RAIRO. Recherche opérationnelle

Abdelkader Elqortobi

Inf-convolution quasi-convexe des fonctionnelles positives

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 26, n° 4 (1992), p. 301-311

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_4_301_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 26, n° 4, 1992, p. 301 à 311)

α

INF-CONVOLUTION QUASI-CONVEXE DES FONCTIONNELLES POSITIVES (*)

par Abdelkader ELQORTOBI (1)

Communiqué par J.-P. CROUZEIX

Résumé. — *L'inf-convolution convexe joue un rôle prépondérant en analyse convexe. Elle est étroitement liée à la conjuguée convexe d'une fonctionnelle. C'est pourquoi on va utiliser la définition de l'inf-convolution quasi-convexe pour définir notre polaire qui se trouve avoir un rapport avec celles définies par Crouzeix d'une part et Greenberg & Pierskalla (G & P) d'autre part. On définira son quasi-tangentiel et on terminera par un exemple · la « surrogate dualité ».*

Mots clés : Optimisation; quasi-convexe; quasi-tangentiel; inf-convolution.

Abstract. — *The infimal convolution has an important role in convex analysis. It is closely related to a polar of a convex function. We use the definition of a quasiconvex infimal convolution to define our polar which is related to the polars defined respectively by Crouzeix and Greenberg & Pierskalla (G & P). In this work, we shall define its quasi-tangential and we shall end by an example: the "surrogate duality".*

Keywords : Optimization; quasiconvexity; quasi-tangential; infimal convolution.

1. INTRODUCTION

Dans tout ce qui suit, X et X' désignent deux espaces vectoriels topologiques localement convexes mis en dualité séparante par la forme bilinéaire notée $\langle\,,\rangle$, $\mathbb{P}=\{f: X\to[0,+\infty]\}$ et $\mathbb{F}$ sera l'ensemble $\bar{R}^X=\{f: X\to[-\infty,+\infty]\}$. On prendra soin de prolonger l'addition des réels à $\bar{R}=[-\infty,+\infty]$ de la manière suivante: $a+(+\infty)=+\infty$ pour tout a appartenant à $[-\infty,+\infty]$ (*cf.* [7]). Rappelons les principales définitions.

(*) Reçu en mai 1991.

(1) Département de mathématiques et d'informatique, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Québec), Canada.

L'*épigraphe strict* de f noté est (f) est l'ensemble

$$\text{est } (f)=\{(x,\lambda)\in X\times R: f(x)<\lambda\}$$

et les *tranches* ou *sections* de f sont les ensembles suivants

$\mathrm{T}(f,\lambda)=\{x\in X: f(x)\leqq\lambda\}$ et $t(f,\lambda)=\{x\in X: f(x)<\lambda\}$ où λ est réel.

La *conjuguée convexe* de f est définie par

$$f^*(x')=\operatorname{Sup}\{\langle x,x'\rangle-f(x): x\in X\}$$

Enfin on dira que f est *propre* si le domaine effectif de f est non vide et si f est finie sur ce domaine. L'*inf-convolution convexe* de deux fonctionnelles f et g introduite par Moreau (*cf.* [7]) est :

$$f\Delta g(z)=\operatorname{Inf}\{f(x)+g(z-x): x\in X\}$$

La loi Δ vérifie l'égalité : est $(f\Delta g)=$ est $(f)+$ est (g)

Remplaçons g par un élément x' de X'. On obtient

$$\begin{aligned} f\Delta x'(z) &= \operatorname{Inf}\{f(x)+\langle z-x,x'\rangle : x\in X\} \\ &= -\operatorname{Sup}\{\langle x-z,x'\rangle-f(x): x\in X\}=\langle z,x'\rangle-f^*(x') \end{aligned}$$

Si on pose $f_z^*(x')=\langle z,x'\rangle-f^*(x')$ pour z fixé appartenant à X, alors on déduit facilement les propriétés suivantes :

(i) $f_z^*(0)=\operatorname{Inf} f$ et $-f_0^*=f^*$

(ii) $\operatorname{Sup}\{f_z^*(x'): x'\in X'\}=f^{**}(z)=\operatorname{Sup}\{f\Delta x'(z): x'\in X'\}$

(iii) $-f_z^*$ est convexe (cx) et semi-continue inférieurement (sci).

