RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MOHAMED HAOUARI
PIERRE DEJAX
MARTIN DESROCHERS

Les problèmes de tournées avec contraintes de fenêtres de temps, l'état de l'art

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 24, nº 3 (1990), p. 217-244

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1990__24_3_217_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 24, n° 3, 1990, p. 217 à 244)

LES PROBLÈMES DE TOURNÉES AVEC CONTRAINTES DE FENÊTRES DE TEMPS, L'ÉTAT DE L'ART (*)

par Mohamed HAOUARI (1), Pierre DEJAX (1) et Martin DESROCHERS (2)

Résumé. — *Nous établissons un état de l'art exhaustif, conçernant les problèmes de tournées multivéhicules et monodépôts. avec contraintes de capacité et de fenêtres de temps. Nous revoyons les principales formulations mathématiques, et nous analysons les différentes approches mises en œuvre, aussi bien les algorithmes optimaux, que les méthodes heuristiques.*

Mots clés : Méthode de séparation et évaluation progressives; génération de colonnes; tournées de véhicules; fenêtre de temps.

Abstract. — *We describe the state-of-the-art in vehicle routing and scheduling with time windows and capacity constraints. We review the basic model formulations, and we analyze the different approaches used for solving this problem. We consider both exact algorithms and heuristic methods.*

Keywords : Branch and bound; column generation; vehicle routing and scheduling; time window.

INTRODUCTION

L'objet de cet article est de fournir un état de l'art dans le domaine des tournées de véhicules avec fenêtres de temps. Nous nous intéresserons d'une manière prioritaire, au problème qui consiste à optimiser la gestion d'une flotte hétérogène de véhicules de capacité finie, domiciliés dans un même dépôt, et visitant un ensemble de clients ayant une demande (ou une offre, mais pas les deux à la fois) connue. Les visites ne sont autorisées que dans des intervalles horaires (fenêtres de temps) connus à l'avance. Nous désignerons ce problème par le PTVFT (Problème de Tournées de Véhicules avec Fenêtres de Temps), qui est le nom générique le plus fréquemment utilisé dans la

---

(*) Reçu en février 1989, révisé en février 1990.
(1) LEIS, École Centrale Paris, 92295 Chatenay-Malabry Cedex, France.
(2) GERAD et École Polytechnique, 5255 avenue Decelles, Montréal, Canada H3T1V6.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/90/03 217 28/$ 4.80

littérature scientifique. De même, nous désignerons par PTV (Problème de Tournées de Véhicules) le cas où les fenêtres de temps ont une largeur infinie.

L'utilisation des modèles mathématiques d'optimisation des tournées de véhicules, a été l'un des plus beaux succès de la Recherche Opérationnelle au cours de la dernière décade. Une fructureuse collaboration entre les spécialistes de la Programmation Mathématique et de l'Optimisation Combinatoire d'une part, et les praticiens d'autre part, s'est traduite par un nombre impressionnant d'implantations réussies de systèmes informatiques d'optimisation des tournées de véhicules (Golden et Assad, 1988).

L'intérêt du recours aux méthodes de la Recherche Opérationnelle pour l'optimisation des activités de transport, est motivé par le fait que l'une des principales préoccupations des entreprises industrielles est d'améliorer l'efficacité de leurs chaînes logistiques, pour pouvoir organiser au moindre coût et au meilleur service rendu, la continuité et la fluidité de l'écoulement de leurs marchandises. Cet intérêt est justifié par l'importance des coûts de distribution. Selon une étude citée par Keymolen (1988), dans de nombreuses entreprises ces coûts représentent environ 30 % du chiffre d'affaires. Cette somme est très importante, et représente souvent une charge extrêmement lourde pour des entreprises appartenant à presque tous les secteurs industriels. Bodin *et al.* (1983) estiment les coûts annuels de distribution à 400 milliards de dollars, rien que dans un seul pays, à savoir les États-Unis.

Outre leur intérêt pratique, les modèles de tournées de véhicules ont été également appliqués à d'autres domaines n'ayant apparemment aucun rapport avec la gestion des véhicules. Des applications effectives ont eu lieu en ordonnancement d'atelier, où certaines situations peuvent être modélisées d'une manière identique à celle des problèmes de tournées. Ainsi, à titre d'exemple, le problème de recherche de séquences optimales de production sur plusieurs machines parallèles avec des coûts de lancement variables a été résolu par Parker *et al.* (1977) à l'aide d'un algorithme de résolution des problèmes de tournées. De même, des problèmes de fabrication d'horaires de travail (Desrochers, 1986), ou d'optimisation des réseaux de télécommunications (Sanso *et al.*, 1988) ont été également résolus par des algorithmes conçus à l'origine pour la résolution des problèmes de tournées.

Les modèles d'optimisation des tournées de véhicules ont également une importance théorique fondamentale. Le modèle de base est appelé « Problème du voyageur de commerce », il consiste à trouver la tournée optimale d'un commis voyageur désirant visiter un ensemble de clients (le nom original de ce problème serait dû probablement à A. W. Tucker, et daterait depuis le début des années 30; voir à ce propos le premier chapitre de l'ouvrage de

Lawler *et al.*, 1985). Ce problème se trouve au cœur même d'une importante branche des mathématiques, qui est l'Optimisation Combinatoire (Christofides *et al.*, 1979). La recherche de méthodes efficaces de résolution des problèmes de tournées de véhicules, a été à l'origine d'importants développements en Programmation Mathématique et en Optimisation Combinatoire, par la mise au point, l'analyse, et l'implantation d'algorithmes et d'heuristiques de plus en plus performants, pour résoudre des problèmes toujours plus complexes. Ainsi, à titre d'exemple, un système d'optimisation de la distribution des gaz industriels résout couramment des programmes mathématiques en variables mixtes, contenant jusqu'à 800 000 variables et 200 000 contraintes. Les solutions proposées sont souvent très proches de l'optimum. L'utilisation de ce système a permis une économie des coûts d'opérations de 6 à 10 % (Bell *et al.*, 1983).

Dans le présent article, nous étudions le problème de tournées avec fenêtres de temps. Cette terminologie désigne le cas où les visites aux clients (ou aux fournisseurs) ne sont autorisées que dans des intervalles horaires précis. Ce type de situations est fréquent par exemple dans le cas de la distribution aux hypermarchés, lesquels traitent en général avec plusieurs milliers de fournisseurs différents, et sont obligés d'imposer l'heure de livraison des commandes, pour pouvoir préparer correctement la réception des marchandises. Nous nous intéressons particulièrement à ce problème, à cause de son haut degré de réalisme, et parce qu'il représente une situation souvent rencontrée en milieu industriel.

Les premiers travaux relatifs au PTVFT, datent de la fin des années 1960, et se limitaient à des études de cas résolus par des méthodes heuristiques (Pullen et Webb, 1967, et Knight et Hofer, 1968).

Au cours des dernières années nous avons pu assister à un nombre extraordinaire de travaux portant sur les aspects les plus divers de la modélisation, et des algorithmes de résolution du PTVFT. Notre but est d'analyser les différentes approches mises en œuvre, et d'essayer de dresser un bilan de ces travaux. Par ailleurs, nous éviterons autant que possible de revenir sur des points déjà traités dans d'autres articles.

Une revue exhaustive des problèmes de tournées de véhicules est donnée par Bodin *et al.* (1983). On pourra également se référer au récent ouvrage de Golden et Assad (1988). Magnanti (1981) donne les principales formulations de base, et les algorithmes de résolution des problèmes de tournées. Laporte et Norbert (1987) font le point sur les algorithmes exacts permettant la résolution du PTV, Solomon et Desrosiers (1988 *a*) font une revue de plusieurs problèmes de tournées (et d'autres problèmes d'optimisation) avec fenêtres de temps, et Desrochers *et al.* (1988) présentent également une revue des méthodes d'optimisation et d'approximation de divers problèmes de tournées avec fenêtres de temps.

Le plan de cet article est le suivant : nous commencerons par exposer les différentes formulations mathématiques de base du PTVFT, puis nous traiterons des méthodes exactes et des méthodes approchées de résolution, enfin, nous présenterons une conclusion ou nous essaierons de dégager quelques éléments de réflexions concernant les futurs axes de recherche dans ce domaine.

1. FORMULATIONS MATHÉMATIQUES

Nous allons dans cette partie présenter les principales formulations de base du PTVFT.

Ces formulations sont en fait les mêmes que celles utilisées pour le PTV, sauf que nous incluons à chaque fois les contraintes horaires. Elles ne seront donc pas détaillées, puisqu'elles sont largement décrites dans la littérature (le lecteur pourra se référer à l'article de Magnanti, 1981). Il existe trois formulations de base : problème de partitionnement, problème de flot, et problème d'affectation généralisé.

