

LOURDES Z. GRANJA

FÉLIX MORA-CAMINO

## **Modèles entropiques multimodaux de prévision de flux de transport**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 19, n° 2 (1985),  
p. 143-158

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1985\\_\\_19\\_2\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1985__19_2_143_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MODÈLES ENTROPIQUES MULTIMODAUX DE PRÉVISION DE FLUX DE TRANSPORT (\*)

par Lourdes Z. GRANJA <sup>(1)</sup> et Félix MORA-CAMINO <sup>(1)</sup>

*Résumé.* — Ce travail concerne l'extension du modèle entropique classique de prévision de la distribution des flux dans un réseau de transport, au cas où plusieurs modes de transport sont considérés.

*Une étude exhaustive des situations typiques rencontrées par le planificateur est effectuée et les modèles de prévision correspondants sont formulés. Quatre classes de modèles entropiques sont ainsi établies et analysées en fonction de leur capacité à fournir des solutions désagrégées par modes de transport. Deux stratégies de résolution numérique basées sur le calcul hiérarchisé sont alors développées.*

Mots clés : Problème de distribution; modèles entropiques; calcul hiérarchisé.

*Abstract.* — The generalisation of the classical entropy model, used to predict traffic flows equilibrium in a network, to the case with various transportation modes, is considered.

*The principal situations in relation to data availability are analysed, four independent cases are displayed and evaluated with respect to their ability in furnishing desagregated predictions of flows. Then, two solution strategies, based on Hierarchical Calculus, are developped.*

Keywords: Distribution Problems; Entropy Models; Hierarchical Calculus.

### 1. INTRODUCTION

Le modèle entropique de prévision de la distribution des flux dans un réseau de transport, comme développé par Wilson [13], s'est révélé un outil important pour le planificateur des transports, fournissant non seulement une solution analytique simple (le modèle gravitationnel) mais aussi des éléments d'évaluation sous forme d'indices d'accessibilité et de niveaux d'utilité globale du réseau [5]. Le présent travail analyse l'intérêt et la possibilité d'étendre ce modèle au cas où plusieurs modes de transports sont considérés. Suivant le type d'informations accessibles au planificateur, des formulations différentes

(\*) Reçu en avril 1983.

<sup>(1)</sup> Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia, Coppe/Ufrj, Cx. Postal 68512, Rio de Janeiro, Brasil.

du modèle entropique sont proposées. Ces formulations sont regroupées en quatre classes. Deux de ces classes ne sont pas aptes à fournir une solution de flux désagrégée par mode de transport et sont abandonnées. Des deux classes restantes, l'une correspond au cas trivial où les informations disponibles permettent une résolution du problème de prévision par mode et l'autre correspond à un problème de grandes dimensions présentant un caractère séparable par mode. Deux stratégies de résolution, issues du Calcul Hiérarchique, sont alors développées et comparées pour résoudre ce dernier cas.

## 2. LE MODÈLE ENTROPIQUE CLASSIQUE DE DISTRIBUTION

Cette approche recherche la distribution de flux la plus probable compte tenu de probabilités *a priori* déterminées à partir d'informations actuelles sur l'utilisation du réseau et de prévisions d'ordre socio-économique relatives aux zones qu'il relie.

Définissant :

$T_{ij}$  = volume de flux (inconnu) de la zone  $i$  à la zone  $j$  ;

$O_i$  = volume total des voyages issus de la zone  $i$  durant la période considérée ;

$D_j$  = volume total des voyages se destinant à la zone  $j$  durant la période considérée ;

où ces volumes totaux sont fournis par les étapes de « génération » et « d'attraction » des zones, on obtient les restrictions de marge suivantes :

