w})$. On note $\bar{J}^*(S) = \{j \in M \mid x_j^* > 0\}$ l'ensemble des ressources qui forment une solution optimale du programme $\bar{R}(S)$. En tant que vecteur du cœur d'un jeu monotone, le vecteur u est à composantes positives. On peut donc écrire

$$u(S) \leq \sum_{j \in \bar{J}^*(S)} u(I(j)).$$

L'hypothèse $u \in C(N, \bar{w})$, ainsi que la définition du jeu $(N, \bar{w})$, nous permettent d'écrire

$$u(I(j)) \leq \bar{w}(I(j)) \leq G_j \quad \forall j \in M.$$

On en déduit

$$\sum_{j \in \bar{J}^*(S)} u(I(j)) \leq \sum_{j \in \bar{J}^*(S)} G_j = \bar{v}(S).$$

On peut conclure $u(S) \leq \bar{v}(S)$. On a toujours $u(N) = \bar{v}(N)$, donc u est dans le cœur du jeu $(N, \bar{v})$.

□

5. LE NUCLÉOLUS DU JEU DE RECOUVREMENT ENTIER

5.1. L'algorithme de Kopelowitz

L'algorithme de Kopelowitz [6] vise à calculer le nucléolus par un emboîtement de programmes linéaires qui réduisent petit à petit l'ensemble des allocations admissibles pour arriver à un point unique : le nucléolus du jeu.

Toutes les imputations du cœur du jeu $(N, \bar{v})$ vérifient $u(S) \leq \bar{v}(S) \quad \forall S \subseteq N$. Pour une imputation du cœur, La différence $\bar{v}(S) - u(S)$ est appelée excès de la coalition S par rapport à l'allocation de coût u. Cette différence, positive ou nulle, peut être interprétée, dans le cas d'un jeu de coût, comme un certain avantage de la coalition S par rapport à l'allocation de coût u.

- Le cœur fournit donc, à toutes ses imputations, un bénéfice global ε_0, au moins égal à 0, pour l'ensemble des coalitions possibles. La valeur de ε_0 correspond à l'optimum du programme linéaire :

$$\begin{cases} \max \ \varepsilon \\ \sum_{i \in N} u_i \qquad = \bar{v}(N) \\ \sum_{i \in S} u_i + \varepsilon \leq \bar{v}(S) \quad \forall S \in I_0. \end{cases}$$

  L'ensemble I_0 contient toutes les coalitions possibles de joueurs, hormis la coalition totale N, présente dans l'égalité $u(N) = \bar{v}(N)$. A l'optimum ε_0 du programme précédent, il existe au moins une des contraintes de I_0 qui est serrée pour toute solution optimale. Ceci s'obtient en écrivant le dual du problème. On note $E_1 \neq \emptyset$ l'ensemble des contraintes serrées pour toute solution optimale.
  Les coalitions associées aux contraintes de E_1 ne pourront espérer obtenir un meilleur gain. La valeur de l'excès pour les contraintes correspondantes est donc fixée à ε_0. On transforme donc ces inégalités serrées en égalités. Les nouvelles égalités définissent autant d'hyperplans dans l'espace des imputations de départ qui réduisent l'ensemble des imputations réalisables pour le programme. Le nouvel ensemble d'inégalités devient par conséquent $I_1 = I_0 \setminus E_1$.

- Les coalitions correspondant à l'ensemble des contraintes I_1 possèdent un avantage au moins égal à ε_0. Recherchons la valeur ε_1 du bénéfice maximum qu'elles peuvent espérer. La valeur de ε_1 correspond à l'optimum du programme linéaire :

$$\begin{cases} \max\ \varepsilon \\ \sum_{i \in N} u_i \quad = \bar{v}(N) \\ \sum_{i \in S} u_i + \varepsilon \leq \bar{v}(S) \qquad \forall S \in I_1 \\ \sum_{i \in S} u_i \quad = \bar{v}(S) - \varepsilon_0 \quad \forall S \in E_1. \end{cases}$$

De la même façon, la valeur optimale ε_1 de ce problème nous permet de réduire l'ensemble des imputations admissibles en proposant au moins un nouvel hyperplan.