Pour toute la suite de notre exposé, nous supposons qu'on dispose d'une flotte de K véhicules domiciliés dans un même dépôt. Un véhicule k est caractérisé par une capacité maximale D_k, et par un coût fixe F_k, s'il est utilisé.

Ces véhicules doivent visiter n clients à partir du dépôt et y retourner. Nous attribuons au dépôt l'indice 0 et au reste des clients les indices $1 \ldots n$. Un client i est caractérisé par sa localisation, sa demande (ou son offre) d_i, l'intervalle de temps $[a_i, b_i]$ pendant lequel il peut être visité, et par la durée du déchargement (ou chargement) μ_i chez ce client. La durée du plus court chemin entre les clients i et j est t_{ij} et le coût de ce parcours est c_{ij}.

1.1. Problème de partitionnement

Cette formulation traduit l'affectation optimale des clients à l'ensemble des tournées réalisables. Une tournée étant dite réalisable si elle satisfait aussi bien les contraintes de capacité que les contraintes horaires.

On introduit la notation suivante :

T_k : ensemble des tournées réalisables pour le véhicule k.

y_{rk} : variable binaire qui vaut 1 si la tournée r du véhicule k est effectuée, sinon 0.

a_{irk} : constante binaire qui vaut 1 si le client i est inclus dans la tournée r du véhicule k, sinon 0.

c_{rk} : coût de la tournée r du véhicule k. C'est la somme du coût fixe du véhicule et du coût de roulage.

La formulation mathématique est alors :

$$\operatorname{Min} \sum_{k} \sum_{r \in T_k} c_{rk} y_{rk} \tag{1}$$

sous les contraintes :

(PP)

$$\sum_{k} \sum_{r \in T_k} a_{irk} y_{rk} = 1, \qquad i = 1 \ldots n \tag{2}$$

$$y_{rk} = 0 \text{ ou } 1, \qquad r \in T_k, \quad k = 1 \ldots K. \tag{3}$$

La fonction objectif (1) consiste à minimiser le coût total d'exploitation (coûts fixes et coûts variables). La contrainte (2) indique que chaque client doit être visité exactement une fois. La contrainte (3) est la contrainte d'intégrité des variables de décision.

1.2. Problème de flot

Le problème de tournées avec contraintes horaires peut être formulé comme un problème de flot avec des contraintes additionnelles. Deux types de variables sont utilisées dans la formulation mathématique :

x_{ijk} : variable binaire qui vaut 1 si le véhicule k visite le client j à la suite du clieny i, sinon 0.

t_i : variable de temps, définie pour chaque client $i (i = 1 \ldots n)$, cette variable indique le temps de début d'opération (chargement/déchargement) chez le client i.

Le problème est alors formulé de la manière suivante :

$$\operatorname{Min} \sum_{j=1,\, n} \sum_{k} F_k x_{ojk} + \sum_{k} \sum_{i=0,\, n} \sum_{j=0,\, n} c_{ij} x_{ijk} \tag{4}$$

sous les contraintes :

$$\text{(PF)}\qquad \begin{aligned}
&\sum_{k}\sum_{j=0,\,n} x_{ijk}=1, \qquad i=1\ldots n, && (5)\\
&\sum_{j=0,\,n} x_{ijk}=\sum_{j=0,\,n} x_{jik}, \qquad i=1\ldots n, \quad k=1\ldots K && (6)\\
&\sum_{i=1,\,n} d_i(\sum_{j=0,\,n} x_{ijk})\leqq D_k, \qquad k=1\ldots K, && (7)\\
&x_{ijk}=1 \quad \Rightarrow \quad t_i+\mu_i+t_{ij}\leqq t_j \quad i,j=1\ldots n, \quad k=1\ldots K && (8)\\
&a_i\leqq t_i\leqq b_i, \qquad i=1\ldots n && (9)\\
&x_{ijk}=0 \text{ ou } 1, \qquad i,j=0\ldots n, \quad k=1\ldots K. && (10)
\end{aligned}$$

Le premier terme de la fonction objectif (4) correspond aux coûts fixes des véhicules, le second terme correspond aux coûts de roulage. Les contraintes (5) et (6) indiquent que chaque client doit être visité exactement une fois, et par un même véhicule. La contrainte (7) indique que la capacité d'un véhicule ne peut être dépassée. Les contraintes (8) et (9) sont les contraintes de fenêtres de temps. La contrainte (10) est la contrainte d'intégrité.

La contrainte (8) peut être remplacée par la contrainte linéaire suivante :

$$t_i+\mu_i+t_{ij}-t_j\leqq M_{ij}(1-\sum_k x_{ijk}) \tag{11}$$

avec

$$M_{ij}=b_i+\mu_i+t_{ij}-a_j.$$

Notez que si on n'avait pas les contraintes (9) et (11), la formulation obtenue est celle du PTV classique, sans les contraintes d'élimination des sous-tours.

Dans la formulation (PF), la contrainte (11) agit comme une contrainte d'élimination des sous tours, puisque si j est un successeur de i alors $t_i<t_j$, et on ne peut par conséquent avoir des sous-tours.

Remarquons que dans le cas particulier où $a_i=0$, $b_i=n-1$, $\mu_i=0$ et $t_{ij}=1$, pour tout i et j, la contrainte (11) devient :

$$t_i-t_j+n\sum_k x_{ijk}\leqq n-1, \qquad i,j=1\ldots n. \tag{12}$$

Nous retrouvons ainsi la contrainte d'élimination des sous-tours utilisée par Christofides *et al.* (1981 *a*) pour le PTV, et qui dérive de celle proposée par

Miller, Tucker et Zemlin (1960), pour le problème du voyageur de commerce. Ces contraintes ont été améliorées par Desrochers et Laporte (1989).

1.3. Problème d'affectation généralisé

Le PTVFT peut être vu comme constitué de deux sous-problèmes. Il s'agit d'une part de déterminer l'affectation optimale des clients aux véhicules, et d'autre part de déterminer la tournée optimale de chaque véhicule. Fisher et Jaikumar (1978) utilisent une formulation qui laisse apparaître ces deux composantes principales. Nous allons retrouver cette formulation en partant du modèle (PP).

Une tournée r du véhicule k doit satisfaire la contrainte de capacité. Nous avons donc :

$$\sum_{i=1,n} d_i \Big(\sum_{r \in k} a_{irk} y_{rk}\Big) \leqq D_k, \qquad k=1\ldots K, \tag{13}$$

Posons $z_{ik} = \sum_{r \in k} a_{irk} y_{rk}$. z_{ik} ne peut valoir 1 que dans le cas où y_{rk} et a_{irk} valent toutes les deux 1, c'est donc une variable binaire qui vaut 1 si le client i est visité par le véhicule k, sinon 0.

La contrainte de capacité s'écrit alors :

$$\sum_{i=1,\ n} d_i z_{ik} \leqq D_k, \qquad k=1\ldots K. \tag{14}$$

La contrainte (2) devient :

$$\sum_k z_{ik} = 1, \qquad i=1\ldots n. \tag{15}$$

Soit I_k l'ensemble des clients visités par le véhicule k, et soit $C(\mathrm{I}_k)$ le coût minimal de cette tournée.

La fonction objectif (1) devient :

$$\operatorname{Min} \sum_k C(I_k). \tag{16}$$

La nouvelle formulation du problème est alors :

$$\operatorname{Min} \sum_k C(I_k) \tag{17}$$

sous les contraintes :

$$\sum_k z_{ik} = 1, \qquad i = 1 \ldots n \tag{18}$$

$$\sum_i d_i z_{ik} \leqq D_k, \qquad k = 1 \ldots K \tag{19}$$

$$z_{ik} = 0 \text{ ou } 1, \qquad i = 1 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K. \tag{20}$$

Nous formulons ainsi le PTVFT comme un problème d'affectation généralisé. Ce problème n'est pas linéaire car la fonction objectif (17) n'est pas linéaire.

Si nous utilisons des variables de flot x_{ijk}, définies de la même manière que dans le modèle (PF), nous avons alors :

$$C(I_k) = \sum_{i=0,\, n} \sum_{j=0,\, n} c_{ijk} x_{ijk}, \qquad k = 1 \ldots K. \tag{21}$$

Pour un véhicule k donné, les variables x_{ijk} définissent un circuit hamiltonien respectant les contraintes horaires.

