

JACQUES GAUVIN

PIERRE PARENT

GILLES SAVARD

Répartition optimale de la puissance dans une centrale hydraulique à réserve pompée

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 20, n° 1 (1986), p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_1_1_0

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉPARTITION OPTIMALE DE LA PUISSANCE DANS UNE CENTRALE HYDRAULIQUE A RÉSERVE POMPÉE (*)

par Jacques GAUVIN (*),
Pierre PARENT ⁽²⁾ et Gilles SAVARD ⁽³⁾

Résumé. — *Le problème de la répartition optimale de la puissance sur les groupes turbines d'une centrale hydraulique à réserve pompée est ramené à la minimisation d'une somme de fonctions convexes et concaves par morceaux liée par une contrainte linéaire avec intervalles disjoints ou bornes disjonctives sur les variables. Les propriétés de ce programme mathématique particulier sont analysées puis utilisées pour concevoir une méthode de résolution illustrée par des résultats numériques.*

Mots clés : Énergie hydraulique, optimisation, bornes disjonctives.

Abstract. — *The problem of the optimal distribution of the load for an hydro-power station is formulated as the minimization of the sum of a partly convex and concave functions subject to a linear constraint with disjunctives intervals or bounds on the variables. The properties of this special mathematical program are analysed and used to develop a method to solve the problem. Numerical examples are provided.*

Keywords: ,Hydro-power, mathematical programming, disjunctive intervals.

1. INTRODUCTION

L'Hydro-Québec, l'entreprise nationale de production et de distribution de l'électricité au Québec (Canada), envisage la construction d'une centrale hydraulique à réserve pompée sur le site Delaney situé à quelques 50 km de la ville de Québec. Ce type de centrale pose entre autre le problème de la répartition optimale de la puissance de pointe sur les groupes turbines-alternateurs de façon à minimiser l'eau turbinée préalablement pompée en utilisant l'énergie excédentaire du réseau en période de faible demande.

(*) Reçu novembre 1984.

Cette recherche a été effectuée dans le cadre de la subvention A-9273 du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada (C.R.S.N.G.).

⁽¹⁾ Département de Mathématiques Appliquées, École Polytechnique, Montréal, Canada.

⁽²⁾ Lavalin Inc., Montréal, Québec.

⁽³⁾ G.E.R.A.D., École des Hautes Études Commerciales, Montréal, Québec.

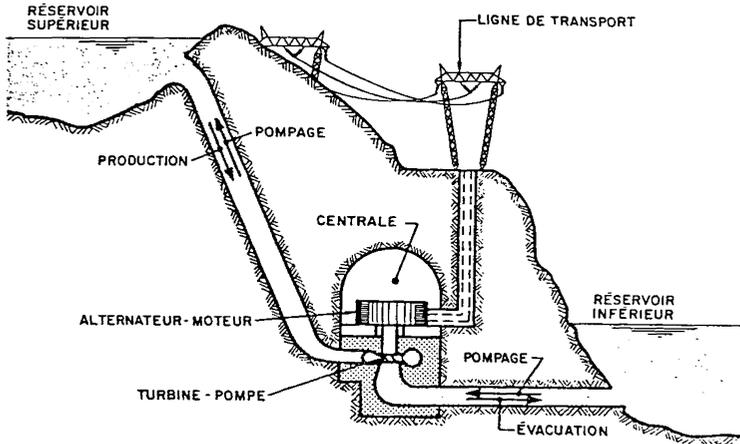


Figure 1.0. – Schéma d'une centrale à réserve pompée.

Chaque groupe turbine-alternateur prévu à cette centrale est caractérisé par une fonction puissance/débit exprimant, pour une hauteur de chute donnée, le débit nécessaire $f(x)$ pour produire une puissance x . Ce genre de fonction possède la particularité d'être concave pour $0 \leq x \leq \alpha$ et convexe pour $x \geq \alpha$. Une bonne approximation peut en être donnée par un polynôme du troisième degré :

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, \quad (1.1)$$

ayant un point d'inflexion en $\alpha = -c/3d$. Il faut noter que pour ce genre de fonction on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &\leq f'(0) && \text{pour } 0 \leq x \leq 2\alpha, \\ f'(x) &\geq f'(0) && \text{pour } x \geq 2\alpha \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &\leq 0 && \text{pour } x \leq \alpha, \\ f''(x) &\geq 0 && \text{pour } x \geq \alpha. \end{aligned}$$

La figure 1.1 illustre la fonction :

$$f(x) = 4 + \frac{161}{245}x - \frac{36}{245}x^2 + \frac{4}{245}x^3, \quad (1.2)$$

qui semble donner une bonne approximation de la fonction puissance/débit des turbines identiques prévues à Delaney où, par ailleurs, il est prévu que la

variation de hauteur de chute sera faible durant un cycle de turbinage. Cette fonction particulière possède son point d'inflexion en $\alpha = 3$ avec $f'(x) \geq f'(0)$ pour $x \geq 6$.

