RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

I. KOUADA

Sur la dualité en optimisation vectorielle convexe

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 28, n° 3 (1994), p. 255-281

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1994__28_3_255_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 28, n° 3, 1994, p. 255 à 281)

SUR LA DUALITÉ EN OPTIMISATION VECTORIELLE CONVEXE (*)

par I. KOUADA ([1])

Communiqué par Jean-Pierre CROUZEIX

Abstract. – *We consider a fairly general minimization problem in convex vector optimization. We define and study its dual and obtain as special cases, many existing results on the matter. Isermann's main duality result in the linear case will be improved. For working tools, we generalize several results used in convex scalar optimization to the vector case. On the way, we show that a result on duality and alternative in multiobjective optimization needs not satisfy the hypothesis of the domination property to hold.*

Keywords: Convexity, Cone, vector function, optimization, primal, dual, cone-lower semi-continuity.

Résumé. – *Nous considérons un problème assez général de minimisation en optimisation vectorielle convexe. Nous définissons et étudions son dual et obtenons comme cas particuliers, plusieurs résultats existant en la matière. Le principal résultat de dualité d'Isermann dans le cas linéaire a été amélioré. Comme objets de travail, nous généralisons plusieurs résultats utiles en optimisation scalaire convexe au cas vectoriel. En chemin, nous montrons que le lien entre la dualité et un résultat portant sur deux alternatives en optimisation multicritère n'a point besoin de satisfaire à l'hypothèse de la propriété de domination pour tenir.*

Mots clés : Convexité, cône, fonction vectorielle, optimisation, primal, dual, cône-semi-continuité.

1. INTRODUCTION

À la suite de beaucoup d'autres chercheurs (références [1, 2, 3, 7, 8, 12, 14, 17] par exemple) nous nous penchons sur le problème de la dualité en optimisation vectorielle convexe. Partant d'un problème primal convexe assez général, nous définirons et étudierons un dual également assez général. Nous retrouverons ainsi par voies de conséquences plusieurs résultats existant en la matière. En chemin, nous montrerons qu'un résultat dû à Luc dans [11] liant la dualité au choix entre deux alternatives exclusives en optimisation

(*) Reçu en juillet 1993.

([1]) Faculté des Sciences, Département des Mathématiques, BP 10662, Niamey, Niger.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/94/03/$ 4.00

multi-critères n'a point besoin de l'hypothèse de satisfaction de la propriété de domination [9]. Dans le cas linéaire, nous obtiendrons une amélioration du résultat pionnier d'Isermann [7]. Notre approche nécessitera au préalable la généralisation de certains résultats utiles en optimisation scalaire convexe au cas vectoriel. Auparavant, si S est une partie de $\mathbb{R}^k$, son intérieur, intérieur relatif, son adhérence, sa frontière (relative ou non) et son complémentaire seront respectivement notés int S (ou $\overset{\circ}{S}$), $ir\ S$, $adh\ S$ (ou $\overline{S}$), ∂S et S^c. On pose aussi $-S = \{-x \ : \ x \in S\}$ et si T est une autre partie de $\mathbb{R}^k$, $S + T = \{x + y \ : \ x \in S, \ y \in T\}$, $S - T = \{x - y \ : \ x \in S, \ y \in T\}$ et $S \backslash T = \{x \in S \ : \ x \notin T\}$.

Le produit scalaire usuel de x et $y \in \mathbb{R}^k$ est noté xy et le produit de x par une matrice M est noté xM ou Mx dépendant de celui qui est autorisé.

Tout au long de l'article, C est un cône convexe fermé, saillant et pointé dans $\mathbb{R}^k$ à intérieur int $C \neq \phi$, la dimension du sous-espace minimal contenant C étant k. Son polaire positif est défini par $C^* = \{a \in \mathbb{R}^k \ : \ ax \geqq O$ pour tout $x \in C\}$. C'est un cône convexe et fermé à intérieur.

int $C^* = \{a \in \mathbb{R}^k \ : \ ax > O$ pour tout $x \in C, \ x \neq O\}$ non vide dès lors que C est pointé et saillant.

Une partie S de $\mathbb{R}^k$ est C-convexe si $S + C$ est convexe, ce qui revient à dire que $\lambda\, x + (1 - \lambda)\, y \in S + C$ pour tous x et $y \in S$ et $\lambda \in [o, 1]$ [18].

C'est le cas quand S est convexe.

Pour tous x et $y \in \mathbb{R}^k$, on pose :

$x \leqq_C y$ si et seulement si (*ssi*) $y - x \in C$;

$x \leq_C y$ *ssi* $y - x \in C \backslash \{o\}$;

$x <_C y$ *ssi* $y - x \in$ int C.

Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur C, les ordres $\leqq_C$, $\leq_C$ et $<_C$ seront respectivement notés $\leqq$, $\leq$ et $<$.

1. *Remarques :* 1. Du fait que C soit convexe, saillant et pointé, on montre aisément (lemme 2.2 dans [14]) que :

$x \leqq y$ et $z \nleq y$ impliquent $z \nleq x$;

$x \leqq y$ et $x \nleq z$ impliquent $y \nleq z$.

2. Pour C toujours convexe, saillant et pointé, on montre aussi que :

$x \leqq y$ et $y \leq z$ impliquent $x \leq z$;

$o \leqq x$ et $y \nleq z$ impliquent $x + y \nleq z$;

$o \leqq x$ et $y - x \nleq z$ impliquent $y \nleq z$. □

Pour toute partie non vide S de $\mathbb{R}^k$, posons:

$$C\text{-min } S = \{y \in S \;:\; x \nleq y \text{ pour tout } x \in S\};$$
$$C\text{-max } S = \{y \in S \;:\; y \nleq x \text{ pour tout } x \in S\}.$$

Il s'agit de points Pareto-minima et Pareto-maxima de S par rapport à C.

Il est évident que C-min S et C-max S sont contenus dans ∂S et que si S est ouvert dans $\mathbb{R}^k$, comme $C \neq \{o\}$, alors C-min S=C-max $S = \phi$.

Supposons S convexe. Rappelons que son cône asymptote (*recession cone* en anglais) est défini par [16] :

$$O^+ S = \{u \in \mathbb{R}^k \;:\; \forall\, x \in S,\; x + \lambda\, u \in S,\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\; \lambda \geqq o\}.$$

C'est un cône convexe. Il est fermé si S l'est auquel cas

$$O^+ S = \{u \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, x \in S,\; x + \lambda\, u \in S,\; \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\; \lambda \geqq o\}.$$

On dit que S est C-borné (resp. C-fermé) si $O^+ S \cap -C = \{o\}$ (resp. $S + C$ est fermé). On peut montrer [6] que si S est C-fermé (le cas quand S est fermé puisque C est fermé), alors C-min $S \neq \phi$ *ssi* S est C-borné. L'espace $O^+ S \cap O^+ S$ est dit espace « linéal » de S.

À présent soient X une partie non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \dots, f_k)$ une fonction vectorielle de X dans $\mathbb{R}^k$.

Le C-épigraphe de f est défini par :

épi $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \;:\; x \in X, y \in f(x) + C\}$. f est dite C-convexe si épi f est convexe, ce qui revient à dire que pour tous x^1 et $x^2 \in X$ et tout $\lambda \in [o, 1]$, on a $\lambda\, f(x^1) + (1-\lambda)\, f(x^2) \in f(\lambda\, x^1 + (1-\lambda)\, x^2) + C$. Dans ce cas, pour x^1, x^2 et λ comme ci-dessus et pour tout $a \in C^*$, on aurait $af(\lambda\, x^1 + (1-\lambda)\, x^2) \leqq \lambda\, af(x^1) + (1-\lambda)\, af(x^2)$, autrement dit af serait convexe et par suite (corollaire 3.2 dans [18], $f(X) = \{f(x) \;:\; x \in X\}$ serait C-convexe. Notons que réciproquement, si af est convexe pour tout $a \in C^*$, alors f est C-convexe car $C^{**} = \text{adh}\, C = C$. On dit que f est C-concave si elle est (-C)-convexe.

Si f est à la fois C-convexe et C-concave, alors pour tous x^1 x^2 et λ comme ci-dessus, on aurait $\lambda\, f(x^1) + (1-\lambda)\, f(x^2) = f(\lambda\, x^1 + (1-\lambda)\, x^2)$, autrement dit il existerait une $k \times n$-matrice réelle M et un $c \in \mathbb{R}^k$ tels que $f(x) = Mx + c$.

Nous dirons que f est C-semi-continue inférieurement (C-$s.c.i$) en $x^0 \in X$ si pour tout voisinage V de $f(x^0)$, il existe un voisinage U de x^0 tels que $f(x) \in V + C$ pour tout $x \in U \cap X$.

Notre C-semi-continuité inférieure est appelée C-continuité dans [12]. f est dite C-$s.c.i$ sur X si elle l'est en tout point de X. Quand $C = \mathbb{R}^k_+$, il est facile de voir [9] que la C-$s.c.i$ de f équivaut à la semi-continuité usuelle de chaque composante f_i de f.

On peut aussi montrer (lemme 2.3 dans [12]) que f est C-$s.c.i$ sur X ssi pour $a \in C^*$, af est $s.c.i.$

Moyennant certaines hypothèses que nous ferons sur f et X, cet article sera consacré à la recherche et l'étude d'un dual au problème primal :

$$(P): \quad \text{trouver } C\text{-min } f(X).$$

Si $f(x) \in C$-min $f(X)$, x ou $f(x)$ est dit optimal ou (Pareto-)efficace pour (P).

Comme pour tous x^1 et $x^2 \in X$, on a $f(x^1) \leq f(x^2)\, ssi\, f(x^2) - f(x^1) \in C \backslash \{o\}$ et que la dimension du plus petit sous-espace contenant C est supposée k, on déduit que chaque critère f_i pour $i = 1, \ldots, k$ importe dans (P).

Enfin, dans tout le reste du papier, e est un élément d'un espace euclidien dont la dimension sera précisée par le contexte, toutes les composantes de e étant l'unité.

2. PRÉLIMINAIRES

Dans ce paragraphe, X est une partie convexe et non vide de $\mathbb{R}^n$ et f est une fonction vectorielle C-convexe de X dans $\mathbb{R}^k$. Comme nous venons de le voir, $f(X)$ est C-convexe et la C-convexité de f équivaut à la convexité usuelle des af avec $a \in C^*$. Nous appellerons C-cône asymptote de f (*C-recession cone* en anglais) l'intersection de O^+ épi f (cône asymptote du C-épigraphe de f) avec l'hyperplan « horizontal » $\{(x, o) : x \in \mathbb{R}^n, o \in \mathbb{R}^k\}$, une intersection qui s'identifie à la partie de $\mathbb{R}^n$:

$$O^+ f = \{u \in \mathbb{R}^n : u \in O^+ X, \forall x \in X, f(x) \in f(x+\lambda u) + C, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geqq O\}.$$

2. *Remarque* : $O^+ f$ est de toute évidence un cône dans $\mathbb{R}^n$. De plus, comme f est C-convexe, donc épi f est convexe, on a O^+ épi f un cône convexe. On déduit que $O^+ f$ est un cône convexe. □

3. Théorème : *Si X est fermé et f C-$s.c.i$, alors $O^+ f$ est un cône convexe fermé.* □

Preuve : Nous savons déjà que $O^+ f$ est un cône convexe. Soit alors (u^i) une suite dans $O^+ f$ convergeant vers u. Comme chaque $u^i \in O^+ X$, ce dernier cône étant fermé car X l'est, on a $u \in O^+ X$. Ainsi pour tout $x \in X$ et $\lambda \geqq O$, $x + \lambda u \in X$.