Si nous introduisons les variables de temps t_i, nous pouvons alors reformuler notre problème sous forme du programme mathématique linéaire suivant :

$$\text{Min} \sum_k \sum_{i=0,\, n} \sum_{j=0,\, n} c_{ij} x_{ijk} \tag{22}$$

sous les contraintes :

(PAG)

$$\sum_k z_{ik} = 1, \qquad i = 1 \ldots n \tag{23}$$

$$\sum_i d_i z_{ik} \leqq D_k, \qquad k = 1 \ldots K \tag{24}$$

$$z_{ik} = 0 \text{ ou } 1, \qquad i = 1 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K \tag{25}$$

$$\sum_{i=1,\, n} x_{ijk} = z_{jk}, \qquad j = 0 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K \tag{26}$$

$$\sum_{j=1,\, n} x_{ijk} = z_{ik}, \qquad i = 0 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K \tag{27}$$

$$t_i + \mu_i + t_{ij} - t_j \leqq M_{ij}(1 - x_{ijk}) \quad i, j = 1 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K \tag{28}$$

$$a_i \leqq t_i \leqq b_i, \qquad i = 1 \ldots n \tag{29}$$

$$x_{ijk} = 0 \text{ ou } 1, \qquad i, j = 0 \ldots n, \quad k = 1 \ldots K \tag{30}$$

Le modèle (PAG) fait bien apparaître deux problèmes largement étudiés dans la littérature. Il s'agit d'une part du problème d'affectation généralisé [contraintes (23)-(25)], et d'autre part, le problème du voyageur de commerce avec fenêtres de temps [contraintes (26)-(30)].

2. ALGORITHMES EXACTS

Le PTVFT appartient à la grande famille des problèmes NP-durs par réduction au classique problème des m-voyageurs de commerce m-PVC. Il s'agit d'un problème particulièrement difficile à résoudre d'une manière exacte puisque même si la flotte de véhicules est connue, Savelsbergh (1985) montre que le problème qui consiste à trouver une solution réalisable est lui même NP-dur. Ceci explique peut être le fait que le PTVFT a reçu bien moins d'attention que le PTV pour lequel il existe maintenant un certain nombre d'algorithmes optimaux (*voir* à ce propos Laporte et Norbert, 1987).

Néanmoins, il existe certaines méthodes de résolution du même problème mais sans contraintes de capacité. Ce problème est connu dans la littérature comme celui des m-voyageurs de commerce avec fenêtres de temps (m-PVCFT). La majorité de ces algorithmes ont été développés pour optimiser le transport scolaire.

Dans les paragraphes qui suivent nous allons passer en revue les algorithmes qui permettent de résoudre d'une manière exacte le m-PVCFT et le PTVFT.

2.1. Problèmes sans contraintes de capacité

Tous les algorithmes optimaux proposés pour résoudre le m-PVCFT sont basés sur la procédure de séparation et évaluation progressives. Ils diffèrent par les techniques utilisées pour le calcul d'une borne inférieure de la solution optimale du problème, et par les stratégies de branchement aux différents nœuds de l'arbre de résolution.

Les différentes bornes inférieures obtenues sont la solution de diverses relaxations du problème initial. Trois types d'approches ont ainsi été mises en œuvre : résolution du problème de partitionnement par la programmation linéaire généralisée, relaxation des contraintes de fenêtres de temps, et relaxation lagrangienne.

Deux types de formulations ont été utilisées :

(i) Problème de partitionnement :

$$\text{Min} \sum_{r \in T} c_r y_r \tag{31}$$

sous les contraintes :

(PP*)

$$\sum_{r \in T} a_{ir} y_r = 1, \qquad i = 1 \ldots n \tag{32}$$

$$y_r = 0 \text{ ou } 1, \qquad r \in T. \tag{33}$$

(ii) Problème de flot :

$$\text{Min} \sum_{j=1,\, n} F x_{0j} + \sum_{i=1,\, n} \sum_{j=1,\, n} c_{ij} x_{ij} \tag{34}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=0,\, n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1 \ldots n \tag{35}$$

(PF*)

$$\sum_{j=0,\, n} x_{ij} = \sum_{j=0,\, n} x_{ji}, \qquad i = 1 \ldots n \tag{36}$$

$$t_i + \mu_i + t_{ij} - t_j \leqq M_{ij}(1 - x_{ij}), \qquad i, j = 1 \ldots n \tag{37}$$

$$a_i \leqq t_i \leqq b_i, \qquad i = 1 \ldots n \tag{38}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ ou } 1, \qquad i, j = 0 \ldots n. \tag{39}$$

Les variables de décision, les contraintes et les fonctions objectifs des modèles (PP*) et (PF*) ont des significations respectivement identiques à celles des modèles (PP) et (PF).

2.1.1. *Résolution du m-PVCFT par la programmation linéaire généralisée*

Cet algorithme a été mis en œuvre par Desrosiers *et al.* (1984) pour résoudre le problème de ramassage scolaire. Pour obtenir une borne inférieure de (PP*), on relaxe la contrainte d'intégrité, on appelle (PP′) le nouveau problème ainsi obtenu. Une colonne de (PP′) représente une tournée réalisable. A cause du très grand nombre de tournées réalisables, il est pratiquement impossible de les expliciter en vue de résoudre (PP′) par la méthode classique du simplexe. La résolution d'un tel problème peut être faite par la programmation linéaire généralisée en utilisant un algorithme de génération de colonnes. Cette méthode ne diffère de l'algorithme classique du simplexe que par le mode de sélection de la variable entrant dans la base : ce choix se fait non pas par énumération complète de toutes les variables hors base et calcul de leurs coûts marginaux, mais grâce à une procédure permettant de déterminer directement la variable de coût marginal minimal (*cf.* Lasdon, 1970 ou Minoux, 1983).

L'idée d'appliquer la programmation linéaire généralisée aux problèmes de tournées formulés comme étant des problèmes de partionnement date de la fin des années 1960. Rao et Zionts (1968) l'on utilisé en transport maritime, Foster et Ryan (1976) montrent que son utilisation permet de fournir de « bonnes » solutions réalisables, Orloff (1976) discute son utilisation en transport scolaire, et Agarwal *et al.* (1989) l'utilise pour résoudre le problème de tournées avec des contraintes de capacité.

L'efficacité de la technique de génération de colonnes vient d'être encore une fois prouvée par Ribeiro *et al.* (1989), qui ont résolu d'une manière exacte un problème de partitionnement contenant 15! colonnes (soit environ $1{,}3 . 10^{12}$ colonnes). Il s'agit-là, à notre connaissance, du plus grand problème en nombre entiers jamais résolu.

Dans le cas du *m*-PVCFT, une colonne de coût marginal minimal est obtenue après la résolution d'un problème de plus court chemin avec contraintes de fenêtres de temps. Haouari *et al.* (1988) montrent que ce problème est NP-dur. Il est résolu par programmation dynamique grâce à une généralisation de l'algorithme classique de Ford-Bellman (Desrosiers *et al.*, 1983). Le branchement n'est pas effectué sur les variables binaires y_r (qui seraient fixées à 0 ou à 1), mais sur les parcours interclients formant cette tournée. Cette même stratégie a été utilisée par Bellmore et Malone (1971) pour résoudre le problème du voyageur de commerce. Fréquemment, seuls quelques nœuds sont explorés, et assez souvent des solutions entières sont obtenues spontanément. Plusieurs tests numériques montrent que cette approche est particulièrement efficace pour résoudre des problèmes avec des fenêtres de temps relativement larges.

2.1.2. *Relaxation des fenêtres de temps*

En relaxant les contraintes horaires (37) et (38), nous obtenons un problème de flot à coût minimum. Le graphe considéré est $G=(X, A)$ ou X est constitué par l'ensemble des clients et par deux nœuds supplémentaires s et t, représentant respectivement la sortie et l'entrée du dépôt. Un arc (i, j) appartient à A si la relation suivante est vérifiée :

$$a_i+\mu_i+t_{ij}\leq b_j. \tag{40}$$

La solution du problème de flot constitue une borne inférieure de la solution optimale de (PF*), et peut donc être insérée dans une procédure de séparation et évaluation progressives. Des branchements sont effectués pour assurer la réalisabilité des contraintes horaires et assurer l'élimination des sous-tours.

Desrosiers *et al.* (1986), ont appliqué cette relaxation pour résoudre un problème de transport scolaire.

Deux stratégies de branchements ont été utilisées. La première consiste à faire les branchements sur les variables de flots, et la seconde consiste à effectuer les branchements sur les partitions des fenêtres de temps. Cette dernière méthode s'est avérée supérieure à la première pour les fenêtres de temps relativement larges (*voir* à ce propos Desrosiers *et al.*,, 1985).

Néanmoins, la qualité des bornes est altérée dès que le nombre de clients augmente ou les fenêtres de temps deviennent plus larges. Ceci a conduit à simplifier le problème pour ne considérer dans la fonction objectif que le nombre de véhicules.