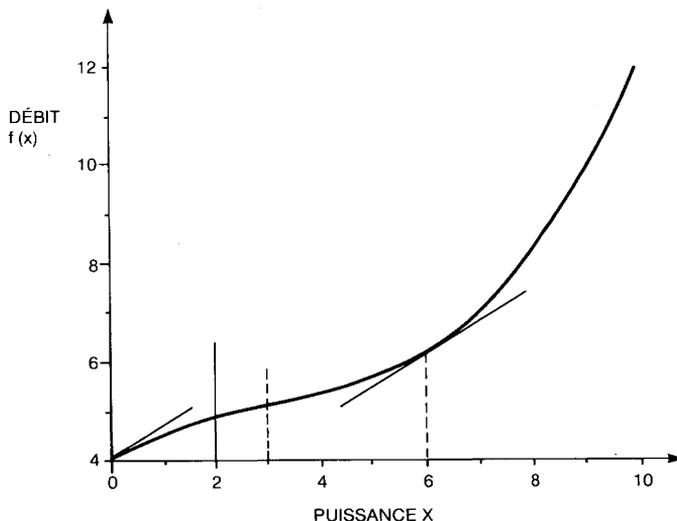


Figure 1. 1. — Fonction puissance-débit d'un groupe générateur.

En régime permanent, il est nécessaire d'opérer chaque turbine de façon à éviter les plages de puissances pouvant entraîner de la cavitation ou de l'instabilité hydraulique; cela se traduit par le fait que la puissance x à chaque groupe doit satisfaire des contraintes de bornes disjonctives du type :

$$a \leq x \leq b \quad \text{ou} \quad c \leq x \leq d. \quad (1.3)$$

Pour la centrale disposant de N groupes identiques devant produire une puissance demandée P , déterminer le nombre de groupes à utiliser et la répartition de cette puissance sur chaque groupe tout en minimisant l'eau utilisée et en respectant les plages de puissances permises se ramène donc à la résolution du programme mathématique suivant :

$$\min_{x, k} F(x : k) = \sum_{i=1}^k f(x_i),$$

liée par :

$$\sum_{i=1}^k x_i = P, \quad (1.4)$$

$$a \leq x_i \leq b \quad \text{ou} \quad c \leq x_i \leq d, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$k \in \{1, 2, \dots, N\},$$

où k est le nombre de groupes à utiliser, N le nombre de groupes disponibles et x_i la puissance devant être produite au groupe i .

Le problème de la répartition optimale de la puissance se ramène donc à un problème de programmation mathématique fort particulier, où l'on doit minimiser une somme de fonctions concaves et convexes par morceaux où apparaît une variable entière; le tout lié par une contrainte linéaire et des bornes disjonctives sur les variables continues; ce qui en fait un cas particulier de programmation avec contraintes disjonctives (Sherali et Shetty [3]). De plus, le programme doit être résolu pour toute une plage de valeurs possibles de la puissance demandée.

Les contraintes disjonctives sur les variables peuvent s'exprimer à l'aide de variables booléennes :

$$a + y_i(c - a) \leq x_i \leq b + y_i(d - b), \quad y_i = 0 \text{ ou } 1.$$

Sous cette forme, le problème pourrait être résolu par la méthode de séparation et évaluation progressive utilisant de façon répétée un algorithme standard de programmation mathématique. La présence de la variable entière k , la non-convexité de la fonction $F(x; k)$ et le fait que le problème doit être résolu pour toute une plage de valeurs possibles de la puissance demandée laisse supposer que cette approche peu originale pourrait être relativement peu efficace. Cet article propose plutôt une méthode heuristique de résolution inspirée de la structure et des propriétés particulières du problème posé.

2. PROPRIÉTÉS DU PROGRAMME MATHÉMATIQUE

L'illustration graphique du programme mathématique pour le cas à deux variables permet de mettre en évidence quelques propriétés du problème qui seront ensuite généralisées pour un nombre plus grand de variables.