- On se place à une itération t quelconque du processus. On dispose à ce stade d'un ensemble E_t de contraintes égalités dans le problème. Cet ensemble E_t correspond à des coalitions dont le bénéfice a été déterminé à un ε_k fixé antérieurement à l'itération t du processus. Les contraintes correspondantes dans le programme linéaire s'expriment sous la forme $u(S) = \tilde{v}(S) = \bar{v}(S) - \epsilon_k$ avec $k < t$. On considère alors le programme linéaire permettant de calculer ε_{t+1}.

$$\begin{cases} \max\ \varepsilon \\ \sum_{i \in N} u_i \quad = \bar{v}(N) \\ \sum_{i \in S} u_i + \varepsilon \leq \bar{v}(S) \quad \forall S \in I_t \\ \sum_{i \in S} u_i \quad = \tilde{v}(S) \quad \forall S \in E_t. \end{cases}$$

À l'optimum de ce dernier, on sait qu'il existe au moins une des contraintes qui est serrée pour toute solution optimale[3]. Ce sont ces contraintes inégalités serrées pour toute solution optimale qui vont pouvoir être transformées en égalités.
Toutes ne vont pourtant pas avoir le même impact sur le système d'égalités héritées des paliers précédents. Une nouvelle égalité ajoutée à ce système peut en effet, soit laisser le rang de système inchangé,

[3] On le démontre en utilisant le dual et le théorème des écarts complémentaires.

soit le faire diminuer d'une unité, selon que la nouvelle égalité était ou non linéairement dépendante des égalités du système. Les inégalités qui, en passant en égalités, ne changent pas le rang du système ne sont pas intéressantes. Les relations qu'elles expriment entre les prix des différents clients sont implicitement déjà présentes dans le système d'égalités. On peut donc écarter de telles contraintes, ce qui diminue d'autant l'ensemble I_t.

On transforme ainsi au moins une inégalité en égalité. Ces contraintes sont formées par des vecteurs caractéristiques de coalitions. Si l'on poursuit le procédé jusqu'au bout, on obtient au maximum $2^n - 2$ égalités construites. Or, dans ces $2^n - 2$ contraintes formées à partir de vecteurs caractéristiques de coalitions, il existe une famille libre de $n - 1$ vecteurs caractéristiques (par exemple, la famille des vecteurs associés aux coalitions unitaires). Par conséquent, l'algorithme fournit une famille de $n - 1$ égalités linéairement indépendantes. Si l'on ajoute, à ces égalités, la contrainte $x(N) = v(N)$, alors l'ensemble des solutions optimales est réduit à un seul point : Le nucléolus du jeu.

Kopelowitz [6] fut le premier à proposer cette méthode de recherche algorithmique du nucléolus en résolvant une séquence de programmes linéaires. Toutes les méthodes primales à ce jour reprennent plus ou moins ce schéma de base. Une interprétation géométrique de la notion d'excès est donnée à la fin de l'article de Maschler *et al.* [7].

5.2. Caractérisation du nucléolus du jeu de recouvrement entier

NOTATION : Le nucléolus du jeu $(N, \bar{v})$ sera noté $u^{\bar{v}}$.

THÉORÈME 3 : *Si* $C(N, \bar{v}) \neq \emptyset$, $\quad u^{\bar{w}} = u^{\bar{v}}$.

La démonstration est basée sur l'algorithme proposé par Kopelowitz [6] et repose sur le fait que, pour le calcul du nucléolus du jeu $(N, \bar{v})$, seules sont nécessaires les coalitions $S \subseteq N$ telles que $\bar{v}(S) = \bar{w}(S)$. Les démonstrations sont généralisées à partir des résultats de Chardaire [1]. D'après le lemme 2, seules les coalitions vérifiant $\bar{v}(S) = \bar{w}(S)$ interviennent dans le calcul du nucléolus du jeu $(N, \bar{v})$. Un résultat similaire est obtenu avec le lemme 3 quant au calcul du nucléolus pour le jeu $(N, \bar{w})$. En conséquence, les programmes linéaires successifs, dans le calcul du nucléolus, sont les mêmes pour les deux jeux. Le nucléolus pour les deux jeux correspond ainsi au même point.