2.1.3. *Relaxation lagrangienne*

Les techniques de relaxation lagrangienne sont d'utilisation très courante en optimisation combinatoire (Fisher, 1981). De nombreux problèmes de tournées de véhicules peuvent être efficacement résolus par ces techniques (Fisher, 1987). Desrosiers *et al.* (1988) les ont utilisées pour résoudre le problème de transport scolaire. Ils utilisent la formulation (PF*), mais incluent dans le modèle deux contraintes redondantes, qui ne le sont plus après la relaxation. Ces contraintes sont :

$$\sum_{j=0,\ n} x_{0j} = n. \tag{41}$$

$$\sum_{j=0,\ n} x_{i0} = n. \tag{42}$$

Deux types de relaxations ont été testées. La première a porté sur la contrainte horaire (37). La résolution du problème dual ainsi obtenu donne une solution égale à celle donnée par la relaxation linéaire de (PF*), puisque dans ce cas la propriété d'intégrité est vérifiée (Geoffrion, 1974).

La deuxième relaxation testée a porté sur la contrainte de visiter chaque client exactement une fois (35). La résolution de ce problème donne une solution identique à celle de la relaxation continue du problème de partitionnement (PP*). Les tests numériques montrent que cette seconde relaxation est supérieure à la première.

Une autre technique a également été testée. Il s'agit de la relaxation lagrangienne augmentée. Dans ce cas un terme de pénalité quadratique est ajouté à la fonction de Lagrange (Bertsekas, 1982).

La relaxation a porté sur la contrainte (35). Le problème dual ainsi obtenu est un programme quadratique, sa résolution est effectuée grâce à l'algorithme Frank-Wolfe (1956).

Les tests numériques de Desrosiers *et al.* (1988), montrent que cette technique donne des bornes inférieures meilleures que les autres. Elle a été utilisée pour déterminer la taille optimale de la flotte de véhicules, et a permis la résolution de problèmes de grande taille, où le nombre de points à visiter atteint 223.

2.2. Problèmes avec contraintes de capacité

Dans ce qui suit nous essayerons de décrire les différentes approches qui ont été mises en œuvre pour résoudre le PTVFT jusqu'à l'optimalité. Il s'agit de la programmation dynamique, la décomposition de Benders, la décomposition lagrangienne, et la programmation linéaire généralisée.

2.2.1. *Programmation dynamique et relaxation de l'espace d'états*

Il est parfaitement connu que seuls un très petit nombre de problèmes d'optimisation combinatoire peuvent être résolus par la programmation dynamique. L'explosion du nombre d'états rend l'utilisation de cette technique prohibitive en temps de calcul. La relaxation de l'espace d'états est une méthode efficace de réduction du nombre d'états.

Cette technique a été introduite par Christofides *et al.* (1981 *b*), elle fournit une borne inférieure de la solution optimale. Cette borne peut alors être utilisée dans une procédure de séparation et évaluation progressives. Kolen *et al.* (1987) ont appliqué la méthode de relaxation de l'espace d'états pour résoudre le PTVFT. A notre connaissance, il s'agit du premier algorithme exact publié, résolvant le PTVFT, et qui soit accompagné de résultats numériques.

L'idée de relaxation de l'espace d'états est la suivante : considérons la relation de récurrence d'un programme dynamique quelconque :

$$f_{0,\,i}(0, j) = \min_{k \in \Omega^{-1}(j)} (f_{0,\,i-1}(0, k) + c_i(k, j)) \tag{43}$$

ou $f_{0,\,i}(0, j)$ est le coût de changer le système de l'état 0 à l'étape 0, à l'état j à l'étape i, $\Omega^{-1}(j)$ est l'ensemble de tous les états à partir desquels on peut atteindre directement l'état j, et $c_i(k, j)$ est le coût de changer le système de l'état k à l'étape $i-1$ à l'état j à l'étape i.

Soient S l'espace d'états associé au problème, $g(\ .\ )$ une application définie de S vers un espace d'états G, de cardinalité beaucoup plus faible que celle de S, et soit un ensemble $F^{-1}(g(j))$ satisfaisant :

$$k \in \Omega^{-1}(j) \quad \Rightarrow \quad g(k) \in F^{-1}(g(j)). \tag{44}$$

La relation de récurrence (43) devient alors :

$$f_{0,\,i}(g(0), g(j)) = \operatorname*{Min}_{t \in F^{-1}(g(j))} (f_{0,\,i-1}(g(0), t) + \tau_i(t, g(j))) \tag{45}$$

où $\tau_i(t, g(j)) = \text{Min}\ (c_i(k, l) : g(k) = t, g(j) = g(l))$ (46)

Il en résulte la relation :

$$f_{0,\,i}(g(0), g(j)) \leqq f_{0,\,i}(0, i). \tag{47}$$

Cette relation montre que la formule de récurrence appliquée dans l'espace d'états G, qui est « l'image » de S par $g(\ .\ )$, fournit une borne inférieure de la solution optimale.

En général, la relaxation de l'espace d'états est intéressante, si l'application $g(\ .\ )$ satisfait les conditions minimales suivantes :

(i) $F^{-1}(\ .\ )$ est facile à déterminer.

(ii) L'optimisation de (46) doit être faite sur un domaine réduit, où la détermination d'une borne inférieure de $\tau_i(t, g(j))$ doit être aisée.

En utilisant cette méthode, Kolen *et al.* (1987) ont généralisé aux fenêtres de temps, la notion de relaxation des q-plus courts chemins (*i. e.* chemins sur lesquels la demande totale vaut q), introduite par Christofides *et al.* (1981 *b*) pour résoudre le PTV.

Les plus grands problèmes résolus par cet algorithme, sont ceux d'une flotte de 3 ou 4 véhicules identiques, visitant respectivement un ensemble de 15 ou 14 clients, avec des fenêtres de temps assez étroites.

2.2.2. *Décomposition de Benders*

La décomposition de Benders, appelée également décomposition par partitionnement des variables, s'applique aux programmes mathématiques ne comportant que des variables couplantes, c'est-à-dire, ayant la structure générale suivante :

$$\text{Min}\ Z = CX + FY \tag{48}$$

sous les contraintes :

$$AX + BY \geqq D \tag{49}$$

$$X \geqq 0, \ Y \in S \tag{50}$$

où A est une matrice (m, n), B est une matrice (m, p), C et X sont des n-vecteurs, Y et F sont des p-vecteurs, D est un m-vecteur, et S est un sous-ensemble de R^p.

A l'origine, cette méthode a été utilisée pour résoudre des problèmes mixtes avec certaines variables continues et d'autres discrètes (Benders, 1962). L'idée générale de la méthode consiste à fixer la valeur de Y, puis à résoudre le programme linéaire en X, obtenant ainsi une « meilleure » valeur de Y, etc. Pour une présentation détaillée de l'algorithme, on pourra se référer à l'ouvrage classique de Lasdon (1970) ou à Minoux (1983).

Fisher et Jaikumar (1978) utilisent la formulation (PAG) pour résoudre le PTVFT grâce à la décomposition de Benders.

Ils proposent de résoudre tour à tour, un problème d'affectation généralisé, et un problème du voyageur de commerce avec fenêtres de temps. Chaque problème du voyageur de commerce est résolu par une méthode de coupes dans le but d'obtenir des valeurs duales optimales définissant un sous-gradient de $C(I_k)$. Par la suite ils résolvent le problème d'affectation généralisé, en approximant la fonction objectif par une combinaison linéaire des sous-gradients.

Ils réitèrent de cette manière, jusqu'à ce qu'ils aboutissent à une solution optimale ou sub-optimale.

Sur le plan théorique, cette approche peut être intéressante pour résoudre des problèmes de tournées plus complexes. Plusieurs types de contraintes supplémentaires de type « sac à dos » peuvent être intégrées dans la sous-structure « problème d'affectation généralisé ». A titre d'exemple, nous pouvons citer le cas où pour un véhicule donné, il existe plusieurs restrictions de capacités, relatives à divers types de produits transportés.

D'autres types de contraintes peuvent également être intégrées dans la sous-structure « problème du voyageurs de commerce ». Ainsi, si les tournées doivent vérifier des contraintes de précédence (*i.e.* des clients doivent être obligatoirement visités avant d'autres), nous aurons à résoudre un problème du voyageur de commerce avec des contraintes de fenêtres de temps et de précédence. Keymolen (1988) résout ce problème par un algorithme de coupes qui peut donc être utilisé.

D'un point de vue pratique, l'approche peut être utile pour obtenir de « bonnes » solutions réalisables. D'autre part, comme la méthode utilise deux sous-problèmes parmi les plus étudiés par les spécialistes de l'optimisation combinatoire, elle peut directement profiter de toutes les avancées réalisées pour mieux résoudre ces deux sous-problèmes.