$u^i \in O^+ f$ implique $f(x) = f(x + \lambda u^i) + c^i$ pour un $c^i \in C$.

D'autre part on a $\lim [x + \lambda u^i] = x + \lambda u$ et comme f est C-$s.c.i$ en $x + \lambda u$, on a $f(x + \lambda u^i) = f(x + \lambda u) + y^i + d^i$ pour un $d^i \in C$ et i suffisamment grand, où $y^i \in \mathbb{R}^k$ avec $\lim y^i = o$. Il s'en suit que $f(x) = f(x + \lambda u) + y^i + d^i + c^i$ pour i grand. On a donc $\lim (c^i + d^i) = c \in C$ car C est un cône convexe et fermé et par suite $f(x) = f(x + \lambda u) + c$. On conclut que $u \in O^+ f$. □

4. *Remarques :* 1. $O^+ f = \bigcap_{a \in C^*} O^+ af$. En effet pour tout $u \in O^+ f$, tout $x \in X$ et tout $\lambda \geqq O$ on a $f(x) - f(x + \lambda u) \in C$, donc pour tout $a \in C^*$, on a $af(x + \lambda u) \leqq af(x)$ et donc $u \in O^+ af$. Réciproquement si $u \in O^+ af$ pour tout $a \in C^*$, alors pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \geqq O$, on a $a[f(x) - f(x + \lambda u)] \geqq O$ pour tout $a \in C^*$. Il s'en suit que

$$f(x) - f(x + \lambda u) \in C^{**} = C \text{ et donc } u \in O^+ f.$$

2. L'espace $O^+ f \cap -O^+ f$ est dit de constance de f. □

Quand X est fermé et f C-$s.c.i$, dans le processus d'obtenir $f(X)$ C-fermé en l'absence de l'hypothèse habituelle forte de compacité de X, on a :

5. LEMME : *Si X est fermé et f C-$s.c.i$, alors épi f est convexe et fermé.* □

Preuve : Nous savons déjà que épi f est convexe car f est C-convexe. Soit alors une suite (x^i, y^i) dans épi f convergeant vers (x, y). $x \in X$ car X est fermé. Pour tout voisinage U de x et tout voisinage V de y, pour i grand, on aurait $x^i \in U$ et $y^i \in V$. De plus, $y^i \in f(x^i) + C$ car $(x^i, y^i) \in$ épi f.

En prenant V de la forme $\{z \in \mathbb{R}^k : \|z - y\| < \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > o$ et tout U comme ci-dessus, quand i est grand, on aurait $x^i \in U$, $\|y^i - y\| < \varepsilon$ et $y^i \in f(x^i) + C$, donc $y^i = y + t^i \in f(x^i) + C$ pour un $t^i \in \mathbb{R}^k$ avec $\|t^i\| < \varepsilon$. Comme f est C-$s.c.i$ en x, pour tout $\varepsilon > o$, il existe un voisinage U_0 de x (intersection de U et d'un autre voisinage approprié de x) tel que pour i grand, on ait $x^i \in U_0$, $y^i = y + t^i \in f(x^i) + C$ pour un $t^i \in \mathbb{R}^k$ avec $\|t^i\| < \varepsilon$ et $f(x^i) \in f(x) + C$. Il existe donc c^i et $d^i \in C$ tels que $y = f(x) - t^i + c^i + d^i$ où $\lim t_i = o$. Ainsi $c = \lim (c^i + d^i)$ existe et comme C est convexe et fermé, on a $c \in C$. On conclut $y = f(x) + c$, c'est-à-dire que $(x, y) \in$ épi f. □

La projection de épi f sur $\mathbb{R}^k$ est l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, x \in X,\ y \in f\,(x) + C\}$.

Cet ensemble est de toute évidence identique à $f\,(X) + C$. Quand bien même épi f est un convexe fermé, $f\,(X) + C$ peut ne pas être fermé car la projection d'un convexe fermé n'est pas nécessairement fermé. C'est le cas de la première projection de $\{x,\ y\} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > o,\ y \geqq 1/x\}$ (*voir* [16]).

Dans les hypothèses sur C, si X est compact et f C-*s.c.i*, il n'est pas difficile de montrer que $f\,(X)$ est C-compact, c'est-à-dire C-borné et C-fermé (lemme 2.5 dans [12]).

On a aussi :

6. THÉORÈME : *Supposons X fermé et f C-s.c.i. Si toute direction asymptotique non nulle de f appartient à l'espace de constance de f, autrement dit si tout non nul $u \in O^+ f$ appartient à $O^+ f \cap -O^+ f$, alors $f\,(X)$ est C-convexe et C-fermé.* □

Preuve : Notons que $O^+ f \subset O^+ X$ et $-O^+ f \subset -O^+ X$ et donc $O^+ f \cap -O^+ f \subset O^+ X \cap -O^+ X$. On sait déjà que $f\,(X)$ est C-convexe, autrement dit $f\,(X) + C$ est convexe. Il reste à montrer que $f\,(X)$ est C-fermé, autrement dit $f\,(X) + C$ est fermé. Des commentaires précédant le théorème on sait que $f\,(X) + C$ est la projection de épi f sur $\mathbb{R}^k$.

Du lemme 5 ci-dessus, épi f est convexe et fermé. De plus il est non vide car X est non vide. Soit p la projection canonique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ sur $\mathbb{R}^k$.

Alors pour tout $(u,\ v) \in O^+$ épi f tel que $p\,(u,\ v) = o$, on a $p\,(u,\ v) = v = o$ de sorte que $(u,\ v) = (u,\ o)$, donc $u \in O^+ f$. Dans les hypothèses du théorème sur un tel $u \neq o$, on aura $(u,\ o)$ appartenant à l'espace linéal de épi f. Il vient alors du théorème 9.1 dans [12] que adh p (épi f) $=$ p (adh épi f) $=$ p (épi f), autrement dit adh $[f\,(x) + C] = f\,(X) + C$. □

L'intérêt dans l'ensemble $f\,(X) + C$ est justifié par la première partie des remarques suivantes :

7. *Remarques* : 1. C-min $f\,(X) = C$-min $[f\,(X) + C]$. Comme C est convexe et saillant, ce résultat est une partie du lemme 4.1 dans [18].

2. Avec $F = f\,(X) + C$, on a $F + C \subset F$. Par conséquent, en supposant F convexe et fermé, si $ay = ay^0$ est l'équation d'un hyperplan supportant F au point $y^0 \in F$, autrement dit $ay^0 = \min\,[ay \ : \ y \in F]$, donc $F \subset \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ ay \geqq ay^0\}$, alors pour tout $c \in C$, comme $y = y^0 + c \in F$, on a $ay = a\,(y^0 + c) = ay^0 + ac \geqq ay^0$ donc $ac \geqq O$ et par suite

$a \in C^*$. Nous dirons que le demi-espace fermé $\{y \in \mathbb{R}^k \; : \; ay \geqq ay^0\}$ supporte F en y^0. Notons enfin que comme $ac \geqq O$ pour tout $c \in C$, on a $ay^0 = \min\,[af\,(x) \; : \; x \in X]$. □

Le lemme suivant est une généralisation du théorème 1, p. 63, dans [13].

8. Lemme : *Si $f\,(x) \nless O$ [i.e.-$f\,(x) \notin \operatorname{int} C$] pour tout $x \in X$, alors il existe $a \in C^* \backslash \{o\}$ tel que $af\,(x) \geqq O$ pour tout $x \in X$.*

Preuve : 1. Pour tout $x \in X$, posons $A(x) = \{y \in \mathbb{R}^k : y - f\,(x) \in \operatorname{int} C\}$ et $A = \bigcup_{x \in X} A\,(x) = f\,(X) + \operatorname{int} C$ et montrons que A est convexe. Soient y^1 et $y^2 \in A$ et $\alpha \in [o,\,1]$. Il existe x^1 et $x^2 \in X$ tels que $y^1 \in A\,(x^1)$ et $y^2 \in A\,(x^2)$.

On a alors $[ay^1 + (1-\alpha)\,y^2] - [\alpha\, f\,(x^1) + (1-\alpha)\, f\,(x^2)] \in \operatorname{int} C$. f étant C-convexe, on a $[\alpha f(x^1) + (1-\alpha) f(x^2)] - f(\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2) \in C$ et comme $C + \operatorname{int} C \subset \operatorname{int} C$, on a $\alpha\, y^1 + (1-\alpha)\, y^2 - f\,(\alpha\, x^1 + (1-\alpha)\, x^2) \in \operatorname{int} C$ et donc A est convexe.

2. Comme $f\,(x) \nless O$ pour tout $x \in X$, $O \notin A$ et par la séparation des convexes, il existe $a \in \mathbb{R}^k$, $a \neq o$ tel que $a\, y \geqq O$ pour tout $y \in A$.

Soit $y \in A$ fixé. $y = f\,(x) + c^1$ pour un $x \in X$ et un $c^1 \in \operatorname{int} C$. Pour tout $c \in C$ et tout réel $\alpha > o$, $y' = f\,(x) + c^1 + \alpha\, c \in A$ car $c^1 + \alpha\, c \in \operatorname{int} C$.

On a donc $a\,y' = a\, f\,(x) + a\, c^1 + \alpha\, ac \geqq O$. c étant quelconque dans C, si $a \notin C^* \backslash \{o\}$, on peut choisir c tel que $a\, c < o$ et en prenant α suffisamment grand, on obtient une contradiction. Il s'en suit que $a \in C^* \backslash \{o\}$.

3. Soient $c \in \operatorname{int} C$, un réel $\varepsilon > o$ et $x \in X$. Alors $y_\varepsilon = f\,(x) + \varepsilon\, c \in A$ donc $ay_\varepsilon = af\,(x) + \varepsilon\, ac \geqq O$. On déduit que

$$af\,(x) \geqq -\varepsilon\, ac \quad \text{pour tout } x \in X \quad \text{et tout } \varepsilon > O. \tag{$\bigstar$}$$

Si $\inf\,[a\, f\,(x) \; : \; x \in X] = -\delta < o$, alors avec ε tel que $\varepsilon\, ac < \delta$, on contredit ($\bigstar$).

On conclut que $af\,(x) \geqq O$ pour tout $x \in X$. □

Le corollaire qui suit est une version encore généralisée du théorème généralisé de Gordan (théorème 3, p. 65 dans [13]).