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i, \quad i = 1 \dots N$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j, \quad j = 1 \dots N$$

et

$$\sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j$$

Notant  $F_{ij}$  la probabilité *a priori* d'avoir un voyage de  $i$  vers  $j$ , la probabilité d'avoir une distribution de voyage  $[T_{ij}]$  est donnée par [4] :

$$P([T_{ij}]) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N (F_{ij})^{T_{ij}} \left( T! / \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^N T_{ij}! \right) \quad (1)$$

où

$$T \stackrel{\Delta}{=} \sum_{i=1}^N O_i = \sum_{j=1}^N D_j$$

La distribution la plus probable compte tenu de l'information *a priori*  $-\sum_{ij} F_{ij} \text{Log } F_{ij}$  est solution du problème d'optimisation ( $P_1$ ) :

$$\max_{\{T_{ij}\}} P(\{T_{ij}\})$$

sous les restrictions suivantes :

$$T_{ij} \geq 0 \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij} = O_i \quad i=1 \dots N \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij} = D_j \quad j=1 \dots N \quad (4)$$

Supposant que le volume des flux à l'équilibre entre chaque paire de zones est ou bien nul, ou bien assez élevé, il est possible d'écrire, utilisant la formule d'approximation de Stirling, que :

$$\text{Log } P(\{T_{ij}\}) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} \text{Log } (T_{ij}/f_{ij}) + T \text{Log } T \quad (5)$$

où

$$f_{ij} \stackrel{\Delta}{=} T \cdot F_{ij} \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N$$

Finalement, le problème ( $P_1$ ) peut être approximé par le problème ( $P_2$ ), ou « modèle entropique » suivant :

$$\max_{\{T_{ij}\}} H = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij} \text{Log } (T_{ij}/f_{ij}) \quad (6)$$

sous les restrictions (2), (3) et (4), où l'on reconnaît la fonction d'entropie conditionnelle  $H$  utilisée de façon classique en planification urbaine [13]. Ce problème conduit à la formulation d'un problème biproportionnel pour lequel existent divers algorithmes de résolution, l'algorithme de Kruithof [6] par exemple, présentant une vitesse de convergence [11] satisfaisante vers la solution unique du problème.

L'établissement des probabilités *a priori* relatives à la distribution des flux constituera une étape très délicate de la résolution du problème de prévision. Il paraît souhaitable que ces probabilités tiennent compte des coûts de transport entre chaque paire de zones, pourtant, il est difficile dans la pratique de combiner ces informations avec d'autres informations de type

socio-économique (population, emploi...). Dans le cas d'un problème de prévision à court terme, la matrice  $[f_{ij}]$  peut être prise égale à la matrice des flux observés qui sont le résultat des conditions socio-économiques et des coûts de transports actuels. A plus long terme, la distribution *a priori*  $[F_{ij}]$  pourra être choisie exclusivement en fonction des facteurs socio-économiques propres à chacune des zones de demande (la distribution la plus naturelle étant  $[\tilde{T}_{ij}]$  avec  $\tilde{T}_{ij} = O_i \cdot D_j / T$ ,  $i = 1 \dots N$ ,  $j = 1 \dots N$ ), les coûts de transport entre les zones étant introduits par la définition du niveau total attendu par le planificateur, pour les coûts. Dans le cas où un coût généralisé de transport est utilisé, ceci se traduira par la restriction globale :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} T_{ij} = C \quad (7)$$

Ce coût total  $C$ , peut être fixé par le planificateur à partir du niveau global de sensibilité de la population au coût de transport [2].

Finalement, dans ces conditions, la distribution des flux la plus probable sera solution du problème ( $P_3$ ), le « modèle entropique conditionnel », suivant :

$$\max_{\{T_{ij}\}} H(\{T_{ij}\})$$

sous les restrictions (2), (3), (4) et (7).

Le problème initialement traité comme un problème de programmation convexe à l'aide d'algorithmes tels que le Simplex-Convexe [4] et l'algorithme de Frank-Wolfe [4], a pu, avec le développement de la théorie de la Dualité en Programmation Géométrique [10], être transformé en un problème de minimisation d'une fonction sur  $(\mathbb{R}^+)^{2N+1}$  pour lequel les algorithmes de type gradient se révèlent efficaces [12].