La figure 2.1 montre les lignes de niveaux de la fonction objectif $F(x; 2)$ et les pavés réalisables définis par les bornes disjonctives où l'on peut suivre la trajectoire de la solution optimale lorsque la puissance demandée P varie.

La figure permet de voir que la fonction $F(x; 2)$ est concave sur la région A , convexe sur B , pseudoconcave sur C et pseudoconvexe sur D . Les régions de convexité généralisées étant séparées par des courbes, il serait illusoire d'essayer d'identifier les régions de convexité généralisées pour les cas de plus de deux variables. Par contre on observe que le programme est symétrique en ses variables et qu'il suffit de l'étudier sur la région réduite où $x_1 \geq x_2 \geq 0$.

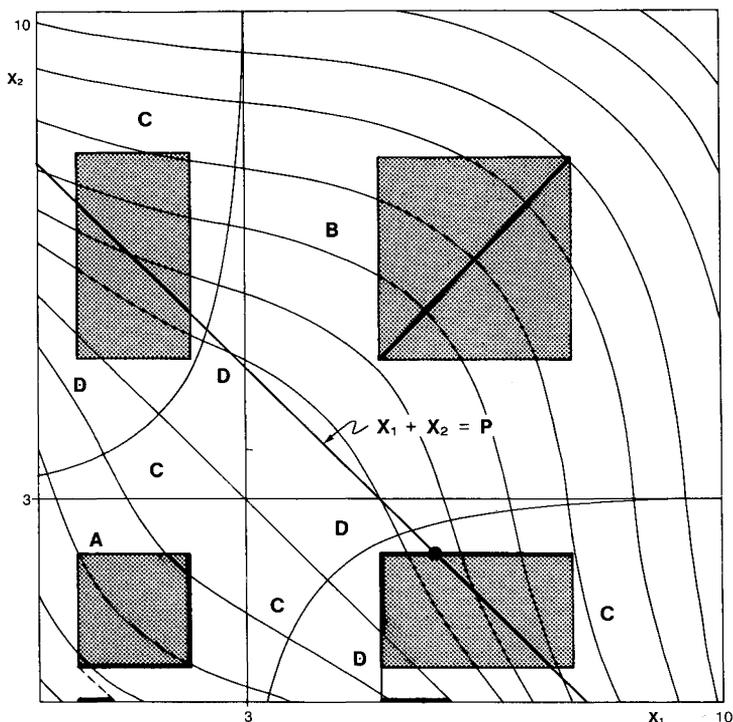


Figure 2. 1. — Représentation graphique du problème à deux variables.

Sur cette région réduite, il est par ailleurs intéressant d'observer que sur la droite $x_1 + x_2 = P$, la fonction $F(x; 2)$ est soit monotone croissante, soit monotone décroissante ou soit constante selon la valeur de P . De plus, on observe qu'une solution optimale se trouve toujours à une extrémité du segment de droite défini par l'intersection de la droite $x_1 + x_2 = P$ et d'un pavé réalisable défini par les bornes disjonctives. Il sera possible de généraliser ces deux propriétés au cas de plus de deux variables.

Pour l'étude du programme à k variables, on note :

$$S_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \mid \sum_{i=1}^k x_i = P, x_i \geq 0 \right\},$$

le simplexe défini par les contraintes linéaires :

$$B_k = \{ x \in \mathbb{R}^k \mid a \leq x_i \leq b \quad \text{ou} \quad c \leq x_i \leq d \},$$

l'ensemble des points réalisables définis par les bornes disjonctives, et finalement la région réduite :

$$D_k = \{x \in R^k \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0\},$$

qui, suite à la symétrie des variables, est suffisante pour l'étude du problème.

Le nombre total de pavés réalisables dans l'ensemble B_k est égal à 2^k ; ce nombre se réduit à $k+1$ sur la région réduite. Pour toutes les valeurs k entre 1 et N , on obtient le nombre total de pavés réalisables :

$$\sum_{k=1}^N 2^k = 2^{N+1} - 2$$

qui devient :

$$\sum_{k=1}^N (k+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2} - 1,$$

pour la région réduite. Pour $N=10$, on obtient ainsi une réduction du nombre de pavés de 2046 à 65.

La proposition suivante donne les seuls points susceptibles de minimiser la fonction $F(x; k)$ sur le simplexe réduit $S_k \cap D_k$.