9. Corollaire : *Une et seulement une des deux alternatives suivantes peut avoir lieu :*

a) Il existe $x \in X$ tel que $f\,(x) < o$ (i.e.-$f\,(x) \in \operatorname{int} C$);

b) Il existe $a \in C^*\backslash\{o\}$ *tel que* $af(x) \geqq O$ *pour tout* $x \in X$. □

Preuve : Si *a*) tient avec $x \in X$, alors $a \in C^*\backslash\{o\}$, $a\,f(x) < o$ et donc *b*) ne tient pas. Par contre si *a*) ne tient pas, *b*) tient selon le lemme. □

Pour le résultat suivant, nous aurons besoin de :

10. *Remarque*: Soit K un cône convexe pointé et saillant dans $\mathbb{R}^m$. On vérifie facilement que :

a) $C \times K$ est un cône convexe pointé et saillant dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$.

b) Si comme C, K est fermé, alors $C \times K$ est fermé.

c) $(C \times K)^* = C^* \times K^*$, un cône convexe fermé à intérieur

$$\operatorname{int}(C \times K)^* = \{(a, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \ : \ ax + by > o \quad \text{pour tout } (x, y) \in (C \times K)\backslash\{(o, o)\}\}$$

non vide dès lors que $C \times K$ est saillant. □

11. Corollaire : *Soient* K *un cône convexe pointé et saillant dans* $\mathbb{R}^m$ *avec* $\operatorname{int} K \neq \phi$ *et* $g = (g_1, \ldots, g_m)$ *une fonction vectorielle* K*-convexe de* X *dans* $\mathbb{R}^m$.

Alors (f, g) *est* $C \times K$*-convexe.*

Si $f(x) \nleq_C O$ *et* $g(x) \nleqq_K O$ (i.e.-$f(x) \notin C\backslash\{o\}$ *et* $-g(x) \notin K$) *pour tout* $x \in X$, *alors il existe* $(a, b) \in (C \times K)^*\backslash\{(o, o)\}$ *tel que* $af(x) + bg(x) \geqq O$ *pour tout* $x \in X$. □

Preuve : On vérifie facilement que (f, g) est $C \times K$-convexe. Pour le reste, il suffit d'observer que :

$$f(x) \nleq_C O \text{ implique } f(x) \nless_C O$$

et

$$g(x) \nleqq_K O \text{ implique } g(x) \nless_K O,$$

pour conclure de la remarque 10 et du lemme 8. □

3. DUALITÉ

Dans ce paragraphe, X est une partie non vide de $\mathbb{R}^n$ qui est convexe et fermée et est soit polyhédrique ou à intérieur relatif non vide et f est une fonction vectorielle de X dans $\mathbb{R}^k$ qui est C-convexe et C-*s.c.i.* Nous savons que dans ces hypothèses, $F = f(x) + C$ est un convexe non vide et fermé dans $\mathbb{R}^k$. De plus, il découle de la première partie des remarques 7 que le problème primal (P) possède la formulation équivalente ci-après :

$$(P') : \quad \text{trouver } C\text{-min } F.$$

Comme $F = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, x \in X, y \in f(x) + C\} = f(X) + C$, soit l'ensemble suivant que nous appellerons dual de F :

$$\begin{aligned} E^* &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ z \nleq y \text{ pour tout } z \in f(X)\} \\ &\qquad (\text{rappelons que } z \nleq y \text{ signifie } y \notin z + C\backslash\{o\}) \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ y \notin z + C\backslash\{o\} \text{ pour tout } z \in f(X)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ y \notin f(X) + C\backslash\{o\}\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ y \notin f(x) + C\backslash\{o\} \text{ pour tout } x \in X\} \end{aligned}$$

et appelons problème dual de (P), le suivant :

$$(D) : \quad \text{trouver } C\text{-max } E^*.$$

Il s'agit de trouver les points Pareto-maxima de E^* par rapport à C.

Tout $y \in C$-max E^* sera dit optimal ou Paréto-efficace pour (D).

Pour le reste du papier, posons :

$$E = f(X)$$

de sorte que le problème primal s'écrive :

$$(P) : \quad \text{trouver } C\text{-min } E.$$

12. *Remarque* (dualité faible) : Il découle de la définition de E^* que pour tout $y \in E$ et tout $z \in E^*$, $z \notin y + C\backslash\{o\}$, autrement dit $y \nleq z$. □

13. PROPOSITION : *Si* $y \in E \cap E^*$, *alors* $y \in C$-min $E \cap C$-max E^*. □

Preuve : Comme $y \in E^*$ alors $y \notin z + C\backslash\{o\}$ pour tout $z \in E$ autrement dit $z \nleq y$ pour tout $z \in E$ et comme $y \in E$ on conclut que $y \in C$-min E.

Si $y \notin C$-max E^*, comme $y \in E^*$, alors il existe $z \in E^*$ tel que $z \in y + C\backslash\{o\}$, autrement dit $y \leq z$. Notant que $y \in E$, on a une contradiction à $z \in E^*$. On conclut que $y \in C$-max E^*. □

14. THÉORÈME (dualité forte) : 1. *On a toujours* C-min $E \subset C$-max E^*.

2. *Si toute direction asymptotique non nulle de* f *appartient à l'espace de constance de* f, *alors* C-min $E = C$-max E^*. □

Preuve : On sait des remarques 7 que C-min $E = C$-min F où $F = f(X) + C = E + C$.

1. Soit $y^0 \in C$-min E. Alors $y^0 \notin z + C\backslash\{o\}$, soit $z \nleq y^0$ pour tout $z \in E$ et donc $y^0 \in E^*$. Il vient de la proposition 13 que $y^0 \in C$-max E^* et donc C-min $E \subset C$-max E^*.

2. Compte tenu de la première partie du théorème, il nous suffit de montrer, dans l'hypothèse de la seconde partie, que C-max $E^* \subset C$-min F. Soit alors $y^0 \in C$-max E^*. Selon le théorème 6, F est fermé et par conséquent

$$\begin{aligned} F^c &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ y \notin z + C \text{ pour tout } z \in E\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ z \nleqq y + C \text{ pour tout } z \in E\} \end{aligned}$$

est ouvert. Comme $F^c \subset E^*$, $y^0 \in \partial E^*$ et F^c ouvert, on a $y^0 \notin F^c$, donc $y^0 \in F$. Si $y^0 \notin C$-min F, alors il existe $y^1 \in F$ tel que $y^0 \in y^1 + C\backslash\{o\}$ soit $y^1 \leq y^0$. D'autre part $y^1 \in F$ implique l'existence d'un $z \in E$ tel que $y^1 \in z + C$, soit $z \leqq y^1$. Il vient alors des remarques 1 dans l'introduction que $z \leq y^0$ soit $y^0 \in z + C\backslash\{o\}$, contredisant $y^0 \in E^*$. On conclut que $y^0 \in C$-min F et par suite C-max $E^* \subset C$-min F. $\square$

15. *Remarques* : 1. La première conclusion du théorème 14 ci-dessus, à savoir C-min $E \subset C$-max E^*, en fait, signifie que pour tout $y \in C$-min E, il existe $z \in E^*$ tel que $y \leqq z$, soit $z \in y + C$.

En effet l'inclusion étant donnée, pour tout $y \in C$-min E on a $y \in C$-max E^* et de toute évidence il suffit de prendre $z = y$. Pour la réciproque, soit $y \in C$-min E. Il existe alors par hypothèse $z \in E^*$ tel que $y \leqq z$. Il vient de la dualité faible (remarque 12) que $y = z$ donc $y \in E^*$. Si $y \notin C$-max E^*, alors il existe $y' \in E^*$ tel que $y \leq y'$ contredisant la dualité faible car $y \in E$. On conclut que $y \in C$-max E^* et par suite C-min $E \subset C$-max E^*.

2. Plus loin encore, on a les cas suivants qui sont équivalents :

a) Pour tout $y \in C$-min E, il existe $z \in E^*$ tel que $y \leqq z$.

b) Pour tout $y \in F \cup E^*$ si $z \nleq y$ pour tout $z \in E$, alors il existe $y' \in E^*$ tel que $y \leqq y'$.

En effet supposons que *a*) tienne et soit $y \in F \cup E^*$ tel que $z \nleq y$ pour tout $z \in E$. Si $y \in F$, alors $y \in C$-min $F = C$-min $E \subset C$-max E^*.

Il suffit donc de prendre $y' = y$. Si $y \in E^*$, on prend encore $y' = y$. Dans tous les cas donc *b*) tient.

Réciproquement, supposons que *b*) tienne et soit $y \in C$-min E. Comme $z \nleq y$ pour tout $z \in E$, il existe $y' \in E^*$ tel que $y \leqq y'$ et par dualité faible $y = y'$. Il suffit alors de prendre $z = y'$ pour conclure que *a*) tient.

3. On a aussi les équivalents ci-après :

a) La dualité faible.

b) Pour tout $y \in F \cup E^*$, s'il existe $z \in E^*$ tel que $y \leqq z$, alors $y' \not\leq y$ pour tout $y' \in E$.

En effet, en supposant *a*), soit $y \in F \cup E^*$ et $z \in E^*$ tels que $y \leqq z$. S'il existe $y' \in E$ tel que $y' \leq y$, on aurait (remarques 1) $y' \leq z$ contredisant la dualité faible. On conclut que *b*) tient.

Réciproquement, supposons *b*) et soient $y \in Z$ et $z \in Z^*$.

Si $y \leq z$, alors $y' \not\leq y$ pour tout $y' \in E$, ce qui implique $y \in C\text{-min}\, E \subset C\text{-max}\, E^*$ contredisant $y \leq z$ car $z \in E^*$. On conclut que *a*) tient.

4. Observons que 2.*b*) et 3.*b*) ensemble disent que pour tout $y \in F \cup E^*$ une et seulement une des deux alternatives suivantes tient.

a) Il existe $z \in E$ tel que $z \leq y$.

b) Il existe $z \in E^*$ tel que $y \leqq z$.

En effet *b*) implique non *a*) par 3*b*) et non *a*) implique *b*) par 2*b*).

Comme $E_+ = E + C = F$ et que

$$\begin{aligned} E^*_- = E^* - C &= \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, z \in \mathbb{R}^k,\, y \leqq z,\, z' \not\leq z,\ \forall\, z' \in E\} \\ &\subset \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; z' \not\leq y,\ \forall\, z' \in E\} = E^* \end{aligned}$$

(usant des remarques 1), on conclut que E et E^* satisfont la relation des alternatives au sens de [11].

3.*a*) tient toujours (remarques 12) donc 3.*b*) aussi et on conclut des deux premières parties que E et E^* satisfont la relation des alternatives équivalente à l'inclusion $C\text{-min}\, E \subset C\text{-max}\, E^*$ dite relation de dualité entre E et $E*$ conformément aux terminologies de LUC dans [11]. Cette conclusion tient en l'absence de l'hypothèse supplémentaire de satisfaction de la propriété de domination [9] par E exigée à la remarque 2.1 de [11]. □

16. *Remarque* : L'hypothèse de la deuxième partie du théorème 14 de dualité forte nous permettait à travers le théorème 6 de dire que $F = E + C = f(X) + C$ est fermé qui est le fait utilisé pour établir l'égalité $C\text{-min}\, E = C\text{-max}\, E^*$. □

En quête de reformulations du problème dual (D), posons :

$$\begin{aligned} G_1^* &= \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\, ay \leqq az \text{ pour tout } z \in E\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\, ay \leqq \inf\,[az \;:\; z \in E]\}, \\ G_2^* &= \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\, z \in E,\, ay \leqq az = \inf\,[au \;:\; u \in E]\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \;:\; \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\, ay \leqq \min\,[az \;:\; z \in E]\}. \end{aligned}$$

On a de toute évidence l'inclusion $G_2^* \subset G_1^*$. On a également l'inclusion $G_1^* \subset E^*$. En effet soit $y \in G_1^*$. Alors il existe $a \in \operatorname{int} C^*$ tel que $ay \leqq az$ pour tout $z \in E$.