NOTATION : Soit x_S^* une solution optimale de $R(S)$. On note $J^*(S) = \{j \in M \mid (x_S^*)_j > 0\}$ l'ensemble des ressources qui forment une solution optimale du programme $R(S)$.

LEMME 1 : *Pour toute coalition S telle que $\bar{v}(S) < \bar{w}(S)$, on peut construire une partition $\{S_j\}_{j \in J^*(S)}$ de S telle que*

$$\begin{cases} \bar{v}(S_j) = \bar{w}(S_j) = G_j \quad \forall j \in J^*(S) \\ \bar{v}(S) = \sum\limits_{i \in J^*(S)} \bar{v}(S_j). \end{cases}$$

Preuve : On pose $J^*(S) = \{j_1, j_2, \cdots, j_l\}$. On construit une partition de S de la manière suivante :

$$\begin{cases} S_1 = S \cap I(j_1) \\ S_2 = S \cap I(j_2) \setminus S_1 \\ \cdots \\ S_l = S \cap I(j_l) \setminus (\cup_{k<l} S_k). \end{cases}$$

- On montre dans un premier temps $\bar{v}(S_k) = G_k \quad \forall k \in J^*(S)$. En utilisant la sous-additivité du jeu $(N, \bar{v})$, on peut écrire :

  $$\bar{v}(S) = \bar{v}\left(\bigcup_{k \in J^*(S)} S_k\right) \leq \sum_{k \in J^*(S)} \bar{v}(S_k) \leq \sum_{k \in J^*(S)} G_k = \bar{v}(S).$$

  On en déduit que

  $$\sum_{k \in J^*(S)} \bar{v}(S_k) = \sum_{k \in J^*(S)} G_k.$$

  Ceci entraîne $\bar{v}(S_k) = G_k \quad \forall k \in J^*(S)$ car $\bar{v}(S_k) \leq G_k \quad \forall k \in M$.
- On montre ensuite $\bar{w}(S_k) = G_k \quad \forall k \in J^*(S)$.
  Par définition du jeu $(N, \bar{w})$

  $$\bar{v}(S_k) \leq \bar{w}(S_k) \quad \forall k \in J^*(S).$$

  Ceci entraîne de suite

  $$G_k \leq \bar{w}(S_k) \quad \forall k \in J^*(S).$$

D'autre part, à l'aide de la monotonie de jeu $(N, \bar{w})$

$$\bar{w}(S_k) \leq \bar{w}(I(j_k)) \leq G_k.$$

La partition $(S_1, \cdots, S_l)$ de S vérifie bien les propriétés énoncées dans le lemme.

□

LEMME 2 : *Si le cœur du jeu $(N, \bar{v})$ est non vide, il suffit, dans le calcul du nucléolus du jeu $(N, \bar{v})$, de ne considérer que les coalitions vérifiant $\bar{v}(S) = \bar{w}(S)$.*

Preuve : Soit S une coalition telle que $\bar{v}(S) \neq \bar{w}(S)$. Par définition du jeu $(N, \bar{w})$, on a alors $\bar{v}(S) < \bar{w}(S)$. Il existe une partition $\{S_j\}_{j \in J^*(S)}$ telle que $\bar{v}(S_j) = \bar{w}(S_j) \quad \forall j \in J^*(S)$. Par définition du vecteur d'excès, on a

$$\begin{cases} u^{\bar{v}}(S) + e(u^{\bar{v}}, S) & = \bar{v}(S) \\ u^{\bar{v}}(S_j) + e(u^{\bar{v}}, S_j) & = \bar{v}(S_j). \end{cases}$$

De plus, comme $\{S_j\}_{j \in J^*(S)}$ est une partition de S, on a les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} u^{\bar{v}}(S) = \displaystyle\sum_{j \in J^*(S)} u^{\bar{v}}(S_j) \\ \bar{v}(S) \;\; = \displaystyle\sum_{j \in J^*(S)} \bar{v}(S_j) \quad \forall j \in J^*(S). \end{cases}$$