On va utiliser cette approche pour définir notre polaire en utilisant l'inf-convolution quasi-convexe (qcx). Cette contribution originale s'ajoute à celles déjà existantes. On rappelle que Crouzeix et Greenberg & Pierskalla utilisent, chacun à leur manière, une décomposition de f^* pour définir leur conjuguée (*cf.* [3], [4]). Dans [1], les auteurs appliquent deux polarités particulières aux tranches de fonctions pour définir leur conjuguée. Passy & Prisman utilisent les fonctions homogènes et la notion de « evenly » convexe pour définir une conjugaison symétrique. Dans [12], Volle a généralisé toutes ces notions. Pour d'autres approches, on pourra consulter par exemple [6], [9], [11], etc.

Dans tout ce qui suit, on utilisera la notation suivante : $\operatorname{Max}(a,b)=a\vee b$

2. PROPRIÉTÉS DE L'INF-CONVOLUTION QUASI-CONVEXE

L'*inf-convolution quasi-convexe* introduite par Rockafellar (*cf.* [10]) est définie comme suit :

$$f \nabla g(z) = \operatorname{Inf}\{ f(x) \vee g(z-x) : x \in X \}$$

On a l'importante égalité :

$$t(f \nabla g, \lambda) = t(f, \lambda) + t(g, \lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \text{ réel}$$

Remarquons que si on remplace la fonction g par la fonction nulle, on obtient

$$f \nabla 0(z) = \operatorname{Inf}\{ f(x) \vee 0 : x \in X \}$$

ce qui ne correspond pas en général à $\operatorname{Inf} f$. Pour pallier à cet inconvénient, il suffira de considérer des fonctionnelles positives.

Avant de définir notre fonction polaire, étudions quelques propriétés de l'opération ∇ et rappelons certaines définitions relatives à la quasi-convexité.

f est *quasi-convexe* (qcx) si $f(\lambda u + (1-\lambda) v) \leqq f(u) \vee f(v)$ pour tout (u, v, λ) appartenant à $X \times X \times [0, 1]$, f est *quasi-concave* (qcv) si $-f$ est quasi-convexe.

On a aussi le résultat suivant : f est qcx $\Leftrightarrow$ les ensembles $T(f, \lambda)$ ou $t(f, \lambda)$ sont convexes pour tout λ réel.

L'opération ∇ conserve la convexité et la quasi-convexité des fonctionnelles (*cf.* [10]) autrement dit

$$f \text{ et } g \text{ convexe} \Rightarrow f \nabla g \text{ convexe}$$
$$f \text{ et } g \text{ quasi-convexe} \Rightarrow f \nabla g \text{ quasi-convexe}$$

THÉORÈME 1 : *Soient A et B des ensembles non vides, f et g des fonctionnelles appartenant à $\bar{R}^X$. Désignons par δ_A la fonction indicatrice de l'ensemble A.*

(1) ∇ *est commutative et associative.*

(2) (i) $\operatorname{dom} f \nabla g = \operatorname{dom} f + \operatorname{dom} g$; (ii) $\delta_A \nabla \delta_B = \delta_{A+B}$.

(3) $f \nabla \delta_{\{x\}}(z) = f(z-x) \vee 0$. *Si f est positive alors $f \nabla \delta_{\{x\}}(z) = f(z-x)$. On remarque alors que pour tout μ positive $t(f \nabla \delta_{\{z\}}, \mu) = t(f, \mu) + \{z\}$.*

(4) $f \leqq g \Rightarrow f \nabla h \leqq g \nabla h$ *pour toute fonctionnelle h.*

(5) $\operatorname{Inf}\{ f_i \nabla g_j : (i, j) \in I \times J \} = \operatorname{Inf}\{ f_i : i \in I \} \nabla \operatorname{Inf}\{ g_j : j \in J \}$ *pour toutes familles de fonctions (f_i) et (g_j).*

(6) *Soit N une norme sur X. Si $d(z, A)$ désigne la distance de z à A, alors :*

$$N \nabla \delta_A(z) = \operatorname{Inf}\{ N(z-x) : x \in A \} = d(z, A).$$

(7) *Soit f positive.* $f\nabla\delta_{-A}(z)=\text{Inf}\{f(x):x\in A+z\}$ *et en particulier* $f\nabla\delta_{-A}(0)=\text{Inf}\{f(x):x\in A\}$.

