RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

KHOAN VO KHAC

Résolution directe du problème général de distribution

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 26, nº 2 (1992), p. 139-152

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_2_139_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 26, n° 2, 1992, p. 139 à 152)

RÉSOLUTION DIRECTE DU PROBLÈME GÉNÉRAL DE DISTRIBUTION (*)

par Khoan Vo KHAC [1]

Résumé. — *Résolution du problème général de distribution en utilisant uniquement la théorie des graphes, sans passer par la théorie de la programmation linéaire; cas particulier du problème de transport.*

Mots clés : Distribution; transport; graphes.

Abstract. — *Resolution of the general transshipment problem, not by the theory of linear programmation, but by the theory of graphs; special case of transport problem.*

Keywords : Transshipment; transport; graphs.

I. FORMULATION DU PROBLÈME

1. Définition générale

(*a*) MULTIGRAPHE : Un multigraphe G est un triplet (I, U, ε), où I est un ensemble non vide, appelé ensemble des sommets, U est un ensemble quelconque, appelé ensemble des arcs, $\varepsilon=(\varepsilon', \varepsilon'')$ est une application de U dans $I\times I$, appelée orientation. Pour tout $u\in U$, $\varepsilon'(u)$ est appelé l'extrémité initiale de u, et $\varepsilon''(u)$ l'extrémité terminale de u. Si ε est injective, alors G est appelé monographe. Pour tout $i\in I$, on pose

$$\Gamma(i)=\{j\in I \mid (\exists u\in U)(\varepsilon(u)=(i, j))\},$$
$$\bar{\Gamma}(i)=\{j\in I \mid (\exists u\in U)(\varepsilon(u)=(j, i))\},$$

(*) Reçu janvier 1991.
[1] 7, square Dunois, Résidence Chephren, 75646 Paris Cedex 13.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/92/02 139 14/$ 3.40

$\Gamma(i)$, resp. $\bar{\Gamma}(i)$, est l'ensemble des successeurs, resp. prédécesseurs, de i. Pour toute partie J de I, on pose

$$\Omega^+(J)=\{u\in U \mid \varepsilon(u)\in J\times(I\setminus J)\},$$

$$\Omega^-(J)=\{u\in U \mid \varepsilon(u)\in(I\setminus J)\times J\},$$

$$\Omega(J)=(\Omega^+(J), \Omega^-(J)), \qquad \operatorname{supp}\Omega(J)=\Omega^+(J)\cup\Omega^-(J),$$

$\Omega(J)$ est le cocycle des arcs incidents à J et $\operatorname{supp}\Omega(J)$ est son support, c'est-à-dire l'ensemble de tels arcs.

Les autres définitions et notations que nous utiliserons sont celles de Berge [2]. L'ensemble des flots sur G sera noté $F(G)$, l'ensemble des tensions sur G sera noté $T(G)$. Le flot caractéristique d'un cycle (simple) γ sera noté 1γ, la tension caractéristique d'un cocycle $\Omega(J)$ sera notée $1\Omega(J)$. Un canal sur G est une application de U dans l'ensemble des intervalles fermés de $[-\infty, +\infty]$. Un flot f sur G est dit compatible avec un canal K si, pour tout $u\in U : f(u)\in K(u)$.

(*b*) Graphe de distribution : Un graphe de distribution est, par définition, un multigraphe $G=(I, U, \varepsilon)$, sans boucles et muni d'une partition (U', U'') de U. Tout élément de U' s'appelle un arc réel, tout élément de U'' s'appelle un arc fictif (*fig.* 1)

Exemple (graphe de transport) : Un graphe de transport est, par définition, un multigraphe sans boucles $G=(I, U, \varepsilon)$, dans lequel il existe un arc $\tilde{u}$, dit *arc de retour*, et deux sommets distincts e et s, appelés respectivement *entrée fictive et sortie fictive*, tels que $\Omega^-(e)=\Omega^+(s)=\{\tilde{u}\}$ et dans lequel on a posé $U''=\{\tilde{u}\}\cup\Omega^-(s)\cup\Omega^+(e)$, $U'=U\setminus U''$.

Les successeurs de e s'appellent les entrées réelles; les prédécesseurs de s s'appellent les sorties réelles.

De plus, si pour tout $u\in U'$, l'extrémité initiale de u est une entrée réelle et l'extrémité terminale de u est une sortie réelle, alors G s'appelle un graphe de transport direct.