PROPOSITION 2.1 : *Sur le simplexe réduit :*

$$S_k \cap D_k = \left\{ x \in R^k \mid \sum_{i=1}^k x_i = P, x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \geq 0 \right\},$$

la fonction $F(x; k)$ atteint son minimum nécessairement sur l'un des points suivants :

$$\begin{array}{ll} x^1 = (P, 0, 0, \dots, 0) & \text{si } P \leq 2\alpha, \\ x^2 = (P/2, P/2, 0, \dots, 0) & \text{si } 2\alpha \leq P \leq 4\alpha, \\ x^3 = (P/3, P/3, P/3, \dots, 0) & \text{si } 3\alpha \leq P \leq 6\alpha, \\ \dots & \dots \\ x^k = (P/k, P/k, P/k, \dots, P/k) & \text{si } k\alpha \leq P, \end{array}$$

où α est le point d'inflexion de la fonction $f(x)$ [voir (1.1)].

Preuve : Tout minimum x du programme :

$$\min \sum_{i=1}^k f(x_i),$$

liée par

$$\sum_{i=1}^k x_i = P,$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

doit nécessairement satisfaire les conditions de Kuhn et Tucker :

$$f'(x_i) + \lambda - u_i = 0$$

$$u_i x_i = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

$$u_i \geq 0$$

où λ est le multiplicateur associé à la contrainte linéaire et les u_i sont les multiplicateurs associés à chacune des variables. Pour les variables $x_i > 0$, on a alors

$$u_i = 0 \quad \text{et} \quad f'(x_i) = -\lambda,$$

où la seule solution possible sur $S_k \cap D_k$ est :

$$x_i = P/s, \quad i = 1, \dots, s,$$

s étant le nombre de variables non nulles. Pour les autres variables nulles $x_i = 0, i = s + 1, \dots, k$ il faut donc que :

$$f'(0) - f'(P/s) = u_i \geq 0,$$

ce qui ne peut se produire que si $P/s \leq 2\alpha$ [voir (1. 1)], soit $P \leq 2s\alpha$.

Donc les seules solutions possibles des conditions nécessaires de Kuhn et Tucker sur $S_k \cap D_k$ sont :

$$\begin{aligned} x^1 &= (P, 0, \dots, 0) && \text{si } P \leq 2\alpha \\ x^2 &= (P/2, P/2, \dots, 0) && \text{si } P \leq 4\alpha \\ &\dots\dots\dots \\ x^k &= (P/k, P/k, \dots, P/k) && \text{si } P \geq k\alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ces minimums possibles doivent aussi satisfaire aux conditions du second ordre; ce qui se traduit par le fait que la matrice diagonale M de

qui est un polyèdre convexe (voir fig. 2.2) dont les arêtes sont soit sur la frontière ∂D_k de l'ensemble réduit D_k , soit parallèles aux frontières du simplexe S_k .

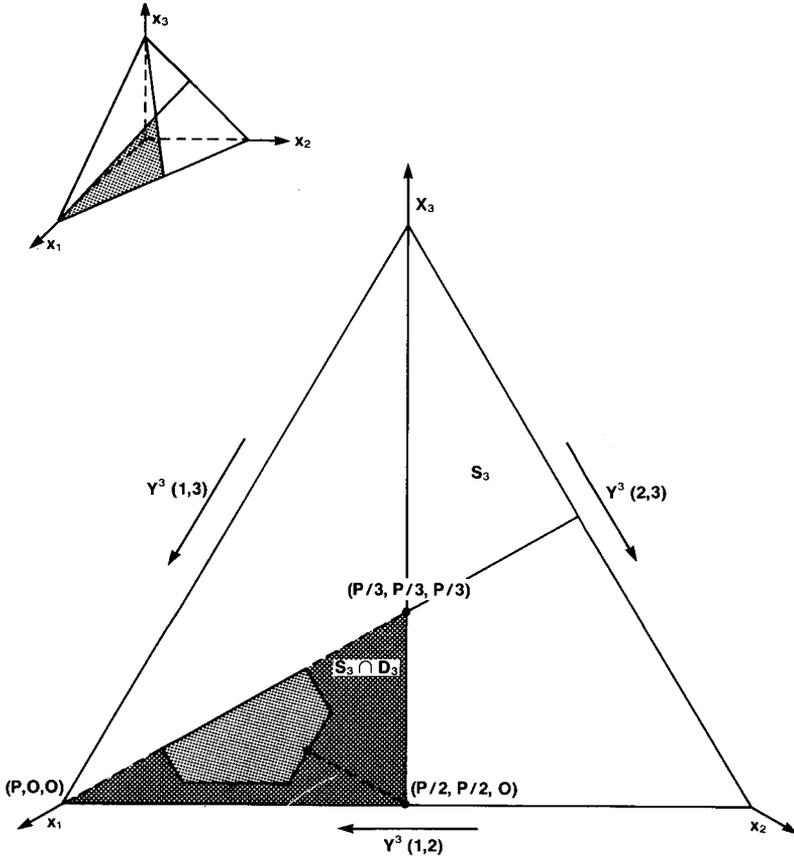


Figure 2.2. — Représentation graphique du problème à trois variables.