Preuve: Immédiat. @

DÉFINITION 1 : *Soit f appartenant à $\mathbb{F}$. On dit que f est* inf-compacte *si pour tout μ réel l'ensemble $T(f,\mu)$ est compact.*

THÉORÈME 2 : *Soient f et g deux éléments propres de $\mathbb{F}$ telles que f soit inf-compacte et g soit sci. Alors $f\nabla g$ est sci, bornée inférieurement et ∇ est exacte.*

Preuve. — Par construction de la fonction $f\nabla g$, on a :

$$T(f\nabla g,\mu)=\cap\{T(f,\beta)+T(g,\beta):\beta>\mu\}$$

Comme $T(f,\beta)$ est compact et que $T(g,\beta)$ est fermé, il s'ensuit que $T(f\nabla g,\mu)$ est fermé, par conséquent $f\nabla g$ est sci.

Comme $\text{Inf}\, f\leqq f\nabla g(z)$ pour tout z appartenant à X et que f est inf-compacte (donc minorée), on déduit que $f\nabla g$ est bornée inférieurement.

La fonction $k:x\to f(x)\vee g(z-x)$ est sci comme maximum de deux fonctions sci. En plus le fermé $T(k,\beta)$ est inclus dans le compact $T(f,\beta)$. Par conséquent la fonction k est inf-compacte et donc minorée. Elle admet donc un minimum sur X non égal à $-\infty$. L'inf-convolution est donc exacte c'est-à-dire $f\nabla g(z)=\text{Min}\{f(x)\vee g(z-x):x\in X\}$ pour tout z appartenant à X (autrement dit il existe u et v appartenant à X tels que $u+v=z$ et $f\nabla g(z)=f(u)\vee g(v)$). @

Remarque 1 : Si f et g sont deux fonctionnelles propres et inf-compactes de $\mathbb{F}$, alors $f\nabla g$ est également propre et inf-compacte. Ceci est une conséquence directe de l'expression de $T(f\nabla g,\mu)$ vue précédemment.

3. POLAIRE D'UNE FONCTIONNELLE

DÉFINITION 2 : *Soit f une fonction positive. La fonction polaire de f en un point z appartenant à X est définie par* :

$F_z(x')=\text{Inf}\{f(x)\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}=f\nabla x'(z)$ *pour tout x' appartenant à X'*

On posera aussi :

$$f^E(z)=\text{Sup}\{F_z(x'):x'\in X'\}=\text{Sup}\{f\nabla x'(z):x'\in X'\}$$

Remarque 2:

(i) La fonction F_z est obtenue de la définition de l'inf-convolution quasi-convexe et vérifie $F_z(0)=\operatorname{Inf} f$,

(ii) La fonction F_z dépend de z; cependant on la notera souvent F s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Rappelons l'expression des polaires q^C et q^G en un point z définies respectivement par Crouzeix et G & P (*cf.* [3], [4]):

$$q^C(z,x')=\operatorname{Inf}\{\lambda:\operatorname{Inf}\{\langle z-x,x'\rangle : f(x)\leqq\lambda\}\leqq 0\}$$
$$q^G(z,x')=\operatorname{Inf}\{f(x):\langle z-x,x'\rangle\leqq 0\}$$

Étudions maintenant les propriétés des fonctions F_z et f^E.

THÉORÈME 3 : *Soient f et g des fonctionnelles positives.*

(1) $f\leqq g\Rightarrow F\leqq G\Rightarrow f^E\leqq g^E$

(2) *Si on pose* $h=\mu f$ *pour tout* $\mu>0$, *alors* $H(x')=\mu F(x'/\mu)$

(3) (i) $F_z(x')\leqq f(z)$ *pour tout* (z,x') *appartenant à* $X\times X'$; (ii) $f^E\leqq f$

(4) (i) $f=\operatorname{Sup} f_i\Rightarrow \operatorname{Sup} F_i\leqq F$ *pour toute famille de fonctions positives* f_i;
(ii) $f=\operatorname{Inf} f_i\Rightarrow \operatorname{Inf} F_i=F$ *pour toute famille de fonctions positives* f_i

(5) $t(F_z,\mu)=\bigcup\limits_{x\in t(f,\mu)}\{x'\in X':\langle z-x,x'\rangle<\mu\}$