(*c*) *Réseau de distribution :* Un réseau de distribution est, par définition, un graphe de distribution (G, U', U'') muni d'une application a envoyant U' dans $\mathbb{R}=]-\infty, \infty[$, appelé *coût unitaire de transfert*, et d'une application c envoyant U dans $\bar{\mathbb{R}}_+=[0, +\infty]$, appelée *capacité*. La restriction de c à U'', appelée *capacité de production*, est à valeurs *finies*, celle de c à U', appelée *capacité de transfert*, peut prendre la valeur $+\infty$.

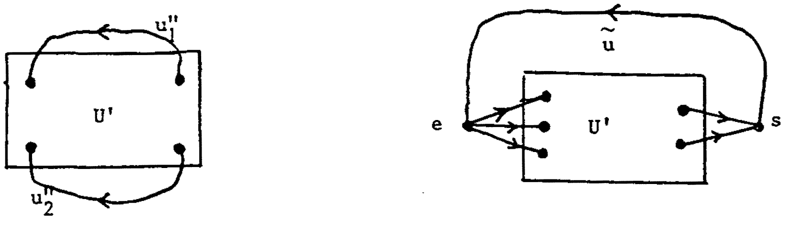

Figure 1

Exemple (réseau de transport) : un réseau de transport est, par définition, un réseau de distribution $(G, U'. U'', a, c)$ où (G, U', U'') est un graphe de transport et où c possède la propriété de conservation aux sommets e et s : $c(\tilde{u})=\sum(c(u),\ u\in\Omega^-(s))=\sum(c(u),\ u\in\Omega^+(e))$. De plus, si G est un monographe de transport direct et si c vaut 1 sur chaque arc fictif (sauf sur l'arc de retour), alors le réseau de transport s'appelle un réseau d'affectation.

Dorénavant, on se donne un réseau de distribution (G, U', U'', a, c), où $G=(I, U, \varepsilon)$, et où I et U sont des ensembles finis.

2. Le problème de distribution

(*a*) Définition : Un flot f sur G est dit *admissible* si

$$0\leqq f\leqq c \text{ sur } U \qquad \text{et} \qquad f=c \text{ sur } U''$$

Remarque : Dans un réseau d'affectation, un flot admissible doit être booléen, c'est-à-dire à valeurs dans $\{0, 1\}$.

(*b*) Formulation : Déterminer un flot $\hat{f}$ sur G, admissible et tel que, pour tout flot admissible f : $(\hat{f}\mid a)\leqq(f\mid a)$, en posant $(f\mid a)=\sum(f(u)\,a(u),\ u\in U')$.

Ce problème peut se résoudre par la programmation linéaire.

Cependant, nous allons le résoudre par une technique généralisant celle utilisée par Berge et Ghouila-Houri [3], en introduisant un problème complémentaire.

3. Le problème complémentaire

Déterminer une tension $\hat{t}$ sur G telle que, pour toute tension t sur G (et avec la convention $(+\infty)\times(0)=0$) :

$$[c\mid\hat{t}]+(c\mid(\hat{t}-a)^+)\leqq[c\mid t]+(c\mid(t-a)^+),$$

où

$$[c \mid t] = \sum (c(u)\, t(u),\ u \in U''),$$
$$(t-a)^+ (u) = 0, \qquad \text{si} \quad t(u) - a(u) \leqq 0,$$
$$(t-a)^+ (u) = t(u) - a(u), \qquad \text{si} \quad t(u) - a(u) \geqq 0$$

4. Condition nécessaire pour l'existence de solutions

Posons $U_\infty = \{ u \in U' \mid c(u) = +\infty \}$. Si le problème de distribution possède une solution (optimale), alors, dans le graphe partiel $G(U_\infty)$ défini par U_∞, la a-valeur de tout circuit est positive (au sens large).

Preuve : Soit $\hat{f}$ une solution du problème de distribution et γ un circuit dans le graphe $G(U_\infty)$; posons $f = \hat{f} + 1\gamma$, alors f est un flot admissible; par suit $(\hat{f} \mid a) \leqq (f \mid a)$, ce qui montre que $(1\gamma \mid a) \geqq 0$.

Dorénavant, nous supposons que cette condition nécessaire est vérifiée.

II. THÉORÈMES DE COMPLÉMENTATION

1. Théorème de liaison

Soit f un flot admissible et t une tension; alors

$$(f \mid a) + [c \mid t] + (c \mid (t-a)^+) \geqq 0.$$

Preuve : Comme f et t sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^U$: $(f \mid t) + [f \mid t] = 0$. Comme $f = c$ sur U'' : $(f \mid a) + (f \mid t - a) + [c \mid t] = 0$.