On en déduit facilement que

$$e(u^{\bar{v}}, S) = \sum_{j \in J^*(S)} e(u^{\bar{v}}, S_j).$$

Tous les excès sont positifs car le nucléolus est un point du cœur. Par conséquent

$$e(u^{\bar{v}}, S_j) \leq e(u^{\bar{v}}, S) \quad \forall j \in J^*(S). \tag{6}$$

Deux cas se présentent alors à nous :

- Soit $e(u^{\bar{v}}, S) > e(u^{\bar{v}}, S_j) \quad \forall j \in J^*(S)$.
  On note, par la suite, $U(S) = \sum_{i \in S} u_i^{\bar{v}}$. Au vu de l'inégalité sur les excès, la coalition S_j sera forcément exhibée avant la coalition S dans l'algorithme précédent de calcul du nucléolus. On est alors certain que,

lors de l'examen de la contrainte correspondant à S pour un éventuel passage à une égalité, toutes les coalitions S_j ont déjà été fixées à égalité lors d'un palier précédent de l'algorithme. Pour chacune de ces coalitions, $\sum_{i \in S_j} u_i^{\bar{v}}$ est fixé, égal à $U(S_j)$. Par conséquent, l'excès $e(u^{\bar{v}}, S) = \bar{v}(S) - u^{\bar{v}}(S)$ de la coalition S se déduit[4] des coûts $\bar{v}(S_j)$ des coalitions S_j, ainsi que des $U(S_j)$. Par conséquent, la coalition S n'apporte aucune information nouvelle quand au calcul du nucléolus. Elle peut être considérée, en ce sens, comme redondante pour le calcul du nucléolus dans l'algorithme précédent.

- Soit $\exists j_0 \in J^*(S)$ tel que $e(u^{\bar{v}}, S) = e(u^{\bar{v}}, S_{j_0})$.
  Ceci entraîne $e(u^{\bar{v}}, S_j) = 0$ pour tous les $j \neq j_0$ dans $J^*(S)$. La contrainte S est donc serrée exactement en même temps que la contrainte S_{j_0} à un même palier du processus. À cette itération, si la contrainte S_{j_0} est redondante, alors il en est de même pour la contrainte S. À l'inverse, si la contrainte S_{j_0} est serrée, mais non redondante, on la transforme en égalité. Il s'ensuit alors que la contrainte associée à S est redondante pour le calcul du nucléolus.

□

LEMME 3 : *Si le cœur du jeu $(N, \bar{w})$ est non vide, il suffit, dans le calcul du nucléolus du jeu $(N, \bar{w})$, de ne considérer que les coalitions vérifiant $\bar{v}(S) = \bar{w}(S)$.*

Preuve : Soit S une coalition telle que $\bar{v}(S) < \bar{w}(S)$. D'après le lemme 1, il existe une partition $\{S_j\}_{j \in J^*(S)}$ telle que $\bar{v}(S_j) = \bar{w}(S_j) \quad \forall j \in J^*(S)$. On a alors :

$$\bar{w}(S) > \bar{v}(S) = \sum_{j \in J^*(S)} \bar{v}(S_j) = \sum_{j \in J^*(S)} \bar{w}(S_j).$$

Le résultat se résume à :

$$\bar{w}(S) > \sum_{j \in J^*(S)} \bar{w}(S_j).$$

[4] Car les S_j forment une partition de S.