(6) $T(f\nabla x',\mu)=\bigcap\limits_{\lambda>\mu}\{z\in X:\langle z,x'\rangle\leqq\lambda+\delta^*_{t(f,\lambda)}(x')\}$

(7) $T(f^E,\mu)=\bigcap\limits_{x'\in X'}\ \bigcap\limits_{\lambda>\mu}\ \bigcup\limits_{\langle x,x'\rangle<\lambda} t(f\nabla\delta_{\{z\}},\lambda)$

Preuve: (1), (2), (3), (4) et (5) sont immédiats.

$$\begin{aligned}(6)\quad &\{z:\langle z,x'\rangle\leqq\lambda+\delta^*_{t(f,\lambda)}(x')\}\\ &=\bigcap\{\{z:\langle z,x'\rangle<\lambda+\varepsilon+\delta^*_{t(f,\lambda)}(x')\}:\varepsilon>0\}\\ &=\bigcap\{\{z:\operatorname{Inf}\{f(x)+\varepsilon\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}<\lambda+\varepsilon\}:\varepsilon>0\}\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}&\bigcap_{\lambda>\mu}\{z\in X:\langle z,x'\rangle\leqq\lambda+\delta^*_{t(f,\lambda)}(x')\}\\ &=\bigcap_{\lambda>\mu}\bigcap_{\varepsilon>0}\{z:\operatorname{Inf}\{f(x)+\varepsilon\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}<\lambda+\varepsilon\}\\ &=\bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{\lambda>\mu}\{z:\operatorname{Inf}\{f(x)+\varepsilon\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}<\lambda+\varepsilon\}\\ &=\bigcap\{\{z:\operatorname{Inf}\{f(x)+\varepsilon\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}\leqq\mu+\varepsilon\}:\varepsilon>0\}\end{aligned}$$

$$=\{z\in X:\operatorname{Inf}\{f(x)\vee\langle z-x,x'\rangle:x\in X\}\leqq\mu\}=T(f\nabla x',\mu)$$

(7) $$T(f^E,\mu)=\bigcap_{\lambda>\mu}\{z\in X:f^E(z)<\lambda\}=\bigcap_{\lambda>\mu}\bigcap_{x'\in X'}\{z\in X:F_z(x')<\lambda\}$$

Or pour x' fixé,

$$\begin{aligned}F_z(x')<\lambda &\Leftrightarrow \exists\, x\in X \quad \text{tel que}\quad f(x)<\lambda \quad \text{et}\quad \langle z-x,x'\rangle<\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\, x\in X \quad \text{tel que}\quad f(z-x)<\lambda \quad \text{et}\quad \langle x,x'\rangle<\lambda\\ &\Leftrightarrow \exists\, x\in X \quad \text{tel que}\quad z\in t(f,\lambda)+\{x\} \quad \text{et}\quad \langle x,x'\rangle<\lambda\end{aligned}$$

Par suite

$$\{z\in X:F_z(x')<\lambda\}=\bigcup_{\langle x,x'\rangle<\lambda}t(f,\lambda)+\{x\}=\bigcup_{\langle x,x'\rangle<\lambda}t(f\nabla\delta_{\{z\}},\lambda).\ @$$

THÉORÈME 4 : *Soit* $f\in\bar{R}^X$.

(i) *F est quasi-concave et semi-continue supérieurement* (*scs*) *par rapport à* x'.

(ii) *F est quasi-concave, quasi-convexe et semi-continue inférieurement* (*sci*) *par rapport à* z.

Preuve :

(i) Immédiat d'après Théorème 3, 5.

(ii) D'après Théorème 3, 6, F est qcx et sci.

Pour prouver que F est qcv et scs, il suffit de considérer la fonctionnelle

$$\varphi_x(x',z)=f(x)\vee\langle z-x,x'\rangle \text{ pour } x \text{ fixé dans } X$$

qui, pour x et x' fixés, est qcv et scs en z d'où F est qcv et scs comme infimum de fonctions qcv et scs. @

COROLLAIRE 2 : f^E *est qcx et sci par rapport à* z.

Preuve : f^E est la borne supérieure d'une famille de fonctions qcx et sci. @

THÉORÈME 5 : *Soient* f *qcx appartenant à* P *et* z *appartenant à* X. *Si* f *est sci en* z *alors* $f^E(z)=f(z)$.