Le simplexe :

$$S_k = \left\{ x \in R^k \mid \sum_{i=1}^k x_i = P, x_i \geq 0 \right\}$$

possède $k(k-1)/2$ arêtes dont les vecteurs directeurs sont :

$$Y^k(p, q), \quad p \leq q, \quad p = 1, \dots, k-1; \quad q = p+1, \dots, k,$$

où :

$$Y_i^k(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=p \\ -1 & \text{si } i=q \\ 0 & \text{si } i \neq p, q \end{cases} \quad (\text{voir fig. 2. 3}).$$

La proposition suivante montre une propriété de monotonie de la fonction $F(x; k)$ pour les directions $Y^k(p, q)$. Cette propriété sera ensuite utilisée pour montrer que $F(x; k)$ atteint son minimum en un point frontière d'un pavé réalisable P_m^k .

PROPOSITION 2.2 : *Sur tout segment de droite de support $Y^k(p, q)$ dans le simplexe réduit $S^k \cap D^k$, la fonction $F(x; k)$ est seulement soit monotone croissante, soit constante ou soit monotone décroissante selon la valeur de P .*

Preuve : Soit $\bar{x} \in S_k \cap D_k$ et une direction réalisable $Y^k(p, q)$; i.e. une direction pour laquelle :

$$\bar{x} + Y^k(p, q) \in S_k \cap D_k \quad \text{pour un } t \geq 0.$$

On a alors :

$$F(\bar{x} + Y^k(p, q); k) - F(\bar{x}; k) = f(\bar{x}_p + t) + f(\bar{x}_q - t) - f(\bar{x}_p) - f(\bar{x}_q),$$

Puisque

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

on obtient, après quelques calculs algébriques élémentaires,

$$F(\bar{x} + Y^k(p, q); k) - F(\bar{x}; k) = t(\bar{x}_p + t - \bar{x}_q) [2c + 3d(\bar{x}_p + \bar{x}_q)].$$

Ayant $\bar{x}_p \geq \bar{x}_q$, on a toujours $\bar{x}_p + t - \bar{x}_q > 0$ pour $t \geq 0$ et le terme de droite est donc toujours positif si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q > -\frac{2c}{3d} = 2\alpha,$$

nul si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q = 2\alpha,$$

et toujours négatif si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q < 2\alpha,$$

où α est le point d'inflexion de $f(x)$.

A partir de \bar{x} en se déplaçant selon la direction $Y^k(p, q)$, on obtient :

$$x = \bar{x} + t Y^k(p, q),$$

avec :

$$\begin{aligned} x_p &= \bar{x}_p + t, \\ x_q &= \bar{x}_q - t, \\ x_i &= \bar{x}_i, \quad i \neq p, q, \end{aligned}$$

en conservant toujours l'égalité :

$$x_p + x_q = \bar{x}_p + \bar{x}_q,$$

cela fait que sur le segment de droite orienté :

$$[\bar{x}, \bar{x} + t Y^k(p, q)],$$

la fonction $F(x; k)$ est monotone :

croissante si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q > 2\alpha;$$

constante si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q = 2\alpha,$$

ou décroissante si :

$$\bar{x}_p + \bar{x}_q < 2\alpha,$$

α étant le point d'inflexion de $f(x)$. ●

Pour la direction opposée $-Y^k(p, q)$, il faut noter que si $\bar{x}_p = \bar{x}_q$, cette direction n'est pas réalisable puisqu'alors :

$$x_p - t < \bar{x}_q + t, \quad t > 0;$$

mais si $\bar{x}_p > \bar{x}_q$, la direction n'est réalisable que pour $t \in [0, \bar{t}]$ où \bar{t} est déterminé par :

$$\bar{x}_p - \bar{t} = \bar{x}_q + \bar{t} \quad \text{et} \quad x = \bar{x} - \bar{t} Y^k(p, q),$$

devient alors un point sur la frontière de D_k .