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}(f \mid t-a) &\leqq (f \mid (t-a)^+), \quad \text{car } f \geqq 0 \text{ et } (t-a)^+ \geqq t-a,\\ &\leqq (c \mid (t-a)^+), \quad \text{car } f \leqq c \text{ et } (t-a)^+ \geqq 0.\end{aligned}$$

2. Théorème d'optimalité

Soit $\hat{t}$ une tension et $\hat{f}$ un flot ayant les propriétés suivantes, dites propriétés d'optimalité :

$\hat{f}$ est admissible,

pour tout $u \in U'$ et $\hat{t}(u) < a(u)$: $\hat{f}(u) = 0$,

pour tout $u \in U'$ et $\hat{t}(u) > a(u)$: $\hat{f}(u) = c(u)$.

Alors

(i) $(\hat{f} \mid a)+(c \mid (\hat{t}-a)^{+})+[c \mid \hat{t}]=0$,

(ii) $\hat{f}$ *est une solution du problème de distribution,*

(iii) $\hat{t}$ *est une solution du problème complémentaire.*

Preuve : (i) Comme dans la preuve du théorème de liaison :

$$(\hat{f} \mid a)+(\hat{f} \mid \hat{t}-a)+[c \mid \hat{t}]=0.$$

On remarque ensuite que

$$(\hat{f} \mid \hat{t}-a)=(c \mid (\hat{t}-a)^{+}).$$

(ii) Soit f un flot admissible; le théorème de liaison appliqué au couple $(f, \hat{t})$ et l'assertion (i) donnent

$$(f \mid a)+[c \mid \hat{t}]+(c \mid (\hat{t}-a)^{+}) \geqq 0,$$
$$(\hat{f} \mid a)+[c \mid \hat{t}]+(c \mid (\hat{t}-a)^{+})=0.$$

On en déduit que $(\hat{f} \mid a) \leqq (f \mid a)$.

(iii) Soit t une tension; le théorème de liaison appliqué au couple $(\hat{f}, t)$ et l'assertion (i) donnent

$$(\hat{f} \mid a)+[c \mid t]+(c \mid (t-a)^{+}) \geqq 0,$$
$$(\hat{f} \mid a)+[c \mid \hat{t}]+(c \mid (\hat{t}-a)^{+})=0.$$

On en déduit le résultat désiré.

Nous verrons au paragraphe IV que la réciproque du théorème d'optimalité est vraie.

III. ALGORITHME DE DISTRIBUTION

Dans ce paragraphe III, nous supposons que la condition suivante est remplie : Dans le graphe partiel $G(U')$ défini par l'ensemble U' des arcs réels, la a-valeur (totale) de tout circuit est positive, au sens large. Cette condition additionnelle n'est pas essentielle, mais elle permet l'initialisation de l'algorithme de distribution qu'on va décrire.

1. Description de l'algorithme

(a) INITIALISATION : Soit t une tension et f un flot sur G ayant les propriétés suivantes, dites de sous-optimalité :

pour tout $u \in U$: $0 \leqq f(u) \leqq c(u)$,

pour tout $u \in U'$ et $t(u)<a(u)$: $f(u)=0$,

pour tout $u \in U'$ et $t(u) > a(u)$: $f(u) = c(u)$.

Si $f = c$ sur U'', alors STOP; aller à la conclusion $c(i)$.

Sinon, aller à l'étape générale b.

Remarque : Par hypothèse, le graphe partiel $G(U')$ ne possède aucun circuit de a-valeur strictement négative. Il existe donc sur ce graphe un potentiel q tel que, pour tout $u \in U'$: $q(\varepsilon''(u)) - q(\varepsilon'(u)) \leqq a(u)$. En effet, si ce graphe possède une racine r, alors pour tout sommet i, on peut prendre pour $q(i)$ la a-valeur d'une a-piste (c'est-à-dire d'un chemin dont la a-valeur est la plus petite) de r à i. On utilise pour cette détermination l'algorithme de Dantzig, Blattner et Rao [4], ou l'algorithme de Nemhauser [8], ou l'algorithme de Bazarra et Langley [1]. Si le graphe $G(U')$ ne possède pas de racine, alors on adjoint à ce graphe un sommet supplémentaire r et des arcs supplémentaires, de valeur nulle, allant de r à chaque sommet sans prédécesseurs du graphe $G(U')$, et on se ramène au cas précédent. Soit t la tension sur le graphe G associée au potentiel q, définie pour tout $u \in U$ par $t(u) = q(\varepsilon''(u)) - q(\varepsilon'(u))$; alors $t \leqq a$ sur U'. Il suffit dès lors de prendre pour f le flot nul.