Preuve : Il suffit de prouver que $f^E(z)\geqq f(z)$.

(*a*) Supposons que $f(z)=\operatorname{Inf} f$. En prenant $x'=0$, on obtient :

$$f^E(z)\geqq\operatorname{Inf}\{f(x)\vee\langle z-x,0\rangle:x\in X\}=\operatorname{Inf} f=f(z).$$

(*b*) Supposons que $\operatorname{Inf} f < f(z)$. Soit λ tel que $\operatorname{Inf} f < \lambda < f(z)$. Puisque f est sci en z, il existe un voisinage convexe ouvert V de z tel que pour tout v appartenant à V, $\lambda < f(v)$. Par suite $V \cap T(f, \lambda) = \varnothing$. D'après un théorème de séparation de Hahn-Banach (*cf.* [5]), il existe un hyperplan fermé qui les sépare. Plus précisément,

$$\exists\, x' \neq 0 \qquad \text{tel que} \quad \forall\, x \in T(f, \lambda), \lambda \leqq \langle z-x, x' \rangle$$

et

$$\forall\, x \in V \qquad \langle z-x, x' \rangle \leqq \lambda \qquad \text{car} \quad 0 \in V.$$

Il s'ensuit que

$$\lambda \leqq \operatorname{Inf} \{ \operatorname{Max} (f(x), \langle z-x, x' \rangle) : x \in T(f, \lambda) \}$$

et

$$\lambda \leqq \operatorname{Inf} \{ \operatorname{Max} (f(x), \langle z-x, x' \rangle) : x \notin T(f, \lambda) \}.$$

On obtient donc $\lambda \leqq F_z(x')$ et par conséquent $\lambda \leqq f^E(z)$ pour tout λ vérifiant $\lambda < f(z)$ ce qui veut dire que $f(z) \leqq f^E(z)$. @

COROLLAIRE 3 : *Soit f appartenant à P. Alors $f^{EE} = f^E$*

Preuve : Il suffit de poser $g = f^E$ et d'employer le théorème précédent à g. @

Remarque 3 : On vérifie aisément les inégalités suivantes (*cf.* [3]) :

$$f^E(z) \leqq f_{qi}(z) = \operatorname{Sup} q^C(z, x') \leqq f^{GG}(z) = \operatorname{Sup} q^G(z, x') \leqq f_q(z) \leqq f(z)$$

où la fonctionnelle f_{qi} (resp. f_q) est la plus grande minorante qcx et sci (resp. qcx) de f.

COROLLAIRE 4 : *Soit f appartenant à P. f^E est la plus grande minorante qcx et sci de f, autrement dit elle coïncide avec f_{qi}.*

Preuve : Soit g une minorante qcx et sci de f. On déduit que $g^E \leqq f^E$. D'après le théorème précédent, $g^E = g$ d'où $g \leqq f^E$. @

Exemple : Prenons l'exemple cité dans [4] : soit $\lambda \in [0, 1]$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$, λ si $x = 0$ et 1 sinon. Suivant la valeur λ, on peut rendre f sci ou non.

(*a*) Pour $0 < z$, $F_z(x') = 1$ si $zx' \geqq 1$, zx' si $0 < zx' < 1$ et 0 sinon

(*b*) Pour $0 \geqq z$, $F_z(x') = 0$.

On obtient alors : $f^E(z) = 0$ si $z \leqq 0$ et 1 sinon.

4. QUASI-TANGENTIEL

Crouzeix définie le tangentiel de f en z comme étant le sous-ensemble $Tf(z)$ de X' tel que :

$$x' \in Tf(z) \Leftrightarrow f(z) = q^C(z, x').$$

Il est alors naturel de poser la définition suivante.

DÉFINITION 3 : *Soit* $f \in P$.

x' est un sous-gradient de f en z si et seulement si $f(z) = F_z(x')$.

Le *quasi-tangentiel* de f en z, noté $Qf(z)$, est l'ensemble (éventuellement vide) des sous-gradients de f en z. On a donc :

$$x' \in Qf(z) \Leftrightarrow f(z) = F_z(x')$$

THÉORÈME 6 : *Soient* $f \in P$ *et* $z \in X$.