Si $y \notin E^*$, alors il existerait $z^0 \in E$ tel que $z^0 \leq y$, autrement dit $y - z^0 \in C \backslash \{o\}$. Comme $a \in \operatorname{int} C^*$ on aurait $ay > az^0$, d'où une contradiction. On conclut que $y \in E^*$ et donc $G_1^* \subset E^*$.

17. Lemme : Si F est fermé (le cas dans l'hypothèse du théorème 6), alors $G_2^* \subset G_1^* \subset E^* \subset \operatorname{adh} F^c$. Si en plus il existe $a^0 \in \operatorname{int} C^*$ tel que le demi-espace fermé $\{y \in \mathbb{R}^k \ : \ a^0 y \geqq c(a^0)\}$ où $c(a^0) = \min [a^0 z \ : \ z \in E]$ supporte F, alors $F^c \subset G_2^* \subset G_1^* \subset E^* \subset \operatorname{adh} F^c$. □

Preuve : 1. Montrons que $E^* \subset \operatorname{adh} F^c$. Si $y \in E^*$, alors $z \nleq y$ pour tout $z \in F$ car sinon on contredirait $y \in E^*$. Il s'en suit que $y \notin ir\, F$ et donc $y \in \operatorname{adh} F^c$.

2. Les inclusions $G_2^* \subset G_1^* \subset E^*$ ont déjà été vues avant le lemme.

3. Montrons que $F^c \subset G_2^*$. La preuve de cette inclusion s'inspire de celle du lemme 3.1 dans [14]. Comme F est un convexe fermé et non vide, il vient de la seconde partie des remarques 7 que F est l'intersection des demi-espaces fermés $\{y \in \mathbb{R}^k \ : \ ay \geqq c(a)\}$ supportant F, où $a \in C^*$ et $c(a) = \min [az \ : \ z \in E] = az^a$ avec $z^a \in E$. Cette intersection contient celle des demi-espaces fermés avec $a \in \operatorname{int} C^*$. Pour montrer l'inclusion contraire, supposons que pour un $a^1 \in \partial C^*$, on ait $F \subset H^+(a^1) = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ a^1 y \geqq c(a^1)\}$. Avec $h_t(y) = (t\, a^1 + a^0)\, y - [t\, c(a^1) + c(a^0)]$ pour $t \in \mathbb{R}$, $t > o$ et $y \in F$, on a $h_t(y) \geqq o$ et pour $z \in \operatorname{int} H^-(a^1) = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ a^1 y < c(a^1)\}$, on aurait $h_t(z) < o$ pour $t > o$ suffisamment grand. Comme $a^0 \in \operatorname{int} C^*$ et $a^1 \in \partial C^*$, on a $t\, a^1 + a^0 \in \operatorname{int} C^*$ pour tout $t > o$.

Il existe donc une valeur t_0 de t telle que $\overline{a} = t_0\, a^1 + a^0 \in \operatorname{int} C^*$,

$$F \subset \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ h_{t_0}(y) \geqq o\} \qquad \text{et} \qquad z \in \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ h_{t_0}(y) < o\}.$$

En d'autres termes l'hyperplan frontière de $H^+(\overline{a})$ supporte F et est entre F et z. Cela implique l'inclusion souhaitée et on a $F = \bigcap_{a \in \operatorname{int} C^*} H^+(a)$. Il s'en suit que $F^c = \bigcup_{a \in \operatorname{int} C^*} \operatorname{int} H^-(a) \subset \bigcup_{a \in \operatorname{int} C^*} H^-(a) = G_2^*$ où $H^-(a) = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ a\, y \leqq c(a)\}$. □

18. Définition : *$y \in E$ est dit proprement optimal ou proprement (Paréto-) efficace pour le problème primal (P) s'il existe $a \in \operatorname{int} C^*$ tel*

que $a\,y = \min\,[a\,z \;:\; z \in E]$ *auquel cas tout* $x \in X$ *tel que* $y = f\,(x)$ *est aussi dit solution proprement optimale ou proprement (Paréto-) efficace pour* (P). □

19. *Remarque* : Tout $y \in E$ proprement optimal pour (P) est *a priori* optimal pour (P). En effet si $a\,y = \min\,[a\,z =: z \in E]$ pour un $a \in \operatorname{int} C^*$ et qu'il existe $z \in E$ tel que $z \leq y$, soit $y - z \in C \backslash \{o\}$, alors $a\,z < a\,y$ et on a une contradiction.

La réciproque est valable dans certaines situations. Donnons en trois exemples quand $C = \mathbb{R}_+^k$.

a) Prenant X comme dans [10], en présence de différentiabilité et d'une condition dite de contrainte, Kuhn et Tucker montrent que la réciproque en question tient.

b) Si tout élément de C-min E est proprement efficace au sens de [5], cet ensemble serait constitué de points proprement efficaces au sens de la définition 18.

c) Si tout $y \in C$-min E est tel que pour tout $x^0 \in X$ avec $y = f\,(x^0)$ et tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ on ait $f_j\,(x) < f_j\,(x^0)$ pour $j \neq i$ et un $x \in X$, encore la réciproque tiendrait. En effet pour chaque i, x^0 serait optimal au problème scalaire $\min\,[f_i\,(x) \;:\; x \in X,\ f_j\,(x) \leqq f_j\,(x^0)$ pour $j \neq i]$ et comme la condition de Slater [13] est satisfaite dans ce problème, il existerait des réels $a_{ij} \geqq O$ pour $j \in \{1, \ldots, k\} \backslash \{i\}$ tels que $f_i\,(x^0) \leqq f_i\,(x) + \sum_{j \neq i} a_{ij}\,[f_j\,(x) - f_j\,(x^0)]$ pour tout $x \in X$. En faisant la somme sur i et en arrageant, on conclut à l'existence d'un $a \in \mathbb{R}^k$, $a > o$ tel que $a\,f\,(x^0) = \min\,[a\,f\,(x) \;:\; x \in X]$, donc tout élément de C-min E serait proprement efficace. □

20. THÉORÈME : *Supposons* F *fermé (le cas dans l'hypothèse du théorème 6),* C-min E *non vide, tout élément de ce dernier ensemble étant proprement optimal. Alors* C-min $E = C$-max G_1^*. □

Preuve : 1. Soit $y \in C$-min E. Comme y est propre, il existe $a \in \operatorname{int} C^*$ tel que $ay \leqq az$ pour tout $z \in E$, donc $y \in G_1^*$. Si $y \notin C$-max G_1^*, alors il existe $y' \in G_1^*$ tel que $y \leq y'$, par conséquent, il existe $b \in \operatorname{int} C^*$ tel que $by' \leqq bz$ pour tout $z \in E$ et $y \leq y'$ donc $by < by' \leqq bz$ pour tout $z \in E$. On a une contradiction car $y \in E$.

On conclut que $y \in C$-max G_1^* et par suite C-min $E \subset C$-max G_1^*.

2. Réciproquement, soit $y \in C$-max G_1^*. Comme $G_1^* \subset E^*$, on a $y \in E^*$ et comme $u \nleq y$ pour tout $u \in E$ et pour un tel u et tout $z \in F$, $u \leqq z$, de la première partie des remarques 1, on a :

$$z \nleq y \quad \text{pour tout } z \in F \quad (\bigstar).$$

Soit $y^0 \in C$-min E, y^0 étant proprement optimal. Alors, il existe $a^0 \in \operatorname{int} C^*$ tel que $a^0\, y^0 = \min\, [a^0\, z \;:\; z \in E]$. Comme pour tout $v \in F$, on a $v = u + c$ pour un $u \in E$ et un $c \in C$, donc $a^0\, u \leqq a^0\, v$, on déduit que $a^0\, y^0 \leqq a^0\, u \leqq a^0\, v$ et par suite $a^0\, y^0 \leqq a^0\, v$ pour tout $v \in F$. Ainsi toutes les hypothèses du lemme 17 sont satisfaites. On a donc les inclusions $F^c \subset G_1^* \subset E^* \subset \operatorname{adh} F^c$. Comme $y \in C$-max G_1^*, $y \notin \operatorname{int} G_1^*$, $y \in \partial \operatorname{adh} F^e = \partial F$ car F^c est ouvert. On conclut de $(\bigstar)$ que $y \in C$-min $F = C$-min E et donc C-max $G_1^* \subset C$-min E. □

21. *Remarque* : Définissons un nouveau dual de (P) par :

$$(D_1) \;:\quad \text{trouver } C\text{-max } G_1^*.$$

Comme $G_1^* \subset E^*$, la dualité faible de la remarque 12 tient pour tout $y \in E$ et tout $z \in G_1^*$. De plus dans les hypothèses du théorème 20 ci-dessus, comme on a les égalités C-max $E^* = C$-min $E = C$-max G_1^*, il vient de la proposition 13 que pour tout $y \in E \cap G_1^*$, on a $y \in C$-min $E \cap C$-max G_1^*.

La fonction indicatrice I_X de X est définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$I_X(x) = \begin{cases} o & si \quad x \in X \\ +\infty & si \quad x \in X^c \end{cases}$$

Son domaine effectif, $\operatorname{dom} I_X = \{x \in \mathbb{R}^n : I_X(x) < +\infty\} = X$. Étant à valeurs finies sur son domaine effectif non vide, I_X est par définition propre. L'hypothèse de fermeture de X équivaut à la semi-continuité inférieure de I_X et la convexité de X équivaut à celle de I_X.

Sauf indication autre, pour tout $a \in C^*$, on considèrera la fonction af définie, convexe et $s.c.i$ sur X prolongée à $\mathbb{R}^n$ tout entier avec $af(x) = +\infty$ pour x hors de X.

En ce faisant, af est définie, convexe et $s.c.i$ sur $\mathbb{R}^n$ tout entier et est propre avec $\operatorname{dom} af = X$.