(*b*) ÉTAPE GÉNÉRALE : Dans chacun des arcs fictifs, on essaie de rendre le flot égal à la capacité : pour cela, on initialise avec le flot f et on applique un algorithme du flot maximum au premier arc fictif, puis au deuxième arc fictif, ..., les flots étant assujettis à rester compatibles avec le canal $K_t = [b_t, c_t]$, où

$b_t(u) = 0$, $c_t(u) = c(u)$ si $u \in U'$ et $t(u) = a(u)$ (u est alors dit t-actif),

$b_t(u) = c_t(u) = 0$ si $u \in U'$ et $t(u) < a(u)$ (u est dit t-passif et vide),

$b_t(u) = c_t(u) = c(u)$ si $u \in U'$ et $t(u) > a(u)$ (u est dit t-passif et plein),

$b_t(u) =$ valeur en u du flot obtenu, $c_t(u) = c(u)$ si $u \in U''$.

Soit f' le flot obtenu et J l'ensemble des sommets marqués lors de la dernière exécution (pas forcément sur le dernier arc fictif) de l'algorithme du flot maximum.

Si $f' = c$ sur U', alors STOP; aller à la conclusion $c(i)$.

Sinon, poser

$$\delta = \inf\{\alpha, \beta\},$$

où

$$\alpha = \inf\{t(u) - a(u),\ u \in U' \cap \Omega^-(J) \text{ et } t(u) > a(u)\} \in]0, +\infty],$$

$$\beta = \inf\{a(u) - t(u),\ u \in U' \cap \Omega^+(J) \text{ et } a(u) > t(u)\} \in]0, +\infty],$$

en rappelant que la borne inférieure de la partie vide est égale à $+\infty$.

Si $\delta \neq +\infty$, alors poser $t' = t + \delta\Omega(J)$; aller à la conclusion $c(ii)$.

Sinon, alors STOP; aller à la conclusion $c(iii)$.

(*c*) CONCLUSION : (i) le flot obtenu est une solution du problème de distribution, t est une solution du problème complémentaire. FIN.

(ii) le couple (t', f') possède les propriétés de sous-optimalité, ce qui permet de remplacer le couple (t, f) par le couple (t', f') et d'aller à l'étape générale b; de plus, t' est strictement meilleure à t.

(iii) le problème complémentaire n'a pas de solution (optimale), car

$$\inf\{[c \mid s] + (c \mid (s-a)^+),\ s \in T(G)\} = -\infty,$$

par conséquent, le problème de distribution n'a pas de flot admissible. FIN.

Preuve : L'algorithme du flot maximal montre que :

$$f'(u) = 0 \qquad \text{si} \quad u \in \operatorname{supp}\Omega(J) \cap U' \quad \text{et} \quad t(u) < a(u)$$

ou $u \in \Omega^-(J) \cap U'$ et $t(u) = a(u)$,

$$f'(u) = c(u) \qquad \text{si} \quad u \in \operatorname{supp}\Omega(J) \cap U' \quad \text{et} \quad t(u) > a(u)$$

ou $u \in \Omega^+(J) \cap U'$ et $t(u) = a(u)$, ou $u \in \Omega^+(J) \cap U''$.

(i) La conclusion $c(i)$ résulte du théorème d'optimalité.

(ii) Pour prouver la conclusion $c(ii)$, commençons par dresser le tableau des valeurs de t' dans les arcs réels. Soit u un arc réel.

Si u n'appartient pas à $\operatorname{supp}\Omega(J)$, alors $t'(u) = t(u)$.

Si $u \in \Omega^-(J)$ et $t(u) \leqq a(u)$, alors $t'(u) < a(u)$, car $\delta > 0$.

Si $u \in \Omega^-(J)$ et $t(u) > a(u)$, alors $t'(u) \geqq a(u)$, car $\delta \leqq \alpha$.

Si $u \in \Omega^+(J)$ et $t(u) \geqq a(u)$, alors $t'(u) > a(u)$, car $\delta > 0$.

Si $u \in \Omega^+(J)$ et $t(u) < a(u)$, alors $t'(u) \leqq a(u)$, car $\delta \leqq \beta$.

Montrons que (t', f') possède les propriétés de sous-optimalité; en effet, soit $u \in U'$.

Si $t'(u) < a(u)$ et $u \notin \Omega^-(J)$, alors $t(u) \leqq t'(u) < a(u)$, donc $f'(u) = 0$.