2.2.3. *Décomposition lagrangienne*

Plusieurs programmes mathématiques discrets contiennent des sous-structures spéciales. Il est possible d'introduire dans ces problèmes une structure décomposable en remplaçant les variables initiales par des copies dans chacun des sous-ensembles de contraintes sauf un, et de dualiser les conditions d'identité entre originaux et copies. Ainsi, nous décomposons le problème initial en autant de sous-problèmes qu'il y avait de sous-structures. Ce type d'approches, appelé décomposition lagrangienne, a été étudié pour la première fois par Minoux (1982), dans le cas particulier du problème du plus court chemin avec deux contraintes, puis a été généralisé par Jörnsten *et al.* (1985) et Guignard et Kim (1987). Jörnsten *et al.* (1986) ont utilisé la décomposition lagrangienne pour résoudre le PTVFT. Dans leur formulation le nombre de véhicules est fixé à K. Ils utilisent une formulation de type « problème d'affectation généralisé » légèrement différente du modèle (PAG). Nous allons retrouver leur formulation en partant du modèle (PF).

Posons

$$z_{ik}=\sum_{j=0,\ n} x_{ijk}, \qquad i=1\ldots n, \quad k=1\ldots K.$$

Il est clair que z_{ik} a la même signification que dans le modèle (PAG). Les contraintes (5) et (7) deviennent alors :

$$\sum_{k} z_{ik}=1, \qquad i=1\ldots n \tag{51}$$

$$\sum_{i=1,\ n} d_i z_{ik} \leqq D_k, \qquad k=1\ldots k. \tag{52}$$

Le nombre de véhicules est imposé égal à K. Nous allons donc :

$$\sum_{i=1,\ n} x_{o\,i\,k}=\sum_{i=1,\ n} x_{i\,o\,k}=1, \qquad k=1\ldots K, \tag{53}$$

Le problème est alors formulé de la manière suivante :

$$\operatorname{Min}\sum_{k}\ \sum_{i=0,\ n}\ \sum_{j=0,\ n} c_{ij}x_{ijk} \tag{54}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{j=0,\ n} x_{ijk} = \sum_{j=0,\ n} x_{jik}, \qquad i=1 \ldots n, \quad k=1 \ldots K \tag{55}$$

$$\sum_{j=0,\ n} x_{jok} = \sum_{j=0,\ n} x_{0jk} = 1, \qquad k=1 \ldots K \tag{56}$$

$$t_i + \mu_i + t_{ij} - t_j \leqq M_{ij}(1 - x_{ijk}), \qquad k=1 \ldots K, \quad i, j=1 \ldots n \tag{57}$$

$$a_i \leqq t_i \leqq b_i, \qquad i=1 \ldots n \tag{58}$$

$$x_{ijk} = 0 \text{ ou } 1, \qquad k=1 \ldots K, \quad i, j=0 \ldots n \tag{59}$$

$$\sum_{i=1,\ n} d_i z_{ik} \leqq D_k, \qquad k=1 \ldots K \tag{60}$$

$$\sum_k z_{ik} = 1, \qquad i=1 \ldots n \tag{61}$$

$$z_{ik} = 0 \text{ ou } 1, \qquad i=0 \ldots n, \quad k=1 \ldots K \tag{62}$$

$$\sum_{j=0,\ n} x_{ijk} = z_{ik}, \qquad i=0 \ldots n, \quad k=1 \ldots K. \tag{63}$$

On remarquera que les contraintes (55)-(59) ne font intervenir que les variables x_{ijk} et t_i seulement, alors que les contraintes (60)-(62) ne font intervenir que les variables z_{ik}. La contrainte (63) agit comme une contrainte de couplage des deux sous-structures.

Jörnsten *et al.* (1986) appliquent la décomposition lagrangienne, en dualisant la contrainte de couplage (63), et en utilisant des multiplicateurs de Lagrange u_{ik}, ils obtiennent de cette façon deux sous-problèmes. Le premier est le problème des K-plus courts chemins avec contraintes de fenêtres de temps, et le second est le problème d'affectation généralisé.

2.24. *Résolution du PTVFT par la programmation linéaire généralisée*

Haouari et Dejax (1988) ont formulé le PTVFT en tant que problème de partitionnement, et l'ont résolu par un algorithme de séparation et évaluation progressives. A la différence des différents travaux qui viennent d'être précédemment décrits, ils se sont placés dans le cas plus général (et plus réaliste) où on peut disposer d'une flotte hétérogène de véhicules ayant des coûts fixes et des capacités différents. Ils déterminent ainsi la composition optimale de la flotte, l'affectation des clients aux véhicules, la tournée effectuée par chaque véhicule, ainsi que les horaires de ces tournées. L'objectif consiste à assurer le service demandé tout en minimisant l'ensemble des coûts (fixes et variables). Leur algorithme peut être vu comme une extension de celui de Desrosiers *et al.* (1984). Cette généralisation a été rendue possible grâce notamment au fait que la contrainte de capacité peut être exprimée d'une manière identique à celle des fenêtres de temps, et aussi par une construction spéciale du graphe, qui permet de prendre en compte efficacement les coûts fixes des véhicules. Les tests numériques montrent qu'en utilisant cette approche il est possible de résoudre d'une manière optimale des problèmes de grande taille (jusqu'à 80 clients) fortement contraints, *i.e.* avec des fenêtres de temps relativement étroites (Haouari et Dejax, 1989 *a*). Cette même approche a également été utilisée indépendamment par Desrosiers *et al.* (1989) pour résoudre le cas où la flotte est homogène.

3. HEURISTIQUES

A ce niveau de notre exposé, nous abordons la discussion sur les heuristiques. Nous entendons par heuristique toute approche pouvant être mise en œuvre pour obtenir une solution dont l'optimalité ne peut être (*a priori*) garantie.

Les récents développements de la théorie de l'optimisation combinatoire ont grandement enrichi les heuristiques, ce qui s'est concrètement traduit par un nombre impressionnant de cas d'applications réussies (Fisher et Rinnoy Kan, 1988).

Dans ce qui suit nous traitons des méthodes qui ont été utilisées pour résoudre d'une manière approximative les problèmes de tournées avec fenêtres de temps.

3.1. Heuristiques basées sur la programmation mathématique

Dans ce type de méthodes on simplifie le programme mathématique initial pour pouvoir le résoudre aisément (Ball et Magazine, 1981). La grande efficacité de l'heuristique proposée par Fisher et Jaikumar (1981) pour résoudre le PTV montre que ce type d'approche peut être très utile. Plusieurs auteurs ont utilisé ce type d'approche pour dériver des heuristiques pouvant traiter les contraintes de fenêtres de temps.

La difficulté de résoudre le problème de tournées avec fenêtres de temps est essentiellement due au fait que la formulation mathématique de base (problème de flot) fait intervenir des variables continues et des variables discrètes.

Une méthode approchée de résolution consiste à discrétiser les intervalles de temps et à associer à chaque variable horaire t_i un ensemble de variables binaires indiquant la période où le point i sera visité. Le programme ainsi obtenu est linéaire et en nombres entiers. Cette approche a été utilisée pour résoudre le *m*-PVCFT. Levin (1971) a utilisé cette heuristique en transport aérien, Gertsbakh et Stern (1978) l'ont utilisé en ordonnancement d'atelier, et Swersey et Ballard (1984) l'ont utilisé en transport scolaire. Ils obtiennent fréquemment une solution optimale en résolvant avec l'algorithme du simplexe le problème sans la contrainte d'intégrité. Ce résultat n'a pu être obtenu qu'en limitant la fonction objectif au seul nombre de véhicules.

Le second type d'heuristiques basées sur la programmation mathématique, consiste en une adaptation de l'heuristique en deux phases de Fisher et Jaikumar (1981).

Savelsbegh (1989) a présenté une telle méthode. La première phase de l'algorithme consiste à affecter les clients aux véhicules, ce qui nécessite la résolution d'un problème d'affectation généralisée. La définition de ce problème est faite en tenant compte des aspects temporels. La deuxième phase de l'algorithme consiste à construire les différentes tournées, l'algorithme d'amélioration locale (Savelsbegh, 1985) est alors utilisé pour obtenir une bonne solution initiale. La même approche générale (*i.e.* problème d'affectation généralisée) a également été utilisée par Koskosidis *et al.* (1989) pour résoudre une nouvelle version du problème de tournées avec contraintes de capacité et de fenêtres de temps. Dans cette nouvelle version les contraintes sont dites « douces ». Ces contraintes sont imposées à l'aide d'une fonction de pénalité sur l'heure de visite au client. Après la résolution du problème d'affectation généralisé, les clients de chaque véhicule sont ordonnancés en utilisant un algorithme pour le problème du voyageur de commerce avec fenêtres de temps « douces ».