PROPOSITION 2.3 : *Le minimum de $F(x; k)$ sur un pavé réalisable P_m^k est atteint en un point frontière.*

Preuve : Prenons $\bar{x} \in \text{int } P_m^k$, l'intérieur relatif du pavé réalisable; alors il existe une direction réalisable $Y^k(p, q)$: i. e.

$$x = \bar{x} + t Y^k(p, q) \in P_m^k \quad \text{pour un } t > 0,$$

avec :

$$\begin{aligned} x_p &= \bar{x}_p + t, \\ x_q &= \bar{x}_q - t, \\ x_i &= \bar{x}_i, \quad i \neq p, q. \end{aligned}$$

Selon la proposition 2.1, $F(x; k)$ est monotone sur tout segment réalisable : $[\bar{x}, \bar{x} + t Y^k(p, q)]$,

Si $F(x; k)$ est monotone décroissante ou constante sur le segment, la fonction peut donc décroître ou rester constante jusqu'au point :

$$x = \bar{x} + \bar{t} Y^k(p, q),$$

où on a; soit :

$$\bar{x}_p + \bar{t},$$

égale à sa borne supérieure; soit :

$$x_q - \bar{t},$$

égale à sa borne inférieure; ou bien soit :

$$\bar{x}_q - \bar{t} = \bar{x}_{q-1}.$$

Dans les deux premiers cas on a x sur la frontière de P_m^k et dans le troisième cas on a x sur la frontière de D_k , donc aussi sur la frontière de P_m^k .

Si $F(x; k)$ est monotone croissante sur le segment, la fonction est décroissante selon la direction $-Y^k(p, q)$ jusqu'au point :

$$\bar{x} - \bar{t} Y^k(p, q),$$

où l'on a; soit :

$$\bar{x}_p - \bar{t},$$

égale à sa borne inférieure; soit :

$$\bar{x}_q + \bar{t},$$

égale à sa borne supérieure; soit :

$$\bar{x}_p - \bar{t} = \bar{x}_q + \bar{t},$$

ou bien soit :

$$\bar{x}_{p-1} = \bar{x}_p - \bar{t},$$

donc dans tous les cas donne un point x sur la frontière de P_m^k où :

$$F(x; k) \leq F(\bar{x}; k). \quad \bullet$$

La preuve de la proposition 2.3 montre en plus que sur une face du polyèdre P_m^k qui n'est pas située sur la frontière de l'ensemble réduit D_k , la fonction $F(x; k)$ atteint son minimum en un point extrême car autrement il existe une direction $Y^k(p, q)$ ou $-Y^k(p, q)$ pour laquelle $F(x + t Y^k(p, q))$ ou $F(x - t Y^k(p, q))$ peut décroître ou rester constante. En notant que sur une face de polyèdre qui est située sur la frontière de l'ensemble réduit D_k , le minimum doit aussi être atteint en un point extrême puisque sur tout l'ensemble $S_k \cap D_k$, $F(x; k)$ n'atteint son minimum qu'en un point extrême (prop. 2.1), il faut conclure que le minimum de $F(x; k)$ sur le polyèdre convexe P_m^k est atteint en un point extrême de ce polyèdre.

3. MÉTHODE DE RÉOLUTION

Les propriétés du programme mathématique (1.4) vues précédemment sont maintenant utilisées pour concevoir un algorithme heuristique pour obtenir le nombre de groupes à utiliser ainsi que la répartition sur chacun d'eux de la puissance demandée. Il n'est pas possible d'affirmer avec certitude que la répartition générée par l'algorithme soit la solution optimale globale du problème. Par contre une analyse de sensibilité systématique effectuée sur les résultats numériques obtenus n'a pas permis de les améliorer.

La fonction $f(x)$, la puissance P demandée et le nombre N de groupes disponibles étant connus, l'algorithme commence par déterminer l'ensemble des pavés réalisables qui correspondent à des combinaisons possibles de bornes pour les variables et dont l'intersection avec le domaine réduit $D_k = \{x \in R^k \mid x_1 \geq x_2, \dots, x_k \geq 0\}$ soit non vide.

Pour obtenir la liste de ces pavés réalisables, une suite $M(k)$ de nombres m entre 0 et k est établie de façon que :

$$mc + (k - m)a \leq P \leq md + (k - m)b,$$

où $[a, b]$ et $[c, d]$ sont les intervalles définis par les bornes disjonctives sur les variables; la liste de pavés est alors :

$$P_m^k = \{ x \in R^k \mid c \leq x_i \leq d, i = 1, \dots, m; \\ a \leq x_j \leq b, j = m + 1, \dots, k \}, \quad m \in M(k).$$

Vient ensuite la partie la plus délicate de l'algorithme où l'on doit minimiser $F(x; k)$ sur la trace de chaque pavé réalisable P_m^k sur le simplexe réduit $S_k \cap D_k$.