Si $t'(u) < a(u)$ et $u \in \Omega^-(J)$, alors $t(u) \leqq a(u)$, donc $f'(u) = 0$.

Si $t'(u) > a(u)$ et $u \notin \Omega^+(J)$, alors $t(u) \geqq t'(u) < a(u)$, donc $f'(u) = c(u)$.

Si $t'(u) > a(u)$ et $u \in \Omega^+(J)$, alors $t(u) \geqq a(u)$, donc $f'(u) = c(u)$.

Montrons que t' est strictement meilleure que t.

Comme $f' = c$ sur $\Omega^+(J) \cap U''$:

$$[c \mid \Omega(J)] = [f' \mid \Omega(J)] + m$$

où $m=\sum(f'(u)-c(u),\ u\in\Omega^-(J)\cap U'')<0$,
car $f'\leqq c$ sur U et car il existe $v\in\Omega^-(J)\cap U''$ tel que $f'(v)<c(v)$. D'autre part :

$$\begin{aligned}(c\,|\,(t'-a)^+)&=\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\cap\Omega^+(J)\text{ et }t'(u)>a(u))\\&\quad+\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\cap\Omega^-(J)\text{ et }t'(u)\geqq a(u))\\&\quad+\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\setminus\operatorname{supp}\Omega(J)\text{ et }t'(u)>a(u))\\&=\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\cap\Omega^+(J)\text{ et }t(u)\geqq a(u))\\&\quad+\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\cap\Omega^-(J)\text{ et }t(u)>a(u))\\&\quad+\sum(c(u)(t'(u)-a(u)),\ u\in U'\setminus\operatorname{supp}\Omega(J)\text{ et }t(u)>a(u))\\&=\sum(c(u)(t(u)-a(u)),\ u\in U'\text{ et }t(u)>a(u))\\&\quad+\delta\sum(c(u),\ u\in U'\cap\Omega^+(J)\text{ et }t(u)\geqq a(u))\\&\quad-\delta\sum(c(u),\ u\in U'\cap\Omega^-(J)\text{ et }t(u)>a(u))\\&=(c\,|\,(t-a)^+)+\delta(f'\,|\,\Omega(J))=(c\,|\,(t-a)^+)-\delta[f'\,|\,\Omega(J)]\end{aligned}$$

Finalement $[c\,|\,t']+(c\,|\,(t'-a)^+)=[c\,|\,t]+(c\,|\,(t-a)^+)+\delta m$.

(iii) Pour tout $\lambda\in]0,\infty[$, posons $t_\lambda=t+\lambda\,\Omega(J)$, alors le tableau des valeurs de t_λ est celui des valeurs de t'; par conséquent :

$$[c\,|\,t_\lambda]+(c\,|\,(t_\lambda-a)^+)=[c\,|\,t]+(c\,|\,(t-a)^+)+\lambda m,$$

ce qui prouve que $\inf\{[c\,|\,s]+(c\,|\,(s-a)^+),\ s\in T(G)\}=-\infty$, puis qu'il n'existe pas de flot f admissible, car dans le cas contraire, on aurait

$$\inf\{[c\,|\,s]+(c\,|\,(s-a)^+),\ s\in T(G)\}\geqq-(f\,|\,a).$$

Remarque : Si (t,f) possède les propriétés de sous-optimalité, alors $t\leqq a$ sur U_∞. On peut aussi ajouter cette condition dans la formulation du problème complémentaire. Par ailleurs, dans cette formulation, on peut éviter la convention $(+\infty)\times 0=0$; il suffit d'utiliser le produit scalaire de c par $(t-a)^+$ non pas dans $\mathbb{R}^{U'}$, mais dans $\mathbb{R}^{W'}$, où $W'=U'\setminus U_\infty$.

2. Quelques cas particuliers

(*a*) *Cas où $c=+\infty$ sur U' :* Alors, $U'=U_\infty$; comme par hypothèse, le graphe $G(U_\infty)$ n'a pas de circuit de a-valeur totale strictement négative, il existe une tension t sur G tel que $t\leqq a$ sur U'. On initialise l'algorithme avec cette tension t (et avec un flot f vérifiant avec t les propriétés de sous-optimalité, le flot nul par exemple). D'après la remarque précédente, $t' \leqq a$ sur U'.

Dans ce cas particulier, le problème complémentaire devient : *déterminer une tension* $\hat{t}$ *sur* G, *avec* $\hat{t} \leqq a$ *sur* U', *telle que, pour toute tension* t *sur* G, *avec* $t \leqq a$ *sur* U' : $[c \mid \hat{t}] \leqq [c \mid t]$.