3.2. Généralisation des heuristiques du PTV

De nombreuses heuristiques ont été conçues pour résoudre les problèmes de tournées sans contraintes horaires. Ces heuristiques sont revues d'une manière exhaustive par Bodin *et al.* (1983).

D'un point de vue pratique, ces heuristiques sont très intéressantes car elles utilisent des concepts souvent simples et faciles à mettre en œuvre. D'autre part elles permettent la prise en compte de contraintes additionnelles (flotte hétérogène, limite de capacité, etc.) qui enrichissent le modèle employé et fournissent des solutions qui soient à la fois réalistes et économiquement satisfaisantes.

Solomon (1987) a généralisé plusieurs parmi ces heuristiques pour résoudre le PTVFT. Les heuristiques qu'il a généralisé sont les suivantes :

(i) L'heuristique de Clark et Wright (1964).

Dans sa forme de base cette heuristique est initialisée avec n véhicules visitant chacun un client. A chaque nouvelle itération, on calcule l'économie qui résulte de la liaison de deux clients terminaux (en fin de route), et on relie la paire de routes qui réalise l'économie maximale. Le processus est réitéré jusqu'à ce qu'aucune amélioration ne soit plus possible.

Cette heuristique est adapté au PTVFT en vérifiant avant chaque liaison si les contraintes horaires sont satisfaites.

(ii) L'heuristique du plus proche voisin.

Cette heuristique initialise une route par le client le plus proche du dépôt, non encore desservi par aucun véhicule. A chaque itération, on inclut dans la route courante le client le plus proche non encore desservi. Dès que la capacité limite est atteinte, une nouvelle route est initialisée.

Dans le problème avec fenêtres de temps, la mesure utilisée pour évaluer la « distance » est à deux dimensions : spatiale et temporelle.

(iii) L'heuristique d'insertion.

Il s'agit d'une généralisation aux contraintes horaires de l'heuristique de Mole et Jameson (1976). Elle ne diffère de l'heuristique du plus proche voisin que par le fait qu'un nouveau client n'est pas systématiquement rattaché à l'une des extrémités d'une route, mais qu'il peut être inséré entre deux clients déjà desservis.

(iv) L'heuristique de Gillet et Miller (1974).

Cette heuristique est la plus représentative des procédures qui accordent la priorité au regroupement avant la confection des tournées (Cluster first, route second).

Elle consiste à effectuer un balayage rotatif autour du dépôt, pris comme pivot. Chaque client rencontré est affecté à la tournée en cours de construction. Dès que la contrainte de capacité est violée, une nouvelle tournée est initialisée.

A cause des fenêtres de temps il est possible d'avoir dans un même secteur des clients qui ne peuvent être desservis ensemble par un même véhicule. Solomon (1987) propose d'appliquer l'heuristique une seconde fois à tous les clients qui n'ont pu être dessservis la première fois.

Pour la confection des tournées, il utilise une heuristique d'insertion, mais l'efficacité de l'heuristique serait certainement meilleure si on utilisait un algorithme du voyageur de commerce avec fenêtres de temps (Christofides *et al.*, 1981 *b*, et Baker, 1983). Il est à noter que Van Landegham (1988) a obtenu indépendamment des algorithmes semblables.

L'analyse du comportement des heuristiques est d'une importance fondamentale aussi bien du point de vue théorique que pratique.

La connaissance préalable de la qualité des solutions est cruciale avant toute utilisation effective de l'heuristique. L'un des outils les plus couramment utilisés est « l'analyse du pire des cas » (Fisher, 1980). Cette analyse consiste à déterminer une borne supérieure de la déviation maximale de la solution approchée par rapport à la solution optimale.

Solomon (1986) a analysé les extensions précédemment décrites. Pour toutes ces heuristiques, la déviation maximale de la solution approchée par rapport à la solution optimale est bornée par une fonction linéaire de la taille du problème (soit, le nombre total de clients à visiter). Clairement, ceci indique que la qualité de la solution (au pire des cas) se dégrade d'une manière proportionnelle par rapport à la taille du problème.

Cependant, l'analyse du pire des cas des heuristiques n'est pas toujours très pertinente. Il n'est pas rare que des heuristiques ayant au pire des cas un comportement médiocre, donnent « en moyenne » des solutions « très proches » de l'optimum. Solomon (1987) a testé les heuristiques précédemment décrites [(i) à (iv)] sur un grand nombre de problèmes. Il a trouvé que l'heuristique d'insertion a une performance et une stabilité supérieure à toutes les autres.

Ceci peut s'expliquer par le fait que si on se rend compte que le PTVFT a deux composantes principales : il s'agit d'une part d'un problème d'affectation, et d'autre part d'un problème d'ordonnancement, c'est la seconde composante qui influe le plus sur la construction de la solution, et c'est l'heuristique d'insertion qui tient le mieux compte de cet aspect.

Récemment, Haouari *et al.* (1989 *b*) ont proposé et testé une nouvelle idée permettant la prise en compte efficace de l'aspect temporel du problème. Contrairement aux approches séquentielles classiques, ils construisent les tournées d'une manière « parallèle », dans la mesure où une nouvelle tournée peut être initialisée alors que d'autres ne sont pas encore complètes. Les tests numériques montrent que cette heuristique est encore plus efficace que l'heuristique d'insertion précédemment décrite.

On notera que jusqu'à présent, nous n'avons abordé dans notre discussion que les heuristiques qui consistent à construire de « bonnes » solutions. Il existe par ailleurs, une autre famille de méthodes qui cherchent à améliorer des solutions déjà existantes.

Nous n'avons trouvé dans la littérature que très peu d'articles traitant de ce second type d'heuristiques pour les problèmes de tournées avec fenêtres de temps. La difficulté principale provient du fait que les contraintes de fenêtres de temps, imposent une orientation à la tournée, ce qui rend difficile les procédures d'échange de voisinages. Savelsbergh (1985) propose une heuristique d'échange de voisinages visant à améliorer la solution du problème du voyageur de commerce avec fenêtres de temps. Cette procédure peut facilement être étendue au cas multivéhicules, et être utilisée avec les heuristiques de construction de tournées. Baker et Schaffer (1986) et Solomon *et al.* (1988 *b*) porposent des procédures d'amélioration des solutions approchées du PTVFT. Ces heuristiques sont des généralisations des heuristiques de Lin (1965), Lin et Kernighan (1973) et Or (1976). Thompson et Psaraftis (1989) ont défini et testé un nouveau type d'algorithmes d'amélioration locale pour la planification des tournées. Cet algorithme est basé sur un nouveau type de voisinage : les transferts cycliques. Un transfert cyclique est un transfert de clients entre plusieurs véhicules. L'application de cette approche au problème de tournée avec fenêtres de temps a permis d'obtenir de bons résultats en terme de qualité des solutions obtenues pour la majorité des problèmes testés. La comparaison des performances de la plupart des méthodes heuristiques citées dans cette section a été rendue aisée car elles ont été généralement testées sur la base de données proposée par Solomon (1987), comportant divers problèmes-tests de 100 clients.

3.3. Formules d'approximation continues

Ces approches consistent à proposer des expressions analytiques donnant une estimation de certaines grandeurs, telles que la longueur des tournées (Daganzo, 1984), la forme de la zone de distribution couverte par un véhicule de capacité finie (Newell et Daganzo, 1986 *a*, 1986 *b*, 1986 *c*), ou encore, la configuration du réseau de distribution (Daganzo et Newell, 1986). Daganzo (1987 *a*, 1987 *b*) a étudié le PTVFT de ce point de vue.

Une journée de travail de durée T est divisée en m périodes de temps. Les fenêtres de temps sont modélisées en spécifiant la période pendant laquelle un client est visité par un véhicule. Les clients sont regroupés dans des zones de forme rectangulaires. Daganzo (1987 *a*) donne les dimensions optimales de ces rectangles qui minimisent la distance parcourue par client. Il montre que la distance parcourue par client, augmente d'une manière proportionnelle à $m^{0.5}$ et que cette augmentation est plus importante dans le cas où les articles transportés sont de petites dimensions, plutôt que grandes. D'autre part, l'auteur compare l'efficacité de diverses stratégies de parcours des zones de distribution. Dans un second article, Daganzo (1987 *b*) étudie diverses stratégies de distribution pour le cas où les fenêtres de temps ne sont pas spécifiées pour tous les clients. Il démontre que la distance parcourue par client est minimale quand les deux types de clients sont traités différemment.