On montre alors

$$e(u^{\bar{w}}, S) = \bar{w}(S) - u^{\bar{w}}(S) > \sum_{j \in J^*(S)} \bar{w}(S_j) - \sum_{j \in J^*(S)} u^{\bar{w}}(S_j)$$
$$= \sum_{j \in J^*(S)} e(u^{\bar{w}}, S_j)).$$

On tire de la relation précédente

$$e(u^{\bar{w}}, S) > \sum_{j \in J^*(S)} e(u^{\bar{w}}, S_j)).$$

De plus, par hypothèse, le cœur du jeu $(N, \bar{w})$ est non vide, donc $e(u^w, S_j)) \geq 0 \quad \forall j \in J^*(S)$. On peut donc en conclure

$$e(u^{\bar{w}}, S_j) < e(u^{\bar{w}}, S) \quad \forall j \in J^*(S). \tag{7}$$

Un raisonnement analogue au lemme 2 précédent nous permet de terminer la preuve. □

6. CALCUL DU NUCLÉOLUS DU JEU DE RECOUVREMENT

6.1. Une méthode de génération de colonnes

Pour déterminer le nucléolus du jeu $\bar{v}$ à l'aide de l'algorithme de Kopelowitz, le calcul des valeurs de jeu pour les $2^n - 2$ coalitions est *a priori* nécessaire. Dès lors que le nombre de joueurs dépasse la dizaine, il devient impossible de considérer toutes ces coalitions. Vu les relations obtenues entre les deux jeux $(N, \bar{v})$ et $(N, \bar{w})$, nous proposons à travers ce dernier jeu un algorithme de génération efficace de coalitions à chaque palier de l'algorithme de Kopelowitz. Considérons donc un palier t quelconque de cet algorithme. Le programme linéaire complet à résoudre est le suivant :

$$PN_t \begin{cases} \varepsilon_t = \max \ \varepsilon & \\ u(N) = \bar{w}(N) & (i) \\ u(S) + \varepsilon \leq \bar{w}(S) \quad \forall S \in I_t & (ii) \\ u(S) = \tilde{w}(S) \quad \forall S \in E_t. & (iii) \end{cases}$$

Les contraintes (iii) sont des contraintes égalités, provenant des inégalités transformées à une itération k inférieure à t. $\tilde{w}(S)$ correspond donc à $\bar{w}(S) - \varepsilon_k$ si l'inégalité qu'elle était est devenue une égalité à l'itération k,

E_t est l'ensemble de ces coalitions. I_t représente l'ensemble des coalitions correspondant à des contraintes inégalités dans le programme linéaire primal.

Pour éviter de traiter le programme primal complet où le nombre de contraintes est exponentiel, il est plus simple de résoudre son dual par une méthode de génération de colonnes. Les variables duales ν, λ_S et μ_S sont associées respectivement aux contraintes (i), (ii) et (iii) et le dual DN_t s'écrit alors :

$$DN_t \begin{cases} \min \sum_{S \in I_t} \lambda_S \cdot \bar{w}(S) + \sum_{S \in E_t} \mu_S \cdot \tilde{w}(S) + \nu \cdot \bar{w}(N) \\ \sum_{\substack{i \in S \\ S \in I_t}} \lambda_s + \sum_{\substack{i \in S \\ S \in E_t}} \mu_S + \nu \geq 0 \quad \forall i \in N \quad (iv) \\ \sum_{S \in I_t} \lambda_S \qquad \geq 1 \qquad (v) \\ \lambda_S \qquad \geq 0 \quad \forall S \in I_t. \end{cases}$$

Au cours du processus de génération de colonnes, on travaille avec un programme réduit comportant les variables ν, μ_S, ainsi que d'une partie des variables λ_S. De manière générale, pour assurer le succès d'une méthode de génération de colonnes, il faut trouver un algorithme exact et efficace qui puisse tester si une solution optimale courante du programme réduit est également solution optimale du programme complet. Par conséquent, la brique essentielle à notre génération de colonnes consiste à trouver un bon algorithme pour la détermination du coût réduit.

6.2. Vérification de l'optimalité du programme réduit

Soit $(p_i)_{i \in N}$ les variables duales associées aux contraintes (iv) précédentes et q la variable duale associée à la contrainte (v). La solution optimale du programme réduit est optimale pour le programme global si et seulement si $p(S) + q \leq \bar{w}(S) \quad \forall S \in I_t$. Ce problème équivaut à rechercher $\min_{S \in I_t} (\bar{w}(S) - p(S))$.