Pour ce faire, chaque point :

$$x^s = (P/s, \dots, P/s, 0, \dots, 0); \quad s = 1, \dots, k,$$

où $F(x; k)$ peut possiblement atteindre son minimum sur $S_k \cap D_k$ (voir prop. 2.1) est projeté sur la trace du pavé. Cette projection est la solution du programme quadratique :

$$\min \|x - x^s\|^2 \\ \sum_{i=1}^m x_i + \sum_{j=m+1}^k x_j = P, \\ c \leq x_i \leq d; \quad a \leq x_j \leq b.$$

Ce programme quadratique avec une seule contrainte linéaire et des bornes sur les variables est résolu par la méthode décrite dans Helgason, Kennington et Lall [1] pour obtenir les points \bar{x}^s dont le meilleur :

$$\bar{x}^m(k) = \operatorname{argmin} F(\bar{x}^s; k), \\ s = 1, \dots, k,$$

est retenu.

Ce point devrait être une bonne approximation du minimum cherché mais, comme on peut le voir sur la figure 2.2, il peut arriver que cette projection ne soit pas un point extrême du polyèdre convexe défini par la trace du pavé P_m^k sur $S_k \cap D_k$ ou, en principe, le minimum de $F(x; k)$ est susceptible d'être atteint. Cette situation peut être corrigée en se servant de la propriété démontrée à la proposition 2.2.

Pour vérifier si $\bar{x}^m(k)$ n'est pas un point extrême, il suffit de voir s'il existe des indices p et q , $p < q$, tels que :

$$\bar{x}_p^m(k) > \bar{x}_q^m(k),$$

avec :

$$\begin{aligned} c < \bar{x}_p^m(k) < d, \\ c < \bar{x}_q^m(k) < d \quad \text{si } q \in \{1, \dots, m\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ou :

$$\begin{aligned} c < \bar{x}_p^m(k) < d \quad \text{si } p \in \{1, \dots, m\}, \\ a < \bar{x}_q^m(k) < b \quad \text{si } q \in \{m+1, \dots, k\} \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned} a < \bar{x}_p^m(k) < b \quad \text{si } p \in \{m+1, \dots, k\}, \\ a < \bar{x}_q^m(k) < b. \end{aligned}$$

Si tel est le cas, $\bar{x}^m(k)$ n'est pas un point extrême à partir duquel il est possible d'en obtenir un en utilisant la propriété des directions réalisables $\pm Y^k(p, q)$ décrites à la proposition 2.2.

Pour ce faire, il est d'abord vérifié si :

$$\bar{x}_p^m(k) + \bar{x}_q^m(k) \leq 2\alpha,$$

ce qui indique que la direction $Y^k(p, q)$ est minimisante ou constante pour la fonction $F(x; k)$. Il s'agit alors de déterminer le nombre $t > 0$ le plus grand possible tel que :

$$\bar{x}_p^m(k) + t,$$

atteigne sa borne supérieure; ou que :

$$\bar{x}_q^m(k) - t,$$

atteigne sa borne inférieure; ou que :

$$\bar{x}_p^m(k) + t = \bar{x}_{p-1}^m(k),$$

ou bien que :

$$\bar{x}_q^m(k) - t = \bar{x}_{q+1}^m(k),$$

ce qui donne un nouveau point que l'on note aussi $\bar{x}^m(k)$.

Si, au contraire, on a que :

$$\bar{x}_p^m(k) + \bar{x}_q^m(k) > 2\alpha,$$

alors $-Y^k(p, q)$ est une direction minimisante et l'on cherche encore un $t > 0$ le plus grand possible tel que :

$$\bar{x}_p^m(k) - t,$$

touche sa borne inférieure; ou que :

$$\bar{x}_q^m(k) + t,$$

touche sa borne supérieure; ou que :

$$\bar{x}_p^m(k) - t = \bar{x}_{p+1}^m(k),$$

ou bien que :

$$\bar{x}_q^m(k) + t = \bar{x}_{q-1}^m(k),$$

ce qui conduit à un nouveau point encore noté $\bar{x}^m(k)$.

Lorsqu'il n'est plus possible de trouver, pour le dernier point $\bar{x}^m(k)$ obtenu, des indices p, q vérifiant les conditions (3.1), cela signifie qu'un point extrême est obtenu. Ce point est alors considéré comme étant le minimum de $F(x; k)$ sur le pavé P_m^k .