(1) $Qf(z)$ *est un convexe fermé*

(2) $0 \in Qf(z) \Leftrightarrow f(z) = \operatorname{Inf} f$

(3) $Qf(z) \neq \varnothing \Rightarrow f(z) = f^E(z)$

(4) $Qf(z) \subseteqq Tf(z)$.

Preuve : (1), (2) et (3) sont immédiats.

(4) Il suffit de prouver que $F_z(x') \leqq q^C(z, x')$.

Supposons le contraire, c'est-à-dire il existe (z, x') appartenant à $X \times X'$ tel que $F_z(x') > q^C(z, x')$. Soit alors μ vérifiant $F_z(x') > \mu > q^C(z, x')$. En utilisant la définition de $q^C(z, x')$, on obtient :

$$\operatorname{Inf}\{\langle z - x, x' \rangle : f(x) \leqq \mu\} \leqq 0 < \mu$$

Par conséquent il existe u appartenant à X pour lequel $f(u) \leqq \mu$ et $\langle z - u, x' \rangle \leqq \mu$, autrement dit $F_z(x') \leqq f(u) \vee \langle z - u, x' \rangle \leqq \mu < F_z(x')$, ce qui est absurde et donc $F_z(x') \leqq q^C(z, x')$. Soit $x' \in Qf(z)$. Par définition, on a : $f(z) = F_z(x')$. Comme $F_z(x') \leqq q^C(z, x')$, on déduit que : $f(z) \leqq q^C(z, x')$. Or $q^C(z, x') \leqq f(z)$, d'où $q^C(z, x') = f(z)$ et donc $x' \in Tf(z)$. @

5. OPTIMISATION QUASI-CONVEXE

A f appartenant à P, on associe le problème primal $(P): \alpha = \operatorname{Inf} f$.

Désignons par U et U' deux espaces vectoriels topologiques localement convexes en dualité par la forme bilinéaire notée (,). U est appelé espace de perturbations pour le problème (P).

Soit ψ la fonction de perturbation de $X \times U \to [0, +\infty]$ telle que :

$$\psi(x, 0) = f(x) \text{ pour tout } x \text{ appartenant à } X$$

Pour la perturbation u de U, on considère le problème perturbé (P_u) :

$$k(u) = \operatorname{Inf}\{\psi(x, u) : x \in X\}$$

Remarquons que le problème (P) correspond à la valeur $u=0$ et donc $\alpha = k(0)$. k^E étant la plus grande minorante qcx et sci de k, on déduit que $k^E(0) \leqq k(0) = \alpha$. Cette inégalité nous amène à considérer le problème dual (Q) de (P) :

$$\beta = \operatorname{Sup}\{K_0(u') : u' \in U'\}$$

Son expression est :

$$\beta = \operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{[\operatorname{Inf}\{\psi(x, u) : x \in X\} \vee (-u, u')] : u \in U\} u' \in U'\}$$

On a toujours $\beta \leqq \alpha$; cependant on a l'égalité si k est qcx et sci en 0.

Désignons par S l'ensemble des solutions du problème (Q). On a le résultat suivant.

THÉORÈME 7 : *Si l'ensemble $Qf(0)$ est non vide, alors*

$$\beta = \alpha \Leftrightarrow Qk(0) = S$$

Preuve : Il suffit de remarquer que :

$$S = \{u' \in U' : K_0(u') = \beta = k^E(0)\} \qquad \text{et} \qquad Qf(0) = \{u' \in U' : K_0(u') = \alpha\}. \ @$$

Exemple : la « surrogate duality ».

Considérons le problème suivant. Soient $X = R$, (,) le produit scalaire usuel, $f \in P$ et $g \in R^X$.

Posons $(P): \alpha = \operatorname{Inf}\{f(x); x \in C\}$ où $C = T(g, 0)$.

On se ramène au cas précédent en posant $\mathbf{f}(x) = f(x)$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon.

Posons $U = R$ et soit le problème perturbé : $k(u) = \operatorname{Inf}\{f(x) : x \in C_u\}$ où à $u \in U$, on associe l'ensemble $C_u = T(g, u)$.