Dans le cas présent, on sait que pour calculer le nucléolus, seules les coalitions vérifiant $\bar{w}(S) = \bar{v}(S)$ sont pertinentes. Par conséquent, les coalitions utiles sont telles que

- $S \subseteq I(j)$.
- Le vecteur caractéristique de la coalition S est linéairement indépendant avec les vecteurs caractéristiques T des coalitions constituant la famille

d'égalités de E_t. Soit $\mathrm{Vect}(E_t)$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs T. En confondant une coalition avec son vecteur caractéristique, on notera $S \notin \mathrm{Vect}(E_t)$ cette indépendance linéaire.

La condition d'optimalité du programme dual réduit s'exprime par la condition

$$\min_{S \in I_t}(\bar{w}(S) - p(S)) \geq q$$

que l'on peut réécrire

$$\min_{j \in M} \underbrace{\min_{\substack{S \subseteq I(j) \\ S \notin \mathrm{Vect}(E_t)}} (\bar{w}_R(I(j)) - p(S))}_{T(j)} \geq q$$

$$\min_{j \in M} T(j) \geq q.$$

Pour chaque $j \in M$, la recherche de $T(j)$ est simple, en effet :

$$T(j) = G_j + \min_{\substack{S \subseteq I(j) \\ S \notin \mathrm{Vect}(E_t)}} (-p(S)).$$

On montre qu'il suffit de ne considérer qu'un nombre limité de coalitions ($card(I(j))$ en fait) pour calculer $T(j)$.

Pour ce faire, on renumérote dans un premier temps les r clients de la coalition $I(j)$ dans l'ordre décroissant des variables duales p_i.

On a alors le schéma suivant :

$$\begin{array}{rcl} & I(j) & \\ \text{client } 1 & \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} p_1 \\ \vdots \\ p_r \quad \text{avec } p_1 \geq \cdots \geq p_r \geq 0 \\ p_{r+1} \\ \vdots \\ p_n. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{client } 1 \\ \vdots \\ \text{client } r \\ \text{client } r+1 \\ \vdots \\ \text{client } n \end{array}$$

À la famille des r clients de $I(j)$, on associe la base (B_j) définie par les coalitions $S^0, S^1, S^2, \cdots, S^{r-1}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} S^0 & S^1 & S^2 & \cdots & S^{r-1} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r-1 \\ r \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & & 1 \\ \vdots & 1 & 0 & & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

tels que $\begin{cases} p(S^0) = \sum_{i=1}^{r} p_i \\ p(S^k) = \sum_{i=1}^{r} p_i - p_{r-k+1}. \end{cases}$

Les r vecteurs de la base (B_j) sont donc tels que :

LEMME 4:

$$p(S^0) \geq p(S^1) \geq p(S^2) \geq \cdots \geq p(S^{r-1}).$$

Preuve.

$$\begin{aligned} p(S^0) &= \sum_{i=1}^{r} p_i && \geq \sum_{i=1}^{r} p_i - p_{r-k+1} = p(S^k) && \forall k \\ p(S^k) &= p(S^0) - p_{r-k+1} && \geq p(S_0) - p_{r-k} \quad = p(S^{k+1}) && \forall 1 \leq k \leq r. \end{aligned}$$

□

LEMME 5 : *Toute coalition $S \subseteq I(j)$ est combinaison linéaire des vecteurs de la base $B(j)$.*

Preuve : Pour une ressource j donnée, on considère une coalition quelconque S incluse dans $I(j)$. On distingue deux cas de figure selon que le joueur 1 appartient ou non à la coalition S.

- On suppose que le joueur 1 appartient à la coalition S.
  La coalition S peut alors s'écrire en fonction des vecteurs de la base B_j à l'aide de la formule suivante :

$$S = \sum_{l \notin S} S^{r-l+1} - [r - \mathrm{card}(S) - 1] \cdot S^0.$$

- On suppose inversement que le joueur 1 n'appartient pas à la coalition S. Soit $\bar{S}$ le vecteur correspondant à la coalition complémentaire de S dans $I(j)$. Le vecteur caractéristique de S s'exprime tout naturellement comme différence entre $I(j) = S^0$ et $\bar{S}$. Il se trouve que $\bar{S}$ est telle que $1 \in \bar{S}$. En application du premier cas, $\bar{S}$ et par voie de conséquence S s'expriment comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B_j.