Ce type de méthodes a également été utilisé par Langevin (1988) pour résoudre le *m*-PVCFT. L'approche utilisée est de type « groupement d'abord, construction des itinéraires ensuite ». Le problème est ainsi décomposé en deux parties : d'une part la planification des zones *i.e.* le regroupement des points à visiter par un même véhicule et, d'autre part, la construction des itinéraires pour chacun des véhicules. Pour le découpage des zones le territoire a été partitionné en zones approximativement rectangulaires et placées en anneaux concentriques autour du dépôt. En utilisant des méthodes analytiques, les dimensions optimales d'une zone sont déterminées en fonction de son éloignement du dépôt et de la densité de la demande dans cette zone. Cette méthode permet, par un processus itératif, de déterminer les zones en partant de la périphérie d'une région vers le centre (où se trouve le dépôt). En ce qui concerne la construction des itinéraires de chacun des véhicules, un algorithme du voyageur de commerce avec des contraintes de fenêtres de temps est utilisé. Cet algorithme dérive d'une généralisation aux contraintes de fenêtres de temps de la formulation à deux flots utilisée par Finke *et al.* (1984) pour le problème du voyageur de commerce. Le principal intérêt d'une telle formulation est que sa relaxation linéaire ne contient que $4n$ contraintes (y compris les contraintes de fenêtres de temps), et permet donc d'obtenir, aisément des solutions approchées pour des problèmes de taille relativement grande.

4. CONCLUSION

Arrivés à la fin de notre exposé sur les problèmes de tournées avec fenêtres de temps, nous pouvons nous rendre compte à quel point les recherches évoluent rapidement dans ce domaine. En effet, alors qu'au début des années 1980 il n'existait pratiquement aucune méthode permettant de résoudre ces problèmes, il existe aujourd'hui de nombreux algorithmes exacts ou approchés permettant de résoudre efficacement de nombreuses versions de problèmes de tournées avec fenêtres de temps. Cependant, de nombreuses questions restent ouvertes, l'une des plus importantes consiste à savoir s'il est possible de concevoir un algorithme optimal permettant de résoudre efficacement des problèmes de tournées faiblement contraints (*i.e.* avec des fenêtres de temps relativement larges). La technique de génération de colonnes n'ayant permis de résoudre que des problèmes fortement contraints.

La planification des tournées de véhicules constitue une activité extrêmement complexe et coûteuse. La Recherche Opérationnelle a déjà démontré que des progrès considérables ont été accomplis pour résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Le transfert et la diffusion de ces méthodes auprès du plus grand nombre d'entreprises devrait constituer un axe d'action privilégié des spécialistes de la Recherche Opérationnelle au cours des prochaines années.

BIBLIOGRAPHIE

Y. K. Agarwal , K. Mathur et M. Salkin, A Set-Partitioning-Based Algorithm for the Vehicle Routing Problem, *Networks*, 1989, *19*, p. 731-749.

E. Baker, An Exact Algorithm for the Time Constrained Traveling Salesman Problem, *Oper. Res.*, 1983, *31*, p. 938-945.

E. Baker et J. Schaffer, Computational Experience with Branch Exchange for Vehicle Routing Problems with Time Window Constraints, *Am. J. Math. Management Sc.*, 1986, *6*, p. 261-300.

M. Ball et M. Magazine, The Design and Analysis of Heuristics, *Networks*, 1981, *11*, p. 215-219.

W. Bell, L. Dalberto, M. Fisher, A. Greenfield, R. Jaikumar, P. Kedia, R. Mack et P. Prutzman, Improving the Distribution of Industrial Gases with an On line Computerized Routing and Scheduling Optimizer, *Interfaces*, 1983, *13*, p. 4-23.

M. Bellmore et J. Malone, Pathology of Traveling Salesman Problem, *Oper. Res.*, 1971, *19*, p. 278-307.

J. F. Benders, Partitionning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems, *Numer. Math.*, 1962, *4*, p. 238-252.

D. P. Bertsekas, Constrained Optimisation and Lagrange Multipliers Methods, *Academic Press*, New York, 1982.

L. Bodin, B. Golden, A. Assad et M. Ball, Routing and Scheduling of Vehicles and Crews: the State of the Art, *Comput. Oper. Res.*, 1983, *10*, p. 63-212.

N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth et C. Sandi, Combinatorial Optimisation, *John Wiley*, New York, 1979.

N. Christofides, A. Mingozzi et P. Toth, Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problems, Based on Spanning Tree and Shortest Path Relaxation, *Math. Program.*, 1981 *a*, *20*, p. 255-282.

N. Christofides, A. Mingozzi et P. Toth, State Space Relaxation Procedures for the Computation of Bounds to Routing Problems, *Networks*, 1981 *b*, *11*, p. 145-164.

G. Clark et W. Wright, Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points, *Oper. Res.*, 1964, *12*, p. 568-581.

C. F. Daganzo, The Length of Tours in Zones of Different Shapes, *Transp. Res.*, 1984, *18 B*, p. 135-145.

C. F. DAGANZO et G. F. NEWELL, Configuration of Physical Distribution Networks, *Networks*, 1986, *16*, p. 113-132.

C. F. DAGANZO, Modeling Distribution Problems with Time Windows, Part I, *Transp. Sci.*, 1987 *a*, *21*, p. 171-179.

C. F. DAGANZO, Modeling Distribution Problems with Time Windows, Part II : Two Customer Types, *Transp. Sci.*, 1987 *b*, *21*, p. 180-187.

M. DESROCHERS, La fabrication d'horaires de travail pour les conducteurs d'autobus par une méthode de génération de colonnes, *Thèse de Ph. D, Dept. d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, Université de Montréal, 1986.

M. DESROCHERS, J. MENSTRA, M. SAVELSBERGH et F. SOUMIS, Vehicle Routing with Time Windows: Optimization and Approximation, *in* Vehicle Routing Methods and Studies, B. GOLDEN et A. ASSAD éd., p. 65-84, *North Holland*, Amsterdam, 1988.

M. DESROCHERS et G. LAPORTE, Improvement and Extensions to the Miller-Tucker-Zemlin Subtour Elimination Constraints, Cahiers du GERAD G-89-03, École des H.E.C., Montréal, 1989.

J. DESROSIERS, P. PELLETIER et F. SOUMIS, Plus court chemin avec contraintes d'horaires, *R.A.I.R.O., Rech. Op.*, 1983, *17*, p. 1-21.

J. DESROSIERS, F. SOUMIS et M. DESROCHERS, Routing with Time Windows by Column Generation, *Networks*, 1984, *14*, p. 545-565.

J. DESROSIERS, F. SOUMIS, M. DESROCHERS et M. SAUVÉ, Routing and Scheduling with Time Windows Solved by Network Relaxation and Branch and Bound on Time Variables, *in* J. M. ROUSSEAU éd., Computer Scheduling of Public Transport, II, *North Holland*, Amsterdam, 1985.

J. DESROSIERS, F. SOUMIS, M. DESROCHERS et M. SAUVÉ, Methods for Routing with Time Windows, *Eur. J. Oper. Res.*, 1986, *23*, p. 236-245.

J. DESROSIERS, M. SAUVÉ et F. SOUMIS, Lagrangean Relaxation Methods for Solving the Minimum Fleet Size Multiple Traveling Salesman Problem with Time Windows, *Manage. Sc.*, 1988, *34*, p. 1005-1022.

J. DESROSIERS, M. DESROCHERS et M. SOLOMON, A Column Generation Algorithm for the Vehicle Routing Problem with Time Windows. Présenté au congrès CORS/TIMS/ORSA, Vancouver, mai 1989.

G. FINKE, A. CLAUSS et E. GUNN, A Two Commodity Network Flow Approach to the Traveling Salesman Problem, Congressus Numerantium, 1984, , p. 167-178.

M. L. FISHER et R. JAIKUMAR, A Decomposition Algorithm for Large Scale Vehicle Routing. Working paper 78-11-05, Dept. of Decision Science, University of Pennsylvania, 1978.

M. L. FISHER, Worst Case Analysis of Algorithms, *Manage. Sci.*, 1980, *26*, p. 1-17.

M. L. FISHER, The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems. *Manage. Sci.*, 1981, *37*, p. 1-12.

M. L. FISHER et R. JAIKUMAR, A Generalized Assignement Heuristic for Vehicle Routing, *Networks*, 1981, *11*, p. 109-124.

M. L. FISHER, Lagrangian Optimization Algorithms for Vehicle Routing Problems, in Operational Research '87, Proceedings of the Eleventh International Conference on Operational Research, G. K. RAND éd., *North Holland*, Amsterdam, 1987.

M. L. FISHER et A. H. G. RINOOY KAN, The Design, Analysis and Implementation of Heuristics, *Manage. Sci.*, 1988, *34*, p. 263-265.