Dans cette compréhension des choses, notant que $\operatorname{dom}(af + I_X) = \operatorname{dom} af \cap \operatorname{dom} I_X = X$, on a :

$$\begin{aligned} &\inf\,[af(x) + I_X(x) \;:\; x \in \mathbb{R}^n] \\ &\quad = \inf\,[af(x) + I_X(x) \;:\; x \in X] \\ &\quad = \inf\,[af(x) \;:\; x \in X] \end{aligned}$$

de sorte que :

$$G_1^* = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\ ay \leqq \inf\,[af\,(x) + I_X\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n]\}$$

Rappelons que pour toute fonction convexe g de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, sa conjuguée est la fonction convexe et *s.c.i* g^* définie par $g^*\,(u) = \sup\,[xu - g\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n]$ et g^* est propre *ssi* g l'est auquel cas $g^*\,(u) = \sup\,[x\,u - g\,(x) \ : \ x \in \operatorname{dom} g]$. Si h est une fonction concave de $\mathbb{R}^n$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, autrement dit si $-h$ est convexe, son domaine effectif est $\operatorname{dom} h = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ h(x) > -\infty\}$. h est propre *ssi* $-h$ l'est et sa conjuguée est la fonction concave et semi-continue supérieurement $(s.c.s.)$ h^* définie par $h^*\,(u) = \inf\,[xu - h\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n]$.

h^* est propre *ssi* h l'est auquel cas $h^*\,(u) = \inf\,[xu - h\,(x) \ : \ x \in \operatorname{dom} h]$. On a $\operatorname{dom}\,(h - g) = \operatorname{dom} h \cap \operatorname{dom} g$ (resp. $\operatorname{dom}\,(g - h) = \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h$) et $\sup\,[h\,(x) - g\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n] = \sup\,[h\,(x) - g\,(x) \ : \ x \in \operatorname{dom} h \cap \operatorname{dom} g]$ (resp. $\inf\,[g\,(x) - h(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n] = \inf\,[g\,(x) - h\,(x) \ : \ x \in \operatorname{dom} g \cap \operatorname{dom} h]$). Avec ces rappels, il vient du théorème de dualité de Fenchel (théorème 31.1 dans [16]) que pour tout $a \in C^*$, on a $\inf\,[af\,(x) + I_X\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n] = \sup\,[-(af)^*\,(u) + (-I_X)^*\,(u) \ : \ u \in \mathbb{R}^n]$ si bien que $G_1^* = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\ ay \leqq \sup\,[-(af)^*\,(u) + (-I_X)^*\,(u) \ : \ u \in \mathbb{R}^n]\}$. □

La remarque ci-après servira à la preuve du corollaire qui suit, corollaire qui engendrera un dual qui interviendra plus bas.

22. *Remarque* : On se rappelle que $E = f\,(X)$ et $F = E + C$. F étant convexe, supposons le fermé, le cas dans l'hypothèse du théorème 6. De la première partie des remarques 7, on sait que C-min E = C-min F. De la seconde partie des mêmes remarques 7, on sait que F est l'intersection des demi-espaces $\{y \in \mathbb{R}^k \ : \ a\,y \geqq c\,(a)\}$ supportant F, où $a \in C^*$ et $c\,(a) = \min\,[a\,z \ : \ z \in E]$. On déduit que tout point de C-min E est un point de support de F par un hyperplan de normal $a \in C^*$.

Supposons en plus C-min $E \neq \phi$ et qu'il y ait au moins un élément y^0 de C-min E qui soit proprement optimal. Alors, s'inspirant de la seconde partie de la preuve du théorème 20, on établit facilement que toutes les hypothèses du lemme 17 sont satisfaites, ce qui permet de montrer comme dans la troisième partie de la preuve du lemme en question que, s'agissant des hyperplans supportant F aux différents points de C-min E, on peut prendre chaque normal $a \in \operatorname{int} C^*$. □

23. Corollaire : *Soit* $G_3^* = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists a \in \operatorname{int} C^*, ay = \inf[az : z \in E]\}$. *On a alors* $G_3^* \subset G_1^*$. *Supposons* F *fermé (le cas dans l'hypothèse du théorème 6),* C-min E *non vide à éléments proprement optimaux.*

Alors C-min $E \subset C$-max G_3^* *et si en plus* $\mathbb{R}_+^k \subset C$, *on a* C-min $E = C$-max G_3^*. □

Preuve : On a de toute évidence $G_3^* \subset G_1^*$. Supposons F fermé. Soit $y \in C$-min E. Il vient de la remarque 22 ci-dessus qu'il existe $a \in \operatorname{int} C^*$ tel que $a\,y = \min\,[a\,z \ : \ z \in E]$, dont $y \in G_3^*$. Du théorème 20, on a C-min $E = C$-min G_1^* donc $y \in C$-max G_1^*. Comme $G_3^* \subset G_1^*$, on conclut que $y \in C$-max G_3^* et par suite C-min $E \subset C$-max G_3^*.

Se rappelant que $e \in \mathbb{R}^k$ est l'élément de int $\mathbb{R}_+^k$ aux composantes identiques à l'unité, si $\mathbb{R}_+^k \subset C$, on a $e \in \operatorname{int} C$. A présent, soit $y \in C$-max G_3^*. Comme $G_3^* \subset G_1^*$, si $y \notin C$-max G_1^*, il existerait $y' \in G_1^*$ tel que $y \leq y'$, autrement dit, il existerait $b \in \operatorname{int} C^*$ tel que $by' \leqq \inf\,[bz \ : \ z \in E]$ et $y \leq y'$. Si l'inégalité $\leqq$ était une égalité, on aurait $y' \in G_3^*$ et $y \leq y'$ contredisant $y \in C$-max G_3^*, donc $by' < \inf[bz : z \in E]$. Supposons que $\mathbb{R}_+^k \subset C$. Alors $e \in \operatorname{int} C$ donc $be > o$ et avec $d = \{\inf[bz : z \in E] - by'\}/be$, on a $de \in \operatorname{int} C$ et $w = y' + de \in G_3^*$ car $bw = by' + dbe = by' + \inf[bz : z \in E] - by' = \inf[bz : z \in E]$. De plus, on a $y \leq y' < w$, contredisant $y \in C$-max G_3^*. Il s'en suit que si $\mathbb{R}_+^k \subset C$, alors $y \in C$-max $G_1^* = C$-min E et par suite C-max $G_3^* \subset C$-min E. □

24. *Remarque* : Le corollaire ci-dessus suggère une autre formulation de dual de (P) qui s'avèrera convenable pour le cas particulier linéaire que nous verrons. Il s'agit de :

$$(D_2) : \quad \text{trouver } C\text{-max } G_3^*.$$

Ici aussi, comme $G_3^* \subset G_1^* \subset E^*$, la dualité faible tient. De plus, dans l'esprit de la remarque 21, on peut écrire :

$$\begin{aligned} G_3^* &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, a \in \operatorname{int} C^*,\ ay = \inf\,[af\,(x) + I_X\,(x) \ : \ x \in \mathbb{R}^n]\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, a \in \operatorname{int} C^*, \\ &\qquad ay = \sup\,[-(af)^*\,(u) + (-I_X)^*\,(u) \ : \ u \in \mathbb{R}^n]\}. \end{aligned}$$

Enfin, dans l'ensemble des hypothèses du corollaire 23, comme C-max $G_3^* = C$-min $E = C$-max E^*, l'analogue de la proposition 13 tient. □

4. UN CAS SPÉCIAL D'ENSEMBLE X

Dans ce paragraphe, $X = \{x \in Y \ : \ g(x) \in -K\}$ où Y est une partie convexe et fermée de $\mathbb{R}^n$, K est un cône convexe, fermé, saillant et pointé dans $\mathbb{R}^m$ et $g = (g_1, \ldots, g_m)$ est une fonction vectorielle K-convexe et K-$s.c.i$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Montrons que X est convexe. Pour cela, soit x et $y \in X$ et $\alpha \in [o, 1]$. Comme Y est convexe, $\alpha x + (1 - \alpha) y \in Y$. K étant convexe et g K-convexe, il existe k_1 et $k_2 \in K$ tels que $-k_1 = \alpha g(x) + (1 - \alpha) g(y) = g(\alpha x + (1 - \alpha) y) + k_2$.

On a donc $g(\alpha x + (1 - \alpha) y) \in -K$ et par suite X est convexe.

Montrons que X est fermé. Soit une suit (x^i) dans X convergeant vers x^0. Y fermé, on a $x^0 \in Y$. Pour tout voisinage U_1 de x^0, en prenant i grand, on a $x^i \in U_1$. g étant K-$s.c.i$, pour tout voisinage V de $g(x^0)$, il existe un voisinage U_2 de x^0 tel que $g(x) \in V + K$ pour tout $x \in U_2 \cap Y$. Il s'en suit que pour i grand $g(x^i) \in V + K$ et il existe $y^i \in V$ et $k^i \in K$ tels que $g(x^i) = y^i + k^i \in -K$ donc $y^i \in -K$. K étant fermé et $\lim y^i = g(x^o)$, on a $g(x^0) \in -K$, donc $x^0 \in X$ et X est fermé.

On suppose pour la suite de ce paragraphe que X est non vide et est soit polyhédrique ou à intérieur relatif non vide. C demeure un cône convexe, fermé, saillant et pointé dans $\mathbb{R}^k$ et $f = (f_1, \ldots, f_k)$ une fonction vectorielle C-convexe et C-$s.c.i.$ sur X. On suppose f prolongée à Y tout entier en posant $f_i(x) = +\infty$ pour tout $x \in Y \backslash X$ et tout $i = 1, \ldots, k$.

On dit que X (ou g) satisfait la condition de Slater s'il existe $x \in Y$ tel que $g(x) \in -\text{int}\, K$. La preuve du lemme suivant s'inspire de celle du théorème 28.2 dans [16].

25. LEMME : *Soit* $a \in \text{int}\, C^*$. *On suppose que* X *satisfait la condition de Slater.*

Si $\inf [af(x) \ : \ x \in X] > -\infty$, *alors il existe* $u \in K^*$ *tel que* $\inf [af(x) + ug(x) \ : \ x \in Y] = \inf [af(x) \ : \ x \in X]$. *Pour* $x^0 \in X$ *donné, on a* $af(x^0) = \inf [af(x) \ : \ x \in X]$ *ssi* $\exists\, u \in K^*$ *tel que* $\inf [af(x) + ug(x) \ : \ x \in Y] = af(x^0)$ *auquel cas* $ug(x^0) = o$. □

Preuve : Soit $\alpha = \inf [af(x) \ : \ x \in X]$. Alors $af(x) - \alpha \not< o$, $g(x) \nleqq_K o$ pour tout $x \in X$. Il vient alors du corollaire 11 qu'il existe $(r, u) \in \mathbb{R}_+ \times K^* \backslash \{(o, o)\}$ tel que $raf(x) + ug(x) \geqq r\alpha$ pour tout $x \in X$. Si $r = o$, alors $u \in K^* \backslash \{o\}$ et donc $ug(x) \geqq o$ pour tout $x \in X$, ce qui contredirait la satisfaction de la condition de Slater selon le corollaire 9. On a donc $r > o$ et on peut supposer $r = 1$ de façon à avoir $af(x) + ug(x) \geqq \alpha$ pour tout $x \in X$. Comme $af(x) = +\infty$ pour tout $x \in Y \backslash X$, on déduit que

$$\inf [af(x) + ug(x) : x \in Y] = \inf [af(x) + ug(x) : x \in X] \geqq \alpha.$$

Comme $u \in K^*$ et $g(x) \in -K$ pour tout $x \in X$, on a $ug(x) \leqq o$ pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned} \alpha &= \inf [af(x) : x \in X] \\ &\geqq \inf [af(x) + ug(x) : x \in X] \\ &= \inf [af(x) + ug(x) : x \in Y] \geqq \alpha. \end{aligned}$$

On a donc une égalité partout. Dans le cas particulier où $af(x^0) = \inf [af(x) : x \in X]$, on a à la fois $ug(x^0) \geqq o$ et $ug(x^0) \leqq o$, donc $ug(x^0) = o$. Supposons à présent qu'il existe $u \in K^*$ tel que $\inf [af(x) + ug(x) : x \in Y] = af(x^0)$. Comme pour tout $x \in X$ on a $ug(x) \leqq o$ et que $X \subset Y$, alors

$$\begin{aligned} a\,f(x^0) &= \inf [af(x) + ug(x) : x \in Y] \\ &\leqq \inf [af(x) + ug(x) : x \in X] \\ &\leqq \inf [af(x) : x \in X] \\ &\leqq af(x^0), \end{aligned}$$

une égalité partout. □

26. *Remarques* : 1. Avec $X = \{x \in Y : g(x) \in -K,\ h(x) = o\}$ où pour $i = 1, \ldots, l$ chaque composante h_i de h est affine, le lemme 25 s'étend à ce cas.