(*b*) *Cas d'un réseau de transport :* Pour vérifier que $f = c$ sur U'', il suffit de vérifier que $f(\tilde{u}) = c(\tilde{u})$. En effet, d'une part $f \leqq c$, d'autre part, la propriété de conservation en e et en s pour la capacité c et pour le flot f donne :

$$\sum (c(u) - f(u),\ u \in \Omega^{+}(e)) = c(\tilde{u}) - f(\tilde{u}) = 0,$$
$$\sum (c(u) - f(u),\ u \in \Omega^{-}(s)) = c(\tilde{u}) - f(\tilde{u}) = 0.$$

(*c*) *Cas d'un réseau de transport direct :* L'application a s'identifie alors à la multimatrice $a = (a(i, j),\ i \in \Gamma(e)$ et $j \in \bar{\Gamma}(s))$. Un raisonnement simple montre que l'ensemble des solutions du problème reste inchangé, si l'on remplace la matrice a par la matrice a' donnée par :

$$a'(i, j) = a(i, j) + d \quad \text{si } i = i_0, \qquad a'(i, j) = a(i, j) \quad \text{si } i \neq i_0,$$

où d est un réel donné et où i_0 est un élément donné de $\Gamma(e)$.

Un résultat analogue s'obtient en permutant les indices i et j. Par conséquent, on peut se ramener au cas où la matrice a est à valeurs positives (au sens large), et où il existe au moins une valeur nulle dans chaque ligne et dans chaque colonne. On initialise alors avec la tension nulle et le flot nul.

Remarque : Le problème de distribution concernant un réseau de distribution se ramène à celui concernant un réseau de transport. Il suffit d'installer entre les arcs fictifs une entrée fictive commune e, une sortie fictive commune s et un arc fictif de retour commun $\tilde{u}$; chaque arc fictif u'' est ainsi scindé en deux arcs : l'un v'' relie l'extrémité initiale k de u'' à s, l'autre w'' relie e à l'extrémité terminale j de u''; la capacité de v'' et celle de w'' sont égales à celle de u'' (cf. *fig.* 2).

3. Finitude et complexité de l'algorithme

Nous supposons que les données sont entières (ou plus généralement rationnelles) et que le réseau de distribution est un réseau de transport (en utilisant la remarque de III.2). Pour simplifier les notations, nous supposons aussi que card U est de l'ordre de n^2, où $n = \text{card I}$.

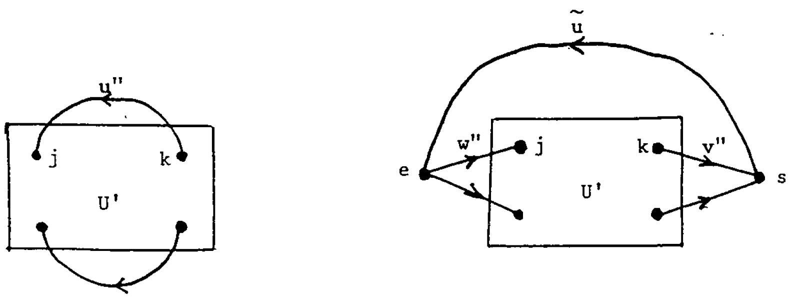

Figure 2

L'initialisation est de complexité n^3 si l'on utilise l'un des algorithmes cités à la remarque du III.1.*a*.

Chaque étape nécessite un nombre d'opérations au plus proportionnel à n^3; en effet, l'algorithme du flot maximum de Karzanov [5], simplifié par Malhotra, Kumar et Maheshwari [6], est de complexité n^3, alors que la détermination de la tension t' à partir de la tension t nécessite un nombre d'opérations au plus proportionnel à n^3.

Quand on passe d'une étape à la suivante, et en adoptant les notations de III.1 : ou $f(\tilde{u})<f'(\tilde{u})$, ou $f(\tilde{u})=f'(\tilde{u})$ et J est strictement inclus dans J' (car d'une part, tout arc marqué dans une étape sera encore marqué dans l'étape suivante, si la valeur du flot reste inchangée, et d'autre part, le choix de δ implique qu'un nouvel arc au moins sera marqué). Le nombre des étapes est donc au plus égal à $c(\tilde{u})\,n$.

Au total, le nombre des opérations nécessaires à l'obtention du flot optimal ou au décel de la non-existence de flot admissible est au plus proportionnel à $c(\tilde{u})\,n^4$.