□

LEMME 6 :

$$\forall S \subseteq I(j)\ \forall l \in I(j) - (S \cup \{1\}),\ p(S^{r-l+1}) \geq p(S).$$

Preuve :

- On suppose $1 \in S$.
$p(S) = p(S^0) - \sum_{l \in I(j)-(S\cup\{1\})} p_l \leq p(S^0) - p_l = p(S^{r-l+1}).$

- On suppose $1 \notin S$.
$p(S) = p(S^0) - p(\bar{S}) = \sum_{l \in I(j)-(S\cup\{1\})} p_l \leq p(S^{r-l+1}) \quad \forall l \in (S \cup \{1\}).$

□

LEMME 7 : *Pour toute coalition $S \subseteq I(j)$, si $S \notin$ Vect(E_t), on peut toujours extraire une coalition de la base $B(j)$ n'appartenant pas à E_t, de poids supérieur ou égal.*

Preuve : Pour un $j \in M$ fixé, on considère une coalition S incluse dans $I(j)$ et n'appartenant pas à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de E_t. On va montrer qu'il existe toujours une coalition de la base B_j dont le poids est supérieur ou égal à celui de S.

- On suppose que $S^0 \in I_t$. Par conséquent S^0 n'appartient pas à E_t. De plus, cette coalition S^0 correspond à $I(j)$ est de poids supérieur à S car elle contient la coalition S. La coalition S^0 de la base B_j est donc une coalition de la base B_j n'appartenant pas à E_T et de poids supérieur à S.

- Supposons maintenant que tous les vecteurs de la base sont dans E_t. Comme S peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B(j)$, il s'ensuit que nécessairement S appartient à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de E_t. On aboutit à une contradiction.

- Si les deux cas précédents sont exclus, la coalition S, incluse dans $I(j)$, n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs de E_t. Comme cette coalition S s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $B(j)$ (Lem. 5), il existe obligatoirement une coalition de la base $B(j)$ qui n'appartient pas à vect(E_t) de poids supérieur ou égal à celui de S (Lem. 6).

□

Les lemmes qui précèdent nous permettent de déduire le résultat suivant :

THÉORÈME 4 : *Dans le calcul du nucléolus par génération de colonnes, la recherche des coalitions violées est polynomial à chaque palier de l'algorithme de Kopelowitz.*

À un palier de l'algorithme de Kopelowitz, on résout le programme réduit courant et on teste l'optimalité de la solution correspondante. En d'autres termes, on cherche à savoir si cette dernière ne viole aucune contrainte. Si une telle coalition existe alors elle est nécessairement libre avec E_t.

À l'aide du lemme 7, on montre que cette recherche se restreint aux seules coalitions des bases $B(j), j \in M$. Pour un nombre M de ressources de la matrice A, la recherche du plan de séparation se résout en temps polynômial, et d'après Grotchel *et al.* [5], le problème général se résout de manière efficace.

La résolution est efficace pour un palier t. Puisqu'à chaque étape, on ajoute une coalition indépendante des coalitions déjà obtenues, la recherche du nucléolus ne nécessite que $(Card(N) - 1)$ paliers de calcul ; la méthode est donc efficace.

7. JEUX DE PARTITIONNEMENT ET DE COUPLAGE

7.1. Le jeu de partitionnement

Dans le jeu de partitionnement, les ressources doivent égaler la demande des clients. Ceci mène au programme suivant pour le jeu entier de partitionnement :

$$\bar{P}(S)\begin{cases} \min\ \mathcal{Z} & = \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j \\ \sum_{j \in M} a_{ij} \cdot x_j = 1 & \forall i \in S \\ x_j & \in \mathcal{N} \quad \forall j \in M. \end{cases} \tag{8}$$

Un résultat intéressant relie les jeux de recouvrement et de partitionnement entiers : si le cœur du jeu entier de partitionnement est non vide, alors il est égal au cœur du jeu de recouvrement [9].