2. Pour tout $a \in C^* \backslash \{o\}$ et tout $u \in K^*$, il existe une $k \times m$-matrice réelle U telle que $a\,U = u$. En effet comme il existe $b \in C$ tel que $ab = 1$, en prenant $U = (u_1\,b, \ldots, u_m\,b)$, où $u = (u_1, \ldots, u_m)$, on a bien $a\,U = ab\,u = u$ et de plus, pour $v \in K$, $Uv = u\,v\,b$ donc $Uv \in C$.

Par conséquent, comme dans [14], nous notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des $k \times m$-matrices réelles U telle que pour tout $v \in K$, on ait $Uv \in C$ soit $UK \subset C$. Nous venons de voir que pour tout $a \in C^* \backslash \{o\}$ et tout $u \in K^*$, il existe $U \in \mathcal{U}$ telle que $aU = u$. Dans le cas particulier où $\mathbb{R}_+^k \subset C$ donc $\mathbb{R}_+^k \subset C^*$, en supposant a normalisé (*i.e.* $a\,e = a_1 + \ldots + a_k = 1$) et en prenant $U = (u_1\,e, \ldots, u_m\,e)$, pour tout $v \in K$, on aurait $Uv = (uv, \ldots, uv)$. □

27. THÉORÈME : 1. *Se référant à Jahn dans* [8], *posons :*

$$H_J^* = \{y \in \mathbb{R}^k : \exists a \in \mathrm{int}C^*, u \in K^*, ay \leqq af(x)+ug(x) \text{ pour tout } x \in Y\}.$$

*Si X satisfait la condition de Slater, alors $G_1^* = H_J^*$ donc le dual (D_1) de la remarque 21 équivaut, dans le contexte actuel, à celui de Jahn, soit (D_J) : trouver C-*max *H_J^*.*

2. *Se référant à Nakayama dans* [16], *posons :*

$$H_N^* = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, U \in \mathcal{U},\ f(x) + Ug(x) \nleq_C y \text{ pour tout } x \in Y\}.$$

*Si X satisfait la condition de Slater, alors $G_1^* \subset H_N^* \subset E^*$. Si en plus F est fermé (le cas dans l'hypothèse du théorème 6) et C-*min *E non vide à éléments proprement optimaux, alors*

$$C\text{-min}\, E = C\text{-max}\, G_1^* = C\text{-max}\, H_J^* = C\text{-max}\, H_N^* = C\text{-max}\, E^*$$

*auquel cas les duaux (D), (D_1) et (D_J) se confondent tous au dual de Nakayama, à savoir (D_N) : trouver C-*max*H_N^*. Si plus loin encore $\mathbb{R}_+^k \subset C$, alors tous ces duaux sont identiques à (D_2).* □

Preuve : 1. G_1^* étant défini comme au paragraphe précédent (après la remarque 16), soit $y \in G_1^*$. Alors il existe $a \in \mathrm{int}\, C^*$ tel que $ay \leqq \inf\,[az\ :\ z \in E]$ soit $ay \leqq \inf\,[af\,(x)\ :\ x \in X]$. Il vient du lemme 25 qu'il existe $u \in K^*$ tel que $\inf\,[af\,(x)\ :\ x \in X] = \inf\,[af\,(x) + ug\,(x)\ :\ x \in Y]$. Ainsi donc, il existe $a \in \mathrm{int}C^*$ et $u \in K^*$ tels que $ay \leqq \inf[af(x)+ug(x) : x \in Y]$ donc $ay \leqq af\,(x) + ug\,(x)$ pour tout $x \in Y$. On conclut que $y \in H_J^*$.

Réciproquement, supposons que $y \in H_J^*$. Alors il existe $a \in \mathrm{int}\, C^*$ et $u \in K^*$ tels que $ay \leqq af\,(x) + ug\,(x)$ pour tout $x \in Y$ donc $ay \leqq af\,(x) + ug\,(x)$ pour tout $x \in X$. Comme $ug\,(x) \leqq o$ pour tout $x \in X$, on a $ay \leqq af\,(x)$ pour tout $x \in X$ donc $ay \leqq \inf\,[af\,(x)\ :\ x \in X]$ et par suite $y \in G_1^*$. On conclut $G_1^* = H_J^*$ d'où la première partie du théorème.

2. Supposons que X satisfait la condition de Slater et soit $y \in G_1^*$.

Alors $y \in H_J^*$, donc il existe $a \in \mathrm{int}\, C^*$ et $u \in K^*$ tels que $ay \leqq af\,(x) + ug\,(x)$ pour tout $x \in Y$. Comme il existe $U \in \mathcal{U}$ avec $aU = u$, on a $ay \leqq af\,(x) + a\,Ug\,(x)$ pour tout $x \in Y$. Les ensembles $y - C\backslash\{o\}$ et $\{f\,(x) + Ug\,(x)\ :\ x \in Y\}$ étant strictement séparés par l'hyperplan $\{z \in \mathbb{R}^k\ :\ az = ay\}$, on $f\,(x) + Ug\,(x) \nleq_C y$ pour tout $x \in Y$

et par suite $G_1^* \subset H_N^*$. Pour montrer que $H_N^* \subset E^*$, soit $y \in H_N^*$. Alors il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) + Ug(x) \nleq_C y$ pour tout $x \in Y$ donc pour tout $x \in X$. Comme pour tout $x \in X$, $g(x) \in -K$, on a $Ug(x) \leqq_C o$, usant des remarques 1, on conclut que $f(x) \nleq_C y$ pour tout $x \in X$, donc $y \in E^*$ et par suite $H_N^* \subset E^*$.

Supposons à présent F fermé, C-min $E \neq \phi$ à éléments proprement optimaux. De la remarque 16 et du théorème 20, on a C-max $E^* = C$-min $E = C$-max G_1^*. D'autre part, les hypothèses sur C-min E font que toutes les hypothèses du lemme 17 sont satisfaites. On en déduit que $F^c \subset G_1^* \subset H_N^* \subset E^* \subset \operatorname{adh} F^c$ et comme à la seconde partie de la preuve du théorème 20, on montre que C-max $H_N^* \subset C$-min E. Enfin soit $y \in C$-min E donc $y \in G_1^*$ et nous venons de voir que $y \in H_N^*$. Si $y \notin C$-max H_N^*, alors il existe $z \in H_N^*$, tel que $y \leq_C z$ donc il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $f(x) + Ug(x) \nleq_C z$ pour tout $x \in Y$ donc pour tout $x \in X$. Comme $Ug(x) \leqq_C o$ pour tout $x \in X$, on a $f(x) \nleq_C z$ pour tout $x \in X$ donc $z \in E^*$, $y \leq_C z$ et $y \in C$-min $E = C$-max E^*. Cette contradiction nous permet de conclure que C-min $E = C$-max H_N^*. Le reste du théorème découle de la remarque 24. □

28. *Remarque* : Supposons C-min E non vide à éléments proprement optimaux et que X satisfait la condition de Slater. Alors pour un $x^0 \in X$, on a $y^0 = f(x^0) \in C$-min$E$ *ssi* $\exists a \in \operatorname{int} C^*$ tel que $ay^0 = \inf[af(x) : x \in X]$. Du lemme 25, on a $ay^0 = \inf[af(x) : x \in X]$ *ssi* $\exists\, u^0 \in K^*$ tel que $ay^0 = \inf[af(x) + u^0 g(x) : x \in Y]$ auquel cas $u^0 g(x^0) = o$ ce qui implique $ay^0 + u^0 g(x^0) \leqq af(x) + u^0 g(x)$ pour tout $x \in Y$. Comme il existe $U^0 \in \mathcal{U}$ tel que $a\, U^0 = u^0$, donc $a\, [y^0 + U^0 g(x^0)] \leqq a\, [f(x) + U^0 g(x)]$ pour tout $x \in Y$ et qu'en plus $a\, U^0\, g(x^0) = o$, $g(x^0) \in -K$ et $a \in \operatorname{int} C^*$ font que $U^0\, g(x^0) = o$, alors usant d'une technique déjà utilisée dans la seconde partie de la preuve ci-dessus, on conclut l'existence de ce $U^0 \in \mathcal{U}$ tel que $y^0 + U^0 g(x^0) \nleq_C f(x) + U^0\, g(x)$ pour tout $x \in Y$ et $U^0\, g(x^0) = o$. Se référant à Tanino et Sawaragi dans [17], en posant

$$H_{TS}^* = \{y \in \mathbb{R}^k \ : \ \exists\, U \in \mathcal{U},\, y \in C\text{-min}\,[f(x) + Ug(x) \ : \ x \in Y] \subset H_N^*,$$

nous venons de montrer que $y^0 \in H_{TS}^*$. Supposons que $y^0 \notin C$-max H_{TS}^*. Alors il existe $U \in \mathcal{U}$ et $y \in C$-min $[f(x) + Ug(x) \ : \ x \in Y]$ tels que $y^0 \leq_C y$. Comme $g(x^0) \in -K$, on a $Ug(x^0) \leqq_C o$, donc $y^0 + Ug(x^0) \leqq_C y$, ce qui contredit $y \in C$-min $[f(x) + Ug(x) \ : \ x \in Y]$. On conclut que $y^0 \in C$-max H_{TS}^*.

Ces observations motivent la formulation d'un dual dû à Tanino et Sawaragi à savoir :

$$(D_{TS}) : \quad \text{trouver } C\text{-max } H^*_{TS}.$$

Il est facile de voir que même en l'absence des hypothèses supplémentaires du début de ces remarques, la dualité faible ainsi que l'analogue de la proposition 13 tient pour ce dual. Cependant, même en présence de ces hypothèses on n'a que C-min $E \subset C$-max H^*_{TS} comme nous venons de montrer.

Au vu des lignes de ces remarques, l'on se rend également compte qu'il est possible de considérer la fonction lagrangienne L définie sur $Y \times \mathcal{U}$ par $L(x, U) = f(x) + Ug(x)$, un point de selle étant (x^0, U^0) tel que

$$L(x^0, u^0) \in C\text{-min}\,[L(x, U^0) \,:\, x \in Y] \cap C\text{-max}\,[L(x^0, U) \,:\, U \in \mathcal{U}].$$

Le lien entre les points de selle et les points optimaux pour (P) et de façon générale l'approche par des fonctions lagrangiennes se trouvent détaillés dans [12] par exemple. □

5. LE CAS LINÉAIRE

Il s'agit d'une situation particulière de données du paragraphe précédent. On prend pour C le cône convexe fermé, saillant et pointé $\mathbb{R}^k_+$ dans $\mathbb{R}^k$ et pour K, $\mathbb{R}^m_+$ dans $\mathbb{R}^m$. Les ordres $\leqq_C$ (resp. $\leqq_K$), $\leq_C$ (resp. $\leq_K$) et $<_C$ (resp. $<_K$) seront simplement notés $\leqq$, $\leq$ et $<$, le contexte nous permettrait de savoir si c'est en rapport avec C ou K. On prend pour Y l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x \geqq o\}$. $g(x) = Ax - b$ où A est une *mxn*-matrice réelle et b est un m-vecteur constant de $\mathbb{R}^m$. Ainsi donc, on a l'ensemble $X = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \leqq b,\, x \geqq o\}$ que nous supposons non vide. On prend f telle que $f(x) = Mx$ où M est une $k \times n$-matrice réelle de rang k. Pour toute partie S de $\mathbb{R}^k$, les ensembles C-min S et C-max S seront simplement notés min S et max S respectivement.