### 3. DÉVELOPPEMENT DE MODÈLES ENTROPIQUES MULTIMODAUX

Lorsque l'on considère que les déplacements peuvent s'effectuer à l'aide de  $K$  modes différents de transport (généralement deux classes de transports sont prises en compte, les modes de transport collectif : autobus, tramway, métro ..., et les modes de transport individuel : voitures particulières, taxis, deux roues ...), le planificateur désirera prévoir simultanément la distribution spatiale et modale  $[T_{ij}^k]$ ,  $k = 1 \dots K$ , des flux de transports. On aura par définition :

$$\sum_{i=1}^K T_{ij}^k = T_{ij} \quad i = 1 \dots N, \quad j = 1 \dots N \quad (8)$$

Les coûts généralisés de transport entre chaque paire de zones pour chaque mode seront représentés par leur coût unitaire  $C_{ij}^k$ . Suivant le type d'informations accessibles au planificateur, diverses situations pourront se présenter :

(1) Disponibilité de distributions de probabilités *a priori* (F) :

$F=0$  : l'unique distribution *a priori* utilisable concerne la matrice  $[T_{ij}]$  :  $[F_{ij}]$  ;

$F=1$  : les distributions *a priori*  $[F_{ij}^k]$ ,  $k=1 \dots K$ , sont disponibles.

(2) Disponibilité d'informations sur les coûts de transport (C) :

$C=0$  : l'unique information fournie est relative au coût total C ;

$C=1$  : la prévision de coût total est désagrégée par mode de transport,  $C_k$ ,  $k=1 \dots K$ .

(3) Disponibilité de prévisions de génération et d'attraction (S) :

$S=0$  : les informations de génération et d'attraction sont globales ( $O_i$ ,  $i=1 \dots N$ ,  $D_j$ ,  $j=1 \dots N$ ) ;

$S=1$  : les informations de génération et d'attraction sont désagrégées par mode de transport ( $O_i^k$ ,  $D_j^k$ ,  $i=1 \dots N$ ,  $j=1 \dots N$ ,  $k=1 \dots K$ ).

Chaque situation sera identifiée par un triplet (F, C, S). Huit cas de figure sont possibles, pourtant, les cas (1, C, 0),  $C=0$  et 1, pourront être assimilés aux cas (1, C, 1), avec  $C=0$  et 1 respectivement, en choisissant les informations manquantes de façon consistante :

$$\text{et } \left. \begin{aligned} O_i^k &= T \cdot \sum_{j=1}^N F_{ij}^k \quad i=1 \dots N \\ D_j^k &= T \cdot \sum_{i=1}^N F_{ij}^k \quad j=1 \dots N \end{aligned} \right\} k=1 \dots K \quad (9)$$

De la même façon, choisissant les distributions *a priori* de façon que :

$$F_{ij}^k = O_i^k \cdot D_j^k / \sum_{l=1}^K (O_i^l \cdot D_j^l) \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (10)$$

les cas (0, C, 1),  $C=0$  et 1, pourront être assimilés aux cas (1, C, 1), avec  $C=0$  et 1 respectivement.

Des quatre cas de figure indépendants (0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1) et (1, 1, 1), les deux premiers se révèlent incapables de fournir une prévision désagrégée par mode de transport de la distribution des flux de voyage : Le cas (0, 0, 0) correspond au modèle entropique conditionnel classique (problème  $P_3$ ).

Le cas (0, 1, 0) conduit à la formation du problème d'optimisation suivant ( $P_4$ ) :

$$\max_{\{T_{ij}^k\}} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) \text{Log} \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k / f_{ij} \right) = H \quad k=1 \dots K \quad (11)$$

sous les restrictions suivantes :

$$T_{ij}^k \geq 0 \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) = O_i \quad i=1 \dots N \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) = D_j \quad j=1 \dots N \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C^k \quad k=1 \dots K \quad (15)$$