IV. QUELQUES AUTRES RÉSULTATS

1. Réciproque du théorème d'optimalité

Soit f une solution (optimale) du problème de distribution. Alors, il existe une tension t sur G telle que,

pour tout $u \in U'$ et $t(u)<a(u)$: $f(u)=0$,

pour tout $u \in U'$ et $t(u)>a(u)$: $f(u)=c(u)$.

Preuve : Plaçons-nous d'abord dans le cas où la condition énoncée au début du paragraphe III est remplie et où les données sont rationnelles. La finitude de l'algorithme de distribution montre qu'il existe une tension t sur G telle que, pour le flot optimal obtenu par l'algorithme, et par conséquent, pour tout flot optimal f : $(f \mid a)+(c \mid (t-a)^+)+[c \mid t]=0$.

Or, dans la preuve du théorème de liaison II.1, nous avons montré que

$$(f \mid a)+(f \mid (t-a))+[c \mid t]=0.$$

Par suite

$$(c \mid (t-a)^+)=(f \mid (t-a)),$$

c'est-à-dire

$$((c-f) \mid (t-a)^+)+(f \mid (t-a)^-)=0,$$

ce qui donne

$$((c-f) \mid (t-a)^+)=0 \qquad \text{et} \qquad (f \mid (t-a)^-)=0.$$

Le cas général sera prouvé au numéro IV.4.

2. Condition suffisante de l'existence des solutions

Supposons que la condition nécessaire I.4 est remplie et qu'il existe au moins un flot admissible; alors, il existe au moins un flot optimal (c'est-à-dire une solution du problème de distribution).

Preuve : Ce théorème résulte de la finitude de l'algorithme de distribution, dans le cas où les données sont rationnelles et où l'on peut initialiser l'algorithme. Étudions le cas général.

Désignons par D l'ensemble des circuits simples de G. Pour tout circuit simple d, désignons par u_d un arc de d ayant la plus petite capacité. Posons $D_\infty=\{d \in D \mid c(u_d)=+\infty\}$. Soit f un flot admissible. Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, il existe (*cf.* Berge [2]) une famille $(k_d,\ d \in D)$ d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telle que $f=\sum(k_d 1 d,\ d \in D)$, où, pour tout $d \in D$: $k_d \leqq f(u_d) \leqq c(u_d)$.

Comme la condition nécessaire I.4 est remplie, dans la recherche des flots optimaux, il suffit de ne considérer que les flots admissibles « utiles », c'est-à-dire tels que $k_d=0$ si $d \in D_\infty$. Pour un tel flot f et pour tout arc u : $f(u) \leqq \sum(c(u_d),\ d \in D$ et $d \notin D_\infty) < +\infty$.

Ainsi, l'ensemble des flots admissibles utiles est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^U$. Par conséquent, son image par la forme linéaire continue $h \to (h \mid a)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$.

3. Remarque sur la condition additionnelle, énoncée au début de III

Cette condition permet l'initialisation de l'algorithme de distribution, mais elle n'est pas essentielle. Dans certains cas, même si cette condition n'est pas remplie, on peut aisément initialiser l'algorithme. Le cas le plus simple est le suivant.

Le graphe $G(U')$ possède un seul circuit élémentaire γ de a-valeur totale strictement négative; de plus, dans le graphe partiel défini par $U' \setminus V$, où V désigne l'ensemble des arcs de γ, les sommets de γ appartiennent à des composantes connexes distinctes (autrement dit, ces sommets ne sont reliés entre eux que par des chaines formées d'arcs de V). Soit $w \in V$ tel que pour tout $v \in V$: $c(w) \leqq c(v)$, alors $c(w)$ est fini, d'après la condition nécessaire I.4. En utilisant une méthode analogue à celle indiquée à la remarque de III.1, on trouve aisément une tension t sur G ayant les propriétés suivantes :

$$t \leqq a \text{ sur } U' \setminus V,\ t = a \text{ sur } V \setminus \{w\},\ t(w) > a(w).$$

Posons $f = c(w) 1 \gamma$; alors le couple (t, f) possède les propriétés de sous-optimalité, ce qui permet d'initialiser l'algorithme de distribution.

Lorsque l'on ne sait pas initialiser l'algorithme de distribution, on peut toujours résoudre le problème de distribution par la programmation linéaire (*cf.* IV.4 ci-dessous). Mais si l'on sait l'initialiser, il permet de réduire le temps opératoire, comme en témoignent les tests de performance réalisés par des étudiants sur des réseaux de taille moyenne; de plus, lorsque les données sont entières, il fournit un flot optimal entier, alors que dans la programmation linéaire, le flot optimal obtenu n'est pas forcément entier.