Ensuite l'algorithme détermine le meilleur point :

$$\bar{x}(k) = \operatorname{argmin} \{ F(\bar{x}^m(k); k) : m \in M(k) \},$$

parmi ceux obtenus précédemment; ce qui donne la « meilleure » répartition pour k groupes en opération. Le nombre de groupe « optimal » est alors fixé par :

$$\bar{x}(\bar{k}) = \operatorname{argmin} \{ F(\bar{x}(k); k), k = 1, \dots, N \},$$

où $\bar{x}(\bar{k})$ est la répartition correspondante.

Cet algorithme a été traduit en un programme informatique de 340 énoncés FORTRAN dont les résultats numériques obtenus pour la fonction particulière $f(x)$ décrite en (1.2) apparaissent au tableau 3.1 où les plages d'opération ont été choisies peu réalistes afin de montrer l'efficacité de la méthode.

Le programme peut aussi être utilisé en mode interactif à partir d'un terminal. Le tableau 3.2 illustre cette procédure. Sur une machine IBM 4043, les résultats du tableau 3.1 sont obtenus en moins de 1 seconde CPU. Une version en PASCAL de ce programme est aussi disponible sur disquette pour micro-ordinateur IBM-PC.

TABLEAU 3.1

TABLEAU DES RESULTATS

PLAGE D'OPERATION PERMISES: 2.20 A 4.20 ET 9.10 A 9.40

NOMBRES DE GROUPES DISPONIBLES = 10

PUISSANCE REQUISE = PUIS

NOMBRE DE GROUPES EN OPERATION = NBR

PUISSANCE AFFECTEE AU GROUPE I = XI

DEBIT TOTAL MINIMISE = FMIN

PUIS	NBR	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	FMIN
5	2	2.80	2.20									9.95
10	3	3.33	3.33	3.33								15.49
15	3	9.10	3.70	2.20								20.27
20	4	9.10	3.63	3.63	3.63							25.81
25	4	9.10	9.10	3.40	3.40							30.59
30	4	9.10	9.10	9.10	2.70							35.37
35	5	9.10	9.10	9.10	3.85	3.85						40.91
40	5	9.10	9.10	9.10	9.10	3.60						45.68
45	6	9.15	9.15	9.15	9.15	4.20	4.20					51.63
50	6	9.16	9.16	9.16	9.16	9.16	4.20					56.57
55	6	9.17	9.17	9.17	9.17	9.17	9.17					61.52
60	7	9.30	9.30	9.30	9.30	9.30	9.30	4.20				68.59
65	7	9.29	9.29	9.29	9.29	9.29	9.29	9.29				73.53
70	9	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	3.15	3.15		81.05
75	8	9.38	9.38	9.38	9.38	9.37	9.37	9.37	9.37			85.59
80	10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	3.60	3.60	91.37
85	10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	9.10	3.10	96.15
90	PUISSANCE NON REALISABLE											
95	PUISSANCE NON REALISABLE											

L'application réelle de cette méthode de répartition de la puissance n'a pas encore été utilisée par l'Hydro-Québec puisque, suite à l'excédent d'énergie de ces dernières années, la réalisation du projet Delaney a été rapportée au-delà de l'horizon de l'an 2000.

TABLEAU 3.2

```

COMBIEN DE GROUPE(S) SONT DISPONIBLES?
10
QUELS SONT LES REGIMES D'OPERATIONS?
2.2 - 4.2          9.1 - 9.4
QUELLE EST LA PUISSANCE REQUISE?
20.0
NOMBRE DE GROUPE(S) DISPONIBLES      10
LIMITES D'OPERATIONS   2.20  4.20          9.10  9.40
PUISSANCE REQUISE      20.00

SOLUTION
4 GROUPE(S) EN OPERATION
9.10  3.63  3.63  3.63  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00  0.00
LE DEBIT EST 25.81
AUTRE PUISSANCE REQUISE?:NON=1,OUI=0

```

BIBLIOGRAPHIE

1. R. HELGASON, J. KENNINGTON et H. LALL, *A Polynomially Bounded Algorithm for a Singly Constraint Quadratic Program*, *Mathematical Programming*, vol. 18, 1980, p. 338-343.
2. D. G. LUENBERGER, *Introduction to Linear and Non-linear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.
3. H. D. SHERALI et C. M. SHETTY, *Optimization with Disjunctive Constraints*, Springer-Verlag, N.Y., 1980.