Ce problème étant convexe, les conditions de stationarité du Lagrangien  $\mathcal{L}$  défini comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = H([T_{ij}^k]) + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( \sum_{j=1}^N \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) - O_i \right) + \sum_{j=1}^N \mu_j \left( \sum_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K T_{ij}^k \right) - D_j \right) \\ + \sum_{k=1}^K \gamma_k \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k - C^k \right) \end{aligned} \quad (16)$$

sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité qui s'écrivent :

$$-(1 + \text{Log} (T_{ij}^k / f_{ij})) + \lambda_i + \mu_j + \gamma_k \cdot C_{ij}^k = 0 \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (17)$$

ou encore :

$$T_{ij}^k = f_{ij} \cdot e^{(-1 + \lambda_i + \mu_j)} \cdot e^{\lambda_k \cdot C_{ij}^k} \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (18)$$

Cette dernière relation ne pourra être satisfaite que dans deux cas :

$$(1) \text{ si } C_{ij}^k = C_{mn}^k \stackrel{\Delta}{=} \bar{C}^k, \quad \forall (i, j) \quad \text{et} \quad (m, n), \quad i, j, m, n \in \{1, \dots, N\} \quad (19)$$

et

$$\gamma_k \cdot \bar{C}^k = \gamma_l \cdot \bar{C}^l = \text{cste} \quad \forall k, l \in \{1, \dots, K\} \quad (20)$$

$$(2) \text{ si } \gamma_k = 0, \quad k=1 \dots K \quad (21)$$

Ces deux cas conduisent à une solution non définie par rapport aux variables  $T_{ij}^k$ , les flux solutions du problème  $P_4$  sont indépendants des coûts inérents aux divers modes de transport. Toute distribution  $[T_{ij}^k], k=1 \dots K$ , telle que :

$$\sum_{k=1}^K T_{ij}^k = T_{ij}^* \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N \quad (22)$$

où  $[T_{ij}^*]$  est solution du problème  $P_2$ , sera solution du problème  $P_4$ .

Pour le cas (0, 1, 0), la prévision de la distribution modale devra être faite de façon indépendante. Il sera par exemple possible d'utiliser un modèle de type « Logit » conduisant à une solution telle que :

$$T_{ij}^k = T_{ij}^* \cdot e^{-\theta c_{ij}^k} / \left( \sum_{l=1}^K e^{-\theta \cdot c_{ij}^l} \right) \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N \quad (23)$$

où  $\theta$  est un paramètre caractérisant la sensibilité des usagers aux différences de coûts présentés par les divers modes de transport.

L'ensemble des cas de figure peut être résumé par la table 1 :

TABLE I

*Les différents cas de figure et les types de solution correspondants*

Cas			Type de solution
F	C	S	
0	0	0	solution globale $[T_{ij}]$
0	0	1	solution assimilée au cas (1, 0, 1)
0	1	0	solution globale $[T_{ij}]$
0	1	1	solution assimilée au cas (1, 1, 1)
1	0	0	solution assimilée au cas (1, 0, 1)
1	0	1	solution désagrégée par mode $[T_{ij}^k], k=1 \dots K$
1	1	0	solution assimilée au cas (1, 1, 1)
1	1	1	solution désagrégée par mode $[T_{ij}^k], k=1 \dots K$

**4. ANALYSE DES MODÈLES ENTROPIQUES MULTIMODAUX D'INTÉRÊT**

Des huit cas possibles; seuls les cas (1, 1, 1) et (1, 0, 1) se révèlent à la fois indépendants et capables de fournir une prévision désagrégée par mode des flux de transport. Le cas (1, 1, 1) se traduit par le problème ( $P_5$ ) totalement séparable :

$$\max_{[T_{ij}^k]} - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \text{Log} (T_{ij}^k / f_{ij}^k) \quad k=1 \dots K \quad (24)$$

sous les restrictions suivantes :

$$T_{ij}^k \geq 0 \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}^k = O_i^k \quad i=1 \dots N \quad k=1 \dots K \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij}^k = D_j^k \quad j=1 \dots N \quad (27)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k \cdot T_{ij}^k = C^k \quad (28)$$