Pour être conforme avec nos notations précédentes, on prendra comme fonction de perturbation $\psi(x, u)=f(x)$ si $x \in C_u$ et $+\infty$ sinon. On a :

$$\psi_{(z, t)}(0, u')=\operatorname{Inf}\{\psi(x, u) \vee (t-u, u') : x, u \in \mathrm{R}\}$$
$$=\operatorname{Inf}\{f(x) \vee (t-u, u') : x \in C_u, u \in R\}$$

et

$$K_t(u')=\operatorname{Inf}\{k(u) \vee (t-u, u') : u \in U\}$$
$$=\operatorname{Inf}\{\operatorname{Inf}\{f(x); x \in C_u\} \vee (t-u, u') : u \in R\}.$$

On remarque alors que :

$$\psi_{(z, t)}(0, u')=\mathrm{K}_t(u')$$

et

$$\beta=\operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leqq u, u \in R\} u' \in R\}.$$

Posons $d=\operatorname{Inf}\{f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leqq u, u \in R\}$.

(i) $u' \geqq 0 \Rightarrow \operatorname{Inf}\{f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leqq u, 0 \leqq u\}$
$$=\operatorname{Inf}\{f(x) : g(x) \leqq u, 0 \leqq u\}=\operatorname{Inf} f \Rightarrow d=\operatorname{Inf} f.$$

(ii) $u'<0 \Rightarrow \operatorname{Inf}\{f(x) \vee (-u, u') : g(x) \leqq u, u \leqq 0\}$
$$=\operatorname{Inf}\{f(x) : g(x) \leqq 0\}=\alpha$$
$$\geqq \operatorname{Inf}\{\operatorname{Max}[f(x), -u . u'] : g(x) \leqq u, 0 \leqq u\}$$
$$=\operatorname{Inf}\{\operatorname{Max}[f(x), -g(x) . u'] : x \in X\}$$
$$\Rightarrow d=\operatorname{Inf}\{\operatorname{Max}[f(x) \vee (-g(x), u') : x \in X\}.$$

En résumé, le problème s'écrit :

$$\beta=\operatorname{Sup}\{d : u' \in U\}=\operatorname{Sup}\{\operatorname{Inf}\{f(x) \vee (-g(x), u') : x \in X\} u' \leqq 0\}.$$

5. CONCLUSION

On a traité le cas où f est positive. Si f est négative, on utilise la sup-convolution quasi-convexe pour définir la polaire de f en un point z. On notera :

$n^f(z, x')=\operatorname{Sup}\{\operatorname{Min}[f(x), \langle z-x, x' \rangle] : x \in X\}$ pour tout x' appartenant à X'

Dans ce cas, $n^f(z, 0) = \operatorname{Sup} f$.

Cependant une question demeure en suspens : peut-on prolonger notre construction à des fonctionnelles à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$?

Note de l'auteur. – Je tiens à remercier Réda Rheffouli pour ses remarques fructueuses et les arbitres dont j'ai beaucoup apprécié les critiques constructives.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Atteia et A. Elqortobi, Quasi-Convex Duality *Lectures Notes in Control and Inform. Sci.*, 1980, *30*, p. 3-8.
2. N. Bourbaki, Espaces Vectoriels topologiques, Hermann, Paris,
3. J. P. Crouzeix, Contributions à l'étude des fonctions quasiconvexes, *Thèse de Doctorat d'État*, série E, n° d'ordre 250, 1977. Université de Clermont-Ferrand (France).
4. M. J. Greenberg et W. P. Pierskalla, Quasi-Conjugate Functions and Surrogate Duality, *Cahiers Centre Études Rech. Opér.*, 1973, *15*, p. 437-448.
5. P. J. Laurent, Approximation et Optimisation, Hermann, Paris, 1972.
6. J. E. Martinez-Legaz, Quasiconvex Duality Theory by Generalized Conjugation Methods, *Optimization*, 1988, *19*, p. 603-652.
7. J. J. Moreau, Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques, *J. Math. Pures Appl.*, 1970, *49*, p. 109-154.
8. U. Passy et E. Z. Prisman, Conjugacy in quasiconvex programming, *Math. Programming*, 1984, *30*, p. 121-146.
9. J. P. Penot et M. Volle, On Quasi-convex Duality, *Math. Oper. Res.*, 1990, *15*, p. 597-625.
10. R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton, 1970.
11. I. Singer, Conjugate Functionals and Level Sets, *Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl.*, 1984, *8*, p. 313-320.
12. M. Volle, Conjugaison par tranches, *Ann. Mat. Pura Appl.* (*IV*), 1985, *139*, p. 279-312.