Notons que dans l'actuel cas de figure $C^* = C = \mathbb{R}^k_+$, $K^* = K = \mathbb{R}^m_+$, int $C^* = \{a \in \mathbb{R}^k \,:\, a > o\}$.

S'il existe $a^0 \in \mathbb{R}^k$, $a^0 > o$ tel que x^0 soit une solution optimale au problème scalaire linéaire

$$(PL(a^0)) \,:\, \inf\,[a^0 Mx \,:\, x \in X],$$

alors x^0 est par définition 18 une solution proprement optimale au problème primal (P) et selon la première partie des remarques 19, x^0 est *a priori* optimal à (P).

Soit $x^0 \in X$. Dans [4], on considère le problème scalaire linéaire

$$(PL'(x^0)) \ : \ \sup\,[\text{et} \ : \ Mx + t = Mx^0, \ x \in X, \ t \in \mathbb{R}^k, \ t \geqq o]$$

et comme ce problème possède toujours un programme, en l'occurence $x = x^0$ et $t = 0$, on montre que :

a) x^0 est optimal (P) *ssi* $(PL'(x^0))$ possède une valeur optimale nulle.

Dans ce cas d'ailleurs, toute solution optimale à $(PL'(x^0))$ étant de la forme $(y, o))$ avec $y \in X$ et $o \in \mathbb{R}^k$, ces y sont des solutions optimales de (P) car pouvant jouer le même rôle que x^0 dans $(PL'(x^0))$.

b) Si la valeur optimale de $(PL'(x^0))$ est finie mais non nulle, alors pour toute solution optimale (y, t), y est une solution optimale de (P).

c) Si $(PL'(x^0))$ a une valeur optimale infinie alors (P) n'a aucune solution optimale, autrement dit $\min E = \phi$.

Regardons les problèmes duaux de $(PL(a^0))$ et $(PL'(x^0))$ qui sont respectivement :

$$(DL(a^0) \ : \ \sup\,[-ub \ : \ a^0 M + uA \geqq o, \ u \in \mathbb{R}^m, \ u \geqq o],$$

$$(DL'(x^0)) : \inf[aMx^0 + ub : aM + uA \geqq o, a \in \mathbb{R}^k, u \in \mathbb{R}^m, a \geqq e, u \geqq o].$$

On se rend compte que si x^0 est optimal pour (P) donc si $(PL'(x^0))$ possède une valeur optimale nulle, alors $(DL'(x^0))$ possède une valeur optimale nulle que nous supposons atteinte pour $a = a^0$ et $u = u^0$, donc $a^0 Mx^0 = -bu^0$. Avec ce a^0, u^0 serait forcément optimal pour $(DL(a^0))$ et par suite x^0 serait optimal pour $(PL(x^0))$. x^0 serait donc proprement optimal pour (P).

On conclut que toute solution optimale de (P) est proprement optimale dans ce cas linéaire. D'autre part, il découle des observations ci-dessus que l'ensemble des solutions optimales de (P) est non vide si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}^k$ et $u \in \mathbb{R}^m$ tels que $aM + uA \geqq o$, $u \geqq o$ et $a > o$ (ou de façon équivalente $a \geqq e$). En effet, sinon, ce serait dire que pour tout $x^0 \in X$, $(DL'(x^0))$ ne possède aucun programme, ce qui signiferait que $(PL'(x^0))$ n'aurait pas de valeur optimale finie.

D'après le théorème des alternatives de Tucker [13] il existe $a \in \operatorname{int} \mathbb{R}^k_+$ et $u \in \mathbb{R}^m_+$ tels que $aM + uA \geqq o$ *ssi* le système $Ax \leqq o$, $Mx \leq o$, $x \geqq o$ n'a aucune solution $x \in \mathbb{R}^n$. Notant que de la seconde partie des remarques 26, pour tout $a \in \operatorname{int} \mathbb{R}^k_+$ tel que $a\, e = 1$ et tout $u \in \mathbb{R}^m_+$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $u = a\, U$ et qu'inversement pour tout tel a et $U \in \mathcal{U}$, $u = a\, U \in \mathbb{R}^m_+$ car pour tout $x \in \mathbb{R}^m_+$, $Ux \in \mathbb{R}^k_+$ donc $a\, Ux \geqq o$, le système en question n'a pas de solution $ssi \; \exists\, a \in \operatorname{int} \mathbb{R}^k_+$ et $U \in \mathcal{U}$ tels que $a\,(M + UA) \geqq o$, c'est-à-dire qu'il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que le système $(M + UA)\, x \geq o$, $x \geqq o$ n'ait aucune solution $x \in \mathbb{R}^k$. Les matrices U dans $\mathcal{U}$ sont dites positives car $Ux \geqq o$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^m_+$. Maintenant X est un polyhèdre convexe. Par conséquent son image $E = MX$ par a la transformation linéaire M de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^k$ est un polyhèdre convexe (donc fermé) dans $\mathbb{R}^k$ (théorème 19.3 dans [16]). Comme $C = \mathbb{R}^k_+$ est également un polyhèdre convexe dans $\mathbb{R}^k$, alors $F = E + C$ est un polyhèdre convexe dans $\mathbb{R}^k$ (corollaire 19.3.1 dans [16]). Ainsi l'hypothèse de fermeture de F tant utilisée dans les paragraphes précédents est satisfaite dans le présent cas linéaire. Revenant aux problèmes linéaires duaux $(PL(a^0))$ et $(DL(a^0))$, si x est un programme du premier et u du second, comme $a^0\, M \geqq -u\, A$, $A\, x \leqq b$, $x \geqq o$ et $u \geqq o$, on a $a^0\, M\, x \geqq -u\, A\, x \geqq -ub$ soit $a^0\, M\, x \geqq -ub$. C'est la dualité faible bien connue. D'autre part comme $X \neq \phi$ par hypothèse, $\inf\,[a^0\, M x \, : \, x \in X] > -\infty \; ssi \; \exists\, x^0$ optimal à $(PL\,(a^0)) \; ssi \; \exists\, u^0$ optimal à $(DL\,(a^0))$ auquel cas $a^0\, Mx^0 = -u^0\, A\, x^0 = -u^0\, b$, $u^0\,(Ax^0 - b) = o$ et $(a^0 M + u^0 A) x^0 = o$. Ces deux dernières équations dites de complémentarité d'ailleurs suffisent pour garantir l'optimalité des programmes x^0 et u^0 aux deux problèmes duaux car cette optimalité signifierait alors simplement que $a^0\, M\, x^0 = -u^0\, b$. Notant que $a^0\, M\, x + u\,(Ax - b) = -ub + (a^0\, M + uA)\, x$, on conclut que pour x^0 et u^0 optimaux on a pour tout $x \geqq o$,

$$a^0\, M\, x + u^0\,(Ax - b) = -u^0\, b + (a^0\, M + u^0\, A)\, x \geqq -u^0\, b = a^0\, M\, x^0,$$

donc

$$\begin{aligned} a^0\, M\, x^0 &= \min\,[a^0\, M\, x \, : \, x \in X] \\ &= \min\,[a^0\, M\, x + u^0\,(Ax - b) \, : \, x \geqq o] \\ &= a^0\, M\, x^0 + u^0\,(A\, x^0 - b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{u^0\,(Ax^0 - b) = o} \end{aligned}$$

D'autre part si pour $x^0 \in X$ et $u^0 \geqq o$, on a

$$a^0\, M\, x^0 = \inf\,[a^0\, M\, x + u^0\,(Ax - b) \, : \, x \geqq o],$$

procédant comme au dernier paragraphe de la preuve du lemme 25, on conclut que $a^0\, M\, x^0 = \min\,[a^0\, M\, x \, : \, x \in X]$.

Il découle donc des lignes ci-dessus que le lemme 25 tient intégralement dans ce cas linéaire en l'absence de tout hypothèse de satisfaction de la condition de Slater par X. On déduit que dans ce cas linéaire en main, les conclusions de la première partie du théorème 27 tiennent sans la condition de Slater tandis que celles de la seconde n'exigent que l'unique hypothèse de non vacuité de $\min E$. Même cette dernière s'avèrera inutile comme nous le verrons.

Dans le présent cas, l'ensemble G_3^* de la remarque 24 devient :

$$G_3^* = \{y \in \mathbb{R}^k \; : \; \exists\, a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k,\; ay = \sup\,[-ub \; : \; aM + uA \geqq o,\; u \in \mathbb{R}_+^m]\}.$$

Posons :

$$G_4^* = \{y \in \mathbb{R}^k \; : \; \exists\, a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k,\; u \in \mathbb{R}_+^m,\; ay = -ub\,,\; aM + uA \geqq o\}.$$

On a alors :

29. Lemme : $G_3^* \subset G_4^*$ *et* $\max G_3^* = \max G_4^*$. $\square$

Preuve : Pour tout $y \in G_3^*$, le sup étant pris pour cause de la linéarité, on déduit que $G_3^* \subset G_4^*$ et donc $\max G_3^* \subset G_4^*$. Soit alors $y^0 \in \max G_4^*$. Il existe $a^0 \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k$, $u^0 \in \mathbb{R}_+^m$ tels que $a^0\, y^0 = -u^0\, b$ et $a^0\, M + u^0\, A \geqq o$. Comme $X \neq \phi$, il existe u^1 optimal à $(DL\,(a^0))$ et comme u^0 est un programme pour $(DL\,(a^0))$, on a $-u^1\, b \geqq -u^0\, b$. Si cette dernière inégalité est stricte, posons $y^1 = y^0 + e\,[(u^0\, b - u^1\, b)/a^0\, e]$. On aurait alors $y^1 > y^0$, $a^0\, y^1 = a^0\, y^0 + u^0\, b - u^1\, b = -u^1\, b$, $a^0\, M + u^1\, A \geqq o$ et $u^1 \in \mathbb{R}_+^m$. Il s'en suivrait que $y^1 \in G_4^*$ et $y^1 > y^0$ contredisant $y^0 \in \max G_4^*$. On ne peut donc avoir que $a^0\, y^0 = -u^0\, b = -u^1\, b = \sup\,[-ub \; : \; a^0\, M + uA \geqq o,\; u \in \mathbb{R}_+^m]$, donc $y^0 \in G_3^*$. On déduit que $\max G_4^* \subset G_3^*$. Comme $G_3^* \subset G_4^*$, on a $\max G_4^* \subset \max G_3^* \subset G_4^*$. Enfin, soit $y^0 \in \max G_3^* \subset G_4^*$. Si $y^0 \notin \max G_4^*$, il existe $y^1 \in G_4^*$ tel que $y^1 \geq y^0$. Il existe donc $a^1 \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k$ et $u^1 \in \mathbb{R}_+^m$ tels que $a^1\, y^1 = -u^1\, b$ et $a^1\, M + u^1\, A \geqq o$. u^1 est donc un programme pour $(DL\,(a^1))$ qui possède une solution optimale u^2 telle que $-u^2\, b \geqq -u^1\, b$. Prenons $y^2 = y^1 + e\,[(u^1\, b - u^2\, b)/a^1\, e]$. Alors $a^1\, y^2 = -u^2\, b = \sup\,[-ub \; : \; a^1\, M + u\, A \geqq o,\; u \in \mathbb{R}_+^m]$, donc $y^2 \in G_3^*$ et $y^2 \geqq y^1 \geq y^0$ contredisant $y^0 \in \max G_3^*$. On conclut que $y^0 \in \max G_4^*$ et donc $\max G_3^* = \max G_4^*$. $\square$