conduisant à la résolution pour chaque mode de transport d'un problème identique à  $P_3$ . Dans le cadre classique du processus à quatre étapes de prévision de demande pour un système de transport, les étapes de distribution spatiale, d'affectation et de répartition modale sont interdépendantes (les informations de sortie des unes constituent des informations d'entrée pour les autres, et *vice versa*). Ainsi, malgré sa présentation séquentielle, l'adoption de ce processus conduit à une nécessaire itération entre ses diverses étapes, de façon à assurer une consistance suffisante entre les données d'entrée de chacune des étapes et les prévisions fournies par chacun des modèles.

Les modèles entropiques multimodaux considérés ici supposent que l'étape d'affectation des flux est résolue initialement (ce qui est possible dans le cas où les coûts de congestion sont négligeables). Suivant la nature et la quantité d'informations disponibles, ces modèles permettent de résoudre de façon simultanée les problèmes de distribution des flux et de répartition modale. Cette approche permet donc d'obtenir une solution globalement consistante. Pourtant, le planificateur peut s'intéresser plus particulièrement à l'un des modes de transport (le transport par autobus par exemple) et à l'influence que les autres modes de transport peuvent avoir sur la répartition des flux correspondant à ce dernier mode. Ainsi, il est intéressant pour le planificateur de pouvoir à la fois résoudre de façon séparée les problèmes de prévision des flux par mode de transport et de visualiser le processus d'arbitrage entre les différents modes. Cette dernière remarque conduit alors à envisager l'emploi des techniques de Décomposition-Coordination de la Programmation Mathématique pour résoudre ce type de problème. Dans le cas (1, 0, 1), on obtient un problème ( $P_6$ ) partiellement séparable :

$$\max_{\{T_{ij}^k\}} - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \text{Log}(T_{ij}^k/f_{ij}^k) \quad k=1 \dots K \quad (29)$$

sous les restrictions suivantes :

$$T_{ij}^k \geq 0 \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N \quad (30)$$

$$\sum_{j=1}^N T_{ij}^k = O_i^k \quad i=1 \dots N \quad k=1 \dots K \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^N T_{ij}^k = D_j^k \quad j=1 \dots N \quad (32)$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k = C \quad (33)$$

Ce problème d'optimisation est strictement convexe et bien qu'il admette une solution de la forme :

$$T_{ij}^{*k} = f_{ij}^k \cdot e^{(\alpha_i^k + \beta_j^k + \gamma \cdot C_{ij}^k)} \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (34)$$

la résolution numérique directe de ce problème de  $K \cdot N^2$  variables et  $2KN + 1$  restrictions ne semble pas devoir être aisée. De même l'approche de résolution du problème primal de programmation géométrique, n'est pas applicable ici. Pourtant, la restriction (33) constitue une équation de couplage entre les divers modes de transport et deux techniques de Décomposition-Coordination de la Programmation Mathématique peuvent être utilisées pour décomposer le problème global [8] [9] :

— La dualisation par rapport aux équations de couplage des sous systèmes (l'équation (33));

— La projection suivant les divers sous-systèmes des ressources disponibles (le coût total prévu de transport).

**5. DÉCOMPOSITION-COORDINATION PAR DUALISATION DE LA RESTRICTION DE COÛT**

Le problème  $P_6$  est remplacé par le problème équivalent (dualité forte)  $P_7$  :

$$\min_{\gamma} \{ \max_{\{T_{ij}^k\}} \mathcal{L}(\{T_{ij}^k\} \quad k=1 \dots K, \gamma) \} \quad k=1 \dots K$$

sous les restrictions (30), (31) et (32), avec :

$$\mathcal{L} = - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \text{Log} (T_{ij}^k / f_{ij}^k) + \gamma \left( \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k \cdot T_{ij}^k - C \right) \quad (35)$$

ou encore :