4. L'optimisation linéaire associée au problème de distribution

Soit A la matrice d'incidence du multigraphe (sans boucles) G, définie pour tout $i \in I$ et tout $u \in U$ par

$$A(i, u) = 1 \text{ si } u \in \Omega^+(i), \text{ c'est-à-dire si } i = \varepsilon'(u),$$

$$A(i, u) = -1 \text{ si } u \in \Omega^-(i), \text{ c'est-à-dire si } i = \varepsilon''(u),$$

$$A(i, u) = 0, \text{ partout ailleurs.}$$

Prolongeons sur U'' la fonction a par 0. Alors, le problème de distribution peut se formuler ainsi :

Minimiser $(a \mid f)_{\mathbb{R}^U}$, sous les contraintes suivantes :

$$f \in (\mathbb{R}_+)^U, \qquad f \leqq c \quad \text{sur } U',$$

$$f = c \quad \text{sur } U'', \qquad A f = 0 \quad \text{sur } I.$$

Le problème dual s'écrit (*cf.* Minoux [7], Simmonard [9]), avec la convention $(+\infty) \times 0 = 0$:

Maximiser $(c \mid r)_{\mathbb{R}^U}$, sous les contraintes suivantes :

$$p \in \mathbb{R}^I,\ r \in \mathbb{R}^U,\ r \leqq 0 \text{ sur } U',\ A^* p + r \leqq a \text{ sur } U,$$

où A^* est la matrice transposée de la matrice A.

En posant pour tout $u \in U$: $t(u) = p(\varepsilon'(u)) - p(\varepsilon''(u))$, le problème dual peut se formuler ainsi :

Maximiser $-(c \mid s)_{\mathbb{R}^U}$, sous les contraintes suivantes :

$$t \in T(G), \quad s \in \mathbb{R}^{\mathrm{U}},$$

$$s \geqq t \quad \text{sur } U'', \qquad s \geqq (t-a)^+ \quad \text{sur } U'.$$

Comme $c \geqq 0$ sur U, on peut toujours exiger que les deux dernières contraintes soient des égalités; le problème dual devient alors le problème complémentaire. D'après la théorie de la dualité, si l'un des problèmes (dual ou primal) possède une solution (optimale), alors l'autre aussi, et les valeurs optimales des fonctions objectives sont égales, ce qui prouve la réciproque IV.1 du théorème d'optimalité II.2. En fait, ces deux théorèmes constituent précisément le théorème des écarts complémentaires dans la théorie de dualité.

Remarque : Sans la convention $(+\infty) \times 0 = 0$, la formulation du problème dual est légèrement plus compliquée. On pose $W = U \diagdown U_\infty$, $W' = U' \diagdown U_\infty$. Maximiser $(c \mid r)_{\mathbb{R}^W}$, sous les contraintes suivantes :

$$p \in \mathbb{R}^I, \quad r \in \mathbb{R}^W, \qquad r \leqq 0 \quad \text{sur } W',$$

$$A^* p + r \leqq a \quad \text{sur } W, \qquad A^* p \leqq a \quad \text{sur } U_\infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. S. Bazaraa et R. W. Langley, A Dual Shortest Path Algorithm, *J. S.I.A.M.*, 1974, *26*, 3, p. 496-501.
2. C. Berge, Graphes, *Gauthier-Villars*, Paris, 1987.
3. C. Berge et A. Ghouila-Houri, Programmes, jeux et réseaux de transport, *Dunod*, Paris, 1962.
4. G. B. Dantzig, W. O. Blattner et M. R. Rao, All Shortest Routes from a Fixed Origin in a Graphe, *dans* Théorie des graphes, Journées Internationales d'Étude, Rome, juillet 1966, *Dunod*, Paris, 1967.
5. A. V. Karzanov, Determining the Maximal Flow in a Network with the Method of Preflows, *Soviet Math. Dokl.*, 1974, *15*, p. 434-437.
6. V. M. Malhotra, M. P. Kumar et S. N. Maheshwari, An $O(|V|^3)$ Algorithm for Finding Maximum Flows in Networks, *Inform. Process. Lett.*, 1978, *7*, 6, p. 277-278.
7. M. Minoux, Programmation mathématique, *Dunod*, Paris, 1983.
8. G. L. Nemhauser, A Generalized Permanent Label Setting Algorithm for the Shortest Path Between Specified Nodes, *J. Math. Anal. Appl.*, 1972, *38*, p. 328-334.
9. M. Simmonard, Programmation linéaire, *Dunod*, Paris, 1962.