30. Lemme : $G_4^* = \{y \in \mathbb{R}^k \; : \; \exists U \in \mathcal{U},\; z\,(y + Ub) - (M + UA)\, v \not\geq o \;\forall\, z \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}_+^n\}$. $\square$

Preuve : Soit $a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k$ tel que $ae = 1$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}_+^m$, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $a\,U = u$ et inversement pour tout $U \in \mathcal{U}$, en posant $u = a\,U$, on a $u \in \mathbb{R}_+^m$ (seconde partie des remarques 26). Il s'en suit que $G_4^* = \{y \in \mathbb{R}^k \,:\, \exists\, a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k,\, U \in \mathcal{U},\, a\,(y + Ub) = o,\, a\,(M + UA) \geqq o\}$. Selon le théorème des alternatives de Tucker [13], pour $y \in \mathbb{R}^k$ et $U \in \mathcal{U}$ donnés, il existe $a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k$ tel que $a\,(y + Ub) = o$, $a\,(M + UA) \geqq o$ *ssi* $z\,(y + Ub) - (M + UA)\,v \ngeq o$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout $v \in \mathbb{R}_+^n$ et le lemme découle. □

Même la condition de Slater est inutile ici pour la dualité forte. En effet, on a :

31. THÉORÈME : 1. *On a la formulation équivalente ci-après du dual* (D_2) *de la remarque 24 :*

$$(D_3)\ :\quad \textit{trouver}\ \max G_4^*.$$

2. *Rappelant que* $E = MX = \{Mx \,:\, x \in X\}$, *on a :*

a) $\min E = \max G_4^*$ (*dualité forte*);

b) *Si* $y \in E$ *et* $y' \in G_4^*$, *alors* $y \nleq y'$ (*dualité faible*);

c) *Si* $y \in E \cap G_4^*$, *alors* $y \in \min E = \max G_4^*$. □

Preuve : 1. Cette première partie découle du lemme 29.

2. *a*) Soit $y^0 \in \max G_4^*$. Alors il existe $a^0 \in \mathbb{R}^k$, $u^0 \in \mathbb{R}^m$ tels que $a^0 \geqq e$, $u^0 \geqq o$, $a^0\,M + u^0\,A \geqq o$ et $a^0\,y^0 = -u^0\,b$ donc a^0 et u^0 constituent un programme pour $(P_l^*\,(y^0))$: $\inf\,[ay^0 + ub \,:\, aM + uA \geqq o,\, a \in \mathbb{R}^k,\, u \in \mathbb{R}^m,\, a \geqq e,\, u \geqq o]$ de valeur critère nulle. Supposons que $\overline{a}$ et $\overline{u}$ constituent un autre programme pour $(P_l^*\,(y^0))$ avec $\overline{a}y^0 + \overline{u}b < o$ et prenons $y^1 = y^0 - e\,[(\overline{a}\,y^0 + \overline{u}\,b)/\overline{a}\,e]$.

Alors $\overline{a}y^1 = \overline{a}y^0 - \overline{a}y^0 - \overline{u}b = -\overline{u}b$, $\overline{a}M + \overline{u}A \geqq o$, $\overline{a} \in \mathbb{R}^k$, $\overline{u} \in \mathbb{R}^m$, $\overline{a} \geqq e$, $\overline{u} \geqq o$ donc $y^1 \in G_4^*$ et $y^1 > y^0$, contredisant $y^0 \in \max G_4^*$. (a^0, u^0) est donc un programme optimal de $(P_l^*\,(y^0))$. Le problème linéaire dual $(P_l^*\,(y^0))$: $\sup\,[et \,:\, Mx + t = y^0,\, x \in X,\, t \in \mathbb{R}^k,\, t \geqq o]$ possède un programme optimal constitué de $t^0 = o$ et $x^0 \in X$ et donc $y^0 = Mx^0$. Il est alors aisé de voir, en considérant par exemple le problème linéaire $(PL'\,(x^0))$ des commentaires précédant le lemme 29, que $y^0 = Mx^0 \in \min E$. Réciproquement, soit $y^0 = Mx^0 \in \min E$ avec $x^0 \in X$. C'est le cas *ssi* $\exists\, a^0 \in \mathbb{R}^k$ avec $a^0 > o$ et tel que x^0 soit optimal à $(PL\,(a^0))$ des commentaires du début du paragraphe. Il existe donc u^0 optimal à $(DL\,(a^0))$, donc $a^0\,y^0 = -bu^0$ et on a $y^0 \in G_4^*$. Si $y^0 \notin \max G_4^*$, alors il existe $y^1 \in G_4^*$ avec $y^1 \geq y^0$, donc il existe $a^1 \in \mathbb{R}^k$,

$a^1 \geqq e$ et $u^1 \in \mathbb{R}^m$, $u^1 \geqq o$ tels que $-bu^1 = a^1\, y^1 > a^1\, y^0 = a^1\, M\, (x^0)$ donc $(DL'\,(x^0))$ des commentaires du début du paragraphe n'aurait pas une valeur critère optimale nulle. Il en serait de même de $(PL'\,(x^0))$, ce qui contredirait $y^0 = Mx^0 \in \min E$. On conclut que $y^0 \in \max G_4^*$.

b) Soit $y' \in G_4^*$. Alors du lemme 30, il existe $U \in \mathcal{U}$ tel que $y' + Ub - Mx - UAx \ngeq o$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geqq o$ et ce serait donc le cas pour tout $x \in X$. Comme pour tout $x \in X$, $A\,x \leqq b$ et que U est positive, on aurait $UAx \leqq Ub$ et donc $y' + Ub - Mx - Ub = y' - Mx \ngeq o$ pour tout $x \in X$ d'où le résultat. Notons que cette partie de la preuve fait ressortir que $G_4^* \subset E^*$ à partir de quoi on peut conclure 2.*b*) et *c*) de remarque 12 et proposition 13.

c) Soit $y \in E \cap G_4^*$. Alors il existe $x^0 \in X$, $a^0 \in \mathbb{R}^k$, $u^0 \in \mathbb{R}^m$ tels que $a^0 \geqq e$, $u^0 \geqq o$, $y = Mx^0$, $a^0 Mx^0 = a^0 y^0 = -u^0\, b$, $a^0 M + u^0 A \geqq o$. Ainsi x^0 est un programme pour $(PL\,(a^0))$, u^0 en est un pour le dual $(DL\,(a^0))$ et les valeurs critères correspondantes sont égales. Ces programmes sont donc optimaux et par suite $y \in \min E$. □

32. *Remarque* : Notant $\overline{\mathcal{U}}$ l'ensemble des matrices réelles $k \times m$, l'équivalent du dual du problème primal linéaire de maximisation vectorielle qu'a considéré en pionnier Isermann dans [7] serait dans le présent cas d'un primal de minimisation :

$$(D_I)\ :\quad \text{trouver}\max H_I^*,$$
$$H_I^* = \{-Ub\ :\ U \in \overline{\mathcal{U}},\ \exists\, a \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k,\ (aM + UA)\, v \ngeq o \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_+^n\}$$
$$= \{y \in \mathbb{R}^k\ :\ \exists\, a \operatorname{int} \mathbb{R}_+^k,\ U \in \overline{\mathcal{U}},\ (aM + UA)\, v \ngeq o \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_+^n\}.$$

En s'inspirant soit de la preuve de la proposition 6 dans [7] ou de celle du théorème 2.1 dans [15], on montre que $\max H_I^* \subset \min E$. C'est l'équivalent du résultat essentiel de dualité d'Isermann. Les conclusions du théorème 31 ci-dessus améliorent donc ce résultat. □

6. CONCLUSION

Après une brève introduction portant essentiellement sur les notations et quelques rappels sur les cônes, les cônes asymptotes et la convexité par rapport à un cône, les préliminaires ont porté sur la généralisation de certains résultats connus en optimisation scalaire convexe. Nous avons ensuite défini et étudié le dual d'un problème de minimisation vectorielle convexe et considéré des cas particuliers découlant de cette étude.

RÉFÉRENCES

1. G. R. BITRAN, Duality for Nonlinear Multiple Criteria Optimization Problems, *Journal of Optimization Theory and Applications (JOTA)*, *35*, 1981, p. 367-401.
2. S. BRUMELLE, Duality for Multiple Objective Convex Programs, *Mathematics of Operations Research*, *6*, 1981, p. 159-172.
3. H. N. CORLEY, Duality for Maximization with Respect to Cones, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *84*, 1981, p. 560-568.
4. J. G. ECKER and I. A. KOUADA, Finding Efficient Points for linear Multiple Objective Programs, *Mathematical Programming*, *8*, 1975, p. 375-377.
5. A. M. GEOFFRION, Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *22*, 1968, p. 618-630.
6. R. HARTLEY, On Cone Efficiency, Cone Convexity and Cone Compactness, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *34*, 1978, p. 211-222.
7. H. ISERMANN, On Some Relations Between a Dual Pair of Multiple Objective Programs, *Zeitschrift Für Operations Research*, *22*, 1978, p. 33-41.
8. J. JAHN, Duality In Vector Optimization, *Mathematical Programming*, *25*, 1983, p. 343-353.
9. I. A. KOUADA, Sur la propriété de domination et l'existence de points Pareto-efficaces en optimisation vectorielle convexe, À paraître dans *RAIRO-operations research*.
10. H. W. KUHN and A. W. TUCKER, *Nonlinear Programming* Proceeding of the second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press, Berkeley, California, 1950, p. 481-492.
11. D. T. LUC, About Duality and Alternative in Multiobjective Optimization, *JOTA*, *27*, 1979, p. 509-529.
12. D. T. LUC , On Duality Theory in Multiobjective Programming, *JOTA*, *43*, n° 4, août 1984.
13. O. L. MANGASARIAN, *Nonlinear Programming*, Mc Graw Hill Book Company, New York, 1969.
14. H. NAKAYAMA, Geometric Consideration in Vector optimization, *JOTA*, *44*, n° 4, décembre 1984, p. 625-655.
15. J. W. NIEUWENHUIS, About Isermann Duality, *JOTA*, *41*, n° 1, 1980.
16. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972.
17. T. TANINO and Y. SAWARAGI, Duality Theory in Multiobjective Programming, *JOTA*, *27*, 1979, p. 509-529.
18. P. L. YU, Cone Convexity, Cone Extreme Points, and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives, *JOTA*, *14*, n° 3, 1974.