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \tilde{H}_k - \gamma \cdot C \quad (36)$$

avec

$$\tilde{H}_k = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \text{Log} (T_{ij}^k / \tilde{f}_{ij}^k) \quad k=1 \dots K \quad (37)$$

où

$$\tilde{f}_{ij}^k = f_{ij}^k \cdot e^{\gamma c_{ij}^k} \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (38)$$

Ceci conduit à proposer le schéma suivant de décomposition-coordination représenté par la figure 1 :

— au niveau inférieur, les sous-problèmes relatifs à chacun des modes de transport ( $P_7 - k$ ) sont traités de façon indépendante :

$$\max_{[T_{ij}^k]} \tilde{H}^k$$

sous les restrictions (30 - k), (31 - k) et (32 - k).

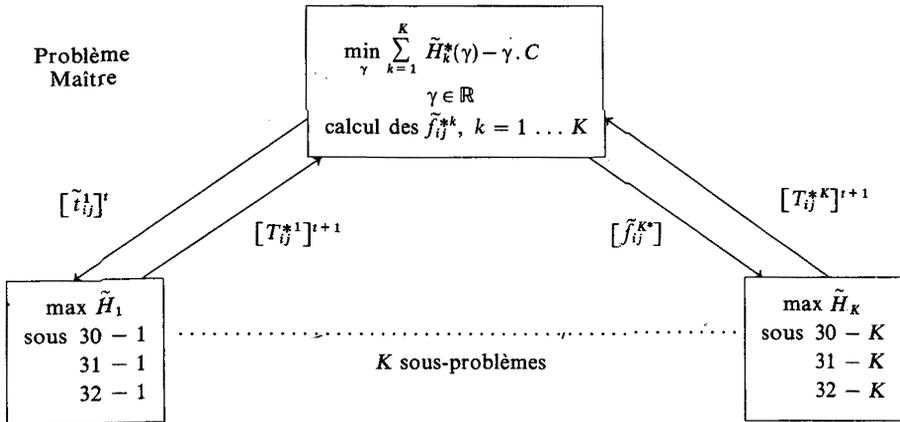


Figure 1. — Schéma de décomposition-coordination par dualité.

Soient  $[T_{ij}^{*k}(\gamma)]$ ,  $k=1 \dots K$ , les solutions de ces modèles entropiques conditionnels.

— au niveau supérieur, la coordination par les prix conduira à la recherche de la solution  $\gamma_{t+1}^*$  du problème maître à l'itération  $t+1$  :

$$\min_{\gamma} \sum_{k=1}^K \tilde{H}_k([T_{ij}^{*k}(\gamma)]) - \gamma \cdot C \quad (39)$$

qui permet d'établir une nouvelle estimation des probabilités à être soumises à chacun des sous-problèmes :

$$\underset{(t+1)}{\tilde{f}_{ij}^k} = \underset{(t)}{f_{ij}^k} \cdot e^{c_{ij}^k(\gamma_{t+1}^* - \gamma_t^*)} \quad i=1 \dots N, \quad j=1 \dots N, \quad k=1 \dots K \quad (40)$$

La solution du problème (39) pourra être obtenue à l'aide d'algorithmes de type gradient, le gradient de la fonction objectif s'écrivant :

$$\frac{d\tilde{H}_k}{d\gamma|^*} = \frac{\partial\tilde{H}_k}{\partial\gamma|^*} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial\tilde{H}}{\partial T_{ij}^k|^*} \cdot \frac{dT_{ij}^k}{d\gamma|^*} \quad k=1 \dots K \quad (41)$$

avec

$$\frac{\partial\tilde{H}_k}{\partial\gamma|^*} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k \cdot T_{ij}^{*k} \quad k=1 \dots K \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\tilde{H}_k}{\partial T_{ij}^k|^*} &= -(1 + \text{Log}(T_{ij}^{*k}/\tilde{f}_{ij}^{*k})) \\ &\quad \left. \begin{array}{l} i=1 \dots N \\ j=1 \dots N \\ k=1 \dots K \end{array} \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\frac{dT_{ij}^k}{d\gamma|^*} = \sum_{h,l,m} S_{h,l,m}^{k,i,j} \cdot C_{lm}^h \cdot \tilde{f}_{lm}^h \quad (44)$$

où la matrice  $S$  est donnée en Annexe I. Chacun des sous-problèmes  $P_{7-k}$ ,  $k=1 \dots K$ , pourra être par exemple résolu à l'aide de l'algorithme de Kruithof.

**6. DÉCOMPOSITION-COORDINATION PAR ALLOCATION DE RESSOURCES**

Le problème  $P_6$  est réécrit ici sous la forme ( $P_8$ ) :

$$\max_{C^k, \{T_{ij}^k\}} \sum_{k=1}^K H_k \quad k=1 \dots K$$

sous les restrictions locales  $30-k, 31-k, 32-k, k=1 \dots K$ , et :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k \cdot T_{ij}^k = C^k \quad k=1 \dots K \quad (45)$$

et sous la restriction globale

$$\sum_{k=1}^K C^k = C \quad (46)$$

avec

$$H_k = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N T_{ij}^k \text{Log}(T_{ij}^k/f_{ij}^k) \quad k=1 \dots K \quad (47)$$

Fixant la répartition du coût total suivant les divers modes de transport,  $C^k$ ,  $k=1 \dots K$ , il est possible de définir les  $K$  sous-problèmes  $P_{8-k}$ ,  $k=1 \dots K$ , suivants :

$$\max_{\{T_{ij}^k\}} H^k$$

sous les restrictions  $30-k, 31-k, 32-k$  et  $43-k$ .

Le problème maître s'écrira :

$$\max_{C^k} \sum_{k=1}^K H^k([T_{ij}^{*k}]) \quad k=1 \dots K$$

sous la restriction (45), où  $[T_{ij}^{*k}]$ ,  $k=1 \dots K$ , sont les solutions intermédiaires des  $K$  sous-problèmes.

Chacun des sous-problèmes pourra être résolu de façon identique au problème  $P_3$ , par transformation à l'aide de la programmation géométrique et utilisation d'un algorithme de type gradient. Choissant des valeurs pour les  $C^k$  telles que :

$$C_{\min}^k \leq C^k \leq C_{\max}^k \quad k=1 \dots K \tag{48}$$

où

$$C_{\min}^k \stackrel{\Delta}{=} \min_{[T_{ij}^k]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k \tag{49}$$

sous  $30-k$ ,  $31-k$  et  $32-k$ , et

$$C_{\max}^k \stackrel{\Delta}{=} \min \left( C, \max_{[T_{ij}^k]} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^k T_{ij}^k \text{ sous } 30-k, 31-1k \right) \tag{50}$$

Des algorithmes de type gradient pourront aussi être utilisés ici pour résoudre ce problème maître. On a en effet :

$$\left. \begin{aligned} & \frac{dH_k}{dC^k|*} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial H_k}{\partial T_{ij}^k|*} \cdot \frac{dT_{ij}^k}{dC^k|*} \\ \text{avec} & \left. \begin{aligned} & \frac{\partial H^k}{\partial T_{ij}^k|*} = -(1 + \text{Log}(T_{ij}^{*k}/f_{ij}^k)) \\ & \frac{dT_{ij}^k}{dC^k|*} = M_{ij}(T_{ij}^{*k}) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & i=1 \dots N \\ & j=1 \dots N \end{aligned} \quad k=1 \dots K \tag{51} \end{aligned}$$

où  $[M_{ij}]$  est une matrice dont l'expression est donnée en Annexe I.

Prenant par exemple comme direction de recherche à l'itération  $t$ ,  $\underline{d}^t$  telle que :

$$d_t^k = \frac{dH_k}{dC_k|*} \quad k=1 \dots K \tag{54}$$

une nouvelle répartition des coûts pourra être choisie telle que :

$$C_{t+1}^k = C_t^k + \sigma^t \cdot D_t^k \quad k=1 \dots K \tag{55}$$

où  $\underline{D}'$  est la projection de  $\underline{d}'$  sur l'hyperplan orthogonal au vecteur  $(1, 1, 1, \dots, 1)$  de  $\mathbb{R}^K$  et  $\sigma'$  est un scalaire positif choisi de façon à satisfaire les relations (46).

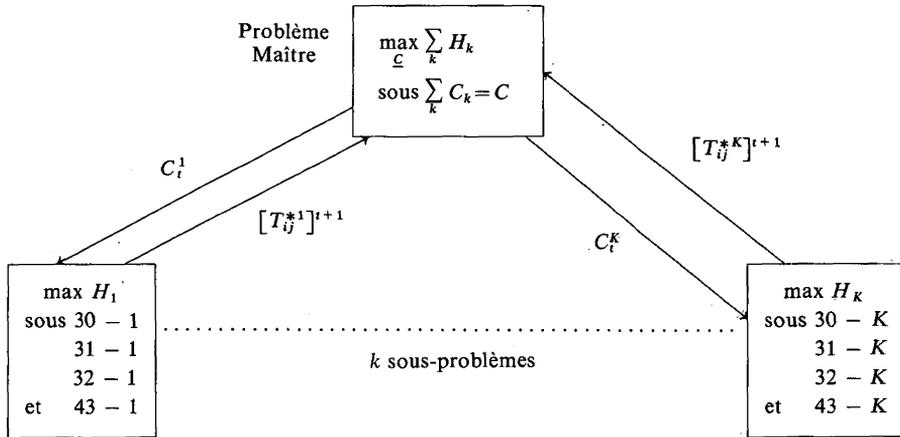


Figure 2. — Schéma de décomposition-coordination par allocation de ressources

7. COMPARAISON ET INTERPRÉTATION DES DEUX APPROCHES

Du point de vue numérique les deux méthodes de décomposition-coordination présentées précédemment conduisent en ce qui concerne la résolution du problème maître à des volumes de calcul équivalents. En ce qui concerne les sous-problèmes à traiter, la première méthode conduit à la résolution de  $k$  problèmes de distribution sans restriction de coût, ce qui permet l'utilisation d'algorithmes extrêmement simples à programmer et de convergence satisfaisante (excepté dans quelques cas pathologiques [11]). Par contre, les sous-problèmes relatifs à la méthode de décomposition-coordination par allocation de ressources, devront être résolus à l'aide d'un algorithme spécial de programmation convexe qui tient compte de la non dérivabilité à l'origine des fonctions  $H_k([T_{ij}^k])$ . Ceci conduira dans ce dernier cas à des calculs extrêmement lourds [14].

Pourtant, il faut aussi remarquer que si la première méthode semble conduire à des calculs plus simples au niveau de chaque itération, la satisfaction des restrictions originales du problème  $P_6$  ne sera garantie qu'à la convergence finale de l'algorithme, les solutions intermédiaires  $[T_{ij}^{*k}]^i, k=1, \dots, K$ , pouvant ne pas satisfaire la relation (33) du problème initial. Par contre, la deuxième méthode fournira quant à elle des solutions intermédiaires globalement admissibles.

En ce qui concerne l'interprétation des mécanismes de coordination des sous-problèmes les deux méthodes conduisent à des considérations extrêmement utiles pour la compréhension du phénomène d'arbitrage. En effet, dans le premier cas tout se passe comme si la « coordination par les prix », est remplacée par une « coordination par les probabilités *a priori* ». Dans ce cas, à chaque itération une nouvelle estimation des probabilités *a priori* de distribution de voyage pour chacun des modes de transport est fournie par le problème maître. Ainsi, un choix initial convenable par le planificateur de ces probabilités conduira à une convergence rapide de la méthode proposée.

Dans le deuxième cas, la coordination de sous-problèmes peut être interprétée comme la prédiction des niveaux de sensibilité de la population relativement aux divers coûts modaux, puisque les variables de coordination  $C^k$  pourront être remplacées par ces niveaux de sensibilités données par l'expression :

$$s