7.2. Le jeu de couplage

On peut également définir des jeux de gain de couplage. Le vecteur G_j est alors interprété comme un gain et doit être positif ou nul. La fonction objectif du programme linéaire correspondant est une fonction de gain qui doit être maximisée.

Le jeu de couplage entier est donc un jeu associé au programme suivant

$$\begin{cases} \max \mathcal{Z} & = \sum_{j \in M} G_j \cdot x_j \\ \sum_{j \in M} a_{ij} \cdot x_j \leq 1 & \forall i \in N \\ x_j & \in \mathcal{N} \quad \forall j \in M. \end{cases} \tag{9}$$

Le jeu de couplage ne possède pas *a priori* les propriétés de monotonie et de sous-additivité qui sont à la base des démonstrations établies pour le jeu de recouvrement. Une partie des résultats peut néanmoins se retrouver si on considère le jeu réduit suivant où les clients sont servis par un sous-ensemble des ressources disponibles [9]. Plus exactement, on définit :

- $I(j) = \{i \in N : a_{ij} > 0\}$, clientèle de j, définit l'ensemble de clients i de N qui peuvent tous être servis à l'aide de la seule ressource j.

- $J(S) = \{j \in M : I(j) \subseteq S\}$ définit l'ensemble des ressources j, dont la clientèle est dans la coalition S.

Pour le calcul de la valeur de jeu de couplage réduit, $\bar{v}_{\bar{Q}}(S)$, pour une coalition $S \subset N$, on restreint les ressources aux seules ressources $J(S)$, ainsi $\bar{v}_{\bar{Q}}(S)$ correspond à l'optimum du programme linéaire :

$$\bar{Q}(S) \begin{cases} \max \mathcal{Z} & = \sum_{j \in J(S)} G_j \cdot x_j \\ \sum_{j \in J(S)} a_{ij} \cdot x_j \leq 1 & \forall i \in S \\ x_j & \in \mathcal{N} \quad \forall j \in J(S). \end{cases} \tag{10}$$

Le jeu de couplage réduit, pour chaque coalition, est donc défini par la valeur optimale $\bar{v}_{\bar{Q}}(S)$ du programme linéaire $\bar{Q}(S)$ ou 0 si l'ensemble $J(S)$ s'avère être vide.

RÉFÉRENCES

1. P. Chardaire, *The core and nucleolus of simple plant location*, Technical Report SYS-C95-08. University of East Anglia (1996).
2. J. Edmonds, Optimum branchings. *National Bureau of Standards Journal of Research* **69B** (1967) 125–130.
3. M. Göthe-Lundgren, K. Jörnsten et P. Värbrand, On the nucleolus of the basic vehicule routing game. *Math. Programming* **27** (1996) 83–100.
4. D. Granot, A generalized linear production model: A unifying model. *Math. Programming* **34** (1986) 212–222.
5. M. Grotschel, L. Lovasz et A. Schrijver, The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica* **1** (1981) 169–197.
6. A. Kopelowitz, *Computation of the kernels of simple games and the nucleolus of n-person games*, Technical Report RM-31. The Hebrew University of Jerusalem (1967).
7. M. Maschler, M. Peleg et L.S. Shapley, Geometric properties of the kernel, nucleolus and related solution concepts. *Math. Oper. Res.* **4** (1979) 303–338.
8. G. Owen, On the core of linear production games. *Math. Programming* **9** (1975) 358–370.
9. N. Preux, *Tarification, coopération et compétition dans les réseaux de télécommunications*, Ph.D. Thesis. Université Blaise Pascal (1999).
10. N. Preux, *La théorie des jeux coopératifs : un outil pour l'allocation des coûts dans un réseau*, Technical Report NT/DAC/ORI/5026 (1997).
11. D. Schmeidler, The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM J. Appl. Math.* **17** (1969) 1163–1170.
12. A. Tamir, On the core of network synthesis games. *Math. Programming* **50** (1991) 123–135.
13. A. Tamir, On the core of cost allocation games defined on location problems. *Transportation Science* **27** (1992) 81–86.