B. A. FOSTER et D. M. RYAN, An Integer Programming Approach to the Vehicle Scheduling Problem, *Oper. Res. Quart.*, 19876, *27*, p. 367-384.

M. Frank et P. Wolfe, An Algorithm for Quadratic Programming, *Nav. Res. Log. Quart.*, 1956, *3*, p. 95-110.

A. M. Geoffrion, Lagrangean Relaxation and its Uses in Integer Programming, *Math. Program. Stud*, 1974, , p. 82-114.

I. Gertsbakh et H. Stern, Minimal Ressources for Fixed and Variable Job Schedule, *Oper. Res.*, 1978, , p. 68-85.

B. Gillett et L. Miller, A Heuristic Algorithm for the Vehicle Dispatching Problem, *Oper. Res.*, 1974, *22*, p. 340-349.

B. Golden et A. Assad éd., Vehicle Routing: Methods and Studies, *North Holland*, Amsterdam, 1988.

M. Guignard et S. Kim, Langrangean Decomposition for Integer Programming: Theory and Applications, *R.A.I.R.O.*, *Rech. Oper.*, 1987, *21*, p. 307-323.

M. Haouari, P. Dejax et F. Soumis, Étude de la complexité du problème du plus court chemin avec contraintes de fenêtres de temps, Rapport Scientifique L.E.I.S., École Centrale, Paris, 1988.

M. Haouari et P. Dejax, Un modèle de tournées de véhicules avec contraintes de capacité et de fenêtres de temps, *in* Actes du 2e Congrès International de Génie industriel, p. 181-190, Nancy, Groupement de Génie Industriel, C.E.F.I. éd., 1988.

M. Haouari et P. Dejax, An Exact Algorithm for Vehicle Routing with Time Windows, présenté au Congrès CORS/TIMS/ORSA, Vancouver, mai 1989*a*.

M. Haouari, F. Bergeaud, P. Dejax et M. Tekaya, Une heuristique parallèle pour les problèmes de tournées avec fenêtres de temps *in* Actes du Colloque sur le développement des Sciences et Pratiques de l'organisation, p. 159-166, A.F.C.E.T., Paris, décembre 1989*b*.

K. Jörnsten, M. Nasberg et P. Smeds, Variable Splitting, a New Lagrangean Approach to some Mathematical Programming Models, Linkoping Institute of Technology, Dept. of Mathematics, Report LITH-MAT 85-04, 1985.

K. Jörnsten, O. Madsen et B. Sorensen, Exact Solution of the Vehicle Routing and Scheduling Problem with Time Windows by Splitting, Research Report No. 5/1986, I.M.S.O.R., The Technical University of Denmark, 1986.

G. Keymolen, Les problèmes de tournées : un algorithme pour le cas monovéhicules avec restrictions temporelles et de précédence, *Thèse de Doctorat*, Université catholique de Louvain, 1988.

K. Knight et J. Hofer, Vehicle Scheduling with Timed and Connected Calls: A Case Study, *Oper. Res. Quart.*, 1968, *19*, p. 299-310.

A. Kolen, A. Rinooy Kan et M. Trienekens, Vehicle Routing with Time Windows, *Oper. Res.*, 1987, *35*, p. 266-273.

Y. A. Koskosidis, W. B. Powell et M. M. Solomon, An Optimization Based Heuristic for Vehicle Routing and Scheduling with Time Window Constraints, T.M.S. 88-09-1, The Institute for Transportation Systems, 1989.

A. Langevin, Planification des tournées de véhicules, *Thèse de Ph. D*, *École Polytechnique de Montréal*, Université de Montréal, 1988.

G. Laporte et Y. Nobert, Exact Algorithms for the Vehicle Routing Problem, *Ann. Discr. Math.* 1987, *31*, p. 147-184.

L. S. Lasdon, Optimization Theory for Large Systems, *The Macmillan Company*, London, 1970.

E. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan et D. Shmoys, The Traveling Salesman Problem, *John Wiley*, New York, 1985.

A. LEVIN, Scheduling and Fleet Routing Models for Transportation Systems, *Transp. Sci.*, 1971, *5*, p. 232-255.

S. LIN, Computer Solutions to the Traveling Salesman Problem, *Bell Syst. Tech. J.*, 1965, *44*, p. 2245-2269.

S. LIN et B. KERNIGHAN, An Effective Heuristic for the Traveling Salesman Problem, *Oper. Res.*, 1973, , *21*, p. 498-516.

T. L. MAGNANTI, Combinatorial Optimisation and Vehicle Fleet Planning: Perspectives and Prospects, *Networks*, 1981, *11*, p. 179-213.

C. MILLER, A. TUCKER et R. ZEMLIN, Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problem, *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1960, *7*, p. 326-332.

M. MINOUX, Lagrangian Relaxation of the Constrained Shortest Path Problem, papier non publié, 1982.

M. MINOUX, Problèmes de grandes dimensions, *in* Programmation Mathématique, tome 2, *Dunod*, Paris, 1983.

R. MOLE et S. JAMESON, A Sequential Route Building Algorithm Employing a Generalized Savings Criteria, *Oper. Res. Quart.*, 1976, , p. 503-511.

G. F. NEWELL et C. F. DAGANZO, Design of Multiple Vehicles Tours. I: A Ring Radial Network, *Transp. Res.*, 1986*a*, *20 B*, p. 345-363.

G. F. NEWELL et C. F. DAGANZO, Design of Multiple Vehicles Tours. II: Other Metrics, *Transp. Res.*, 1986*b*, *20 B*, p. 365-376.

G. F. NEWELL et C. F. DAGANZO, Design of multiple Vehicles Tours. III: Valuable Goods, *Transp. Res.*, 1986*c*, *20 B*, p. 377-390.

I. OR, Traveling Salesman Type Combinatorial Problems and their Relation to the Logistics of Blood Banking, *Ph. D Thesis*, Dept. of Industrial Engineering and Management Sciences, Northwestern University, 1976.

C. ORLOFF, Route Constrained Fleet Routing, *Transp. Sci.*, 1976, *10*, p. 149-168.

G. PARKER, R. DEANE et R. HOLMES, On the Use of a Vehicle Routing Algorithm for the Parallel Processor Problem with Sequence Dependent Changeover Costs. *A.I.I.E. T.*, 1977, *9*, p. 155-160.

H. PULLEN et M. WEBB, A Computer application to a Transport Scheduling Problem, *Comput. J.*, 1967, *10*, p. 10-13.

M. R. RAO et S. ZIONTS, Allocation of Transportation Units to Alternative Trips. A Column Generation Scheme with Out of Kilter Subproblems, *Oper. Res.*, 1968, *16*, p. 52-63.

C. RIBEIRO, M. MINOUX et M. PENNA, An Optimal Column Generation with Ranking Algorithm for very Large Scale Set Partitionning Problems in Traffic Assignement, *Eur. J. Oper. Res.*, 1989, *41*, p. 232-239.

B. SANSO, F. SOUMIS et M. GENDREAU, Routing Models and Applications in Telecommunications Networks, présenté au Congrès EURO IX TIMS XXVIII, Paris, 1988.

M. SAVELSBERGH, Local Search in Routing Problems with Time Windows, *Ann. Oper. Res.*, 1985, *4*, p. 285-305.

M. SAVELSBERGH, The Generalized Assignement Heuristic Revisited, présenté au congrès CORS/TIMS/ORSA, Vancouver, mai 1989.

M. SOLOMON, On the Worst Case Performance of some Heuristics for the Vehicle Routing and Scheduling Problem with Time Window Constraints, *Networks*, 1986, *16*, p. 161-174.

M. SOLOMON, Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Window Constraints, *Oper. Res.*, 1987, *35*, p. 254-265.

M. SOLOMON et J. DESROSIERS, Time Window Constrained Routing and Scheduling Problems, *Transp. Sci.*, 1988 *a*, *22*, p. 1-13.

M. SOLOMON, E. BAKER et J. SCHAFFER, Vehicle Routing and Scheduling problems with Time Window Constraints: Efficient Implementations of Solutions Improvement Procedures, *in* Vehicle Routing Methods and Studies, B. GOLDEN et A. ASSAD éd., p. 85-105, *North Holland*, Amsterdam, 1988 *b*.

A. J. SWERSEY et W. BALLARD, Scheduling School Buses, *Manage. Sci.*, 1984, *30*, p. 844-853.

P. M. THOMPSON et H. N. PSARAFTIS, Cyclic Transfer Algorithms for Multi-Vehicle Routing and Scheduling Problems. W.P. 89-008, Leavey School of Business and Administration, Santa Clara University, 1989.

VAN LANDEGHAM, A Bi-criteria Heuristic for the Vehicle Routing Problem with Time Windows, *Eur. J. Oper. Res.*, 1988, *36*, p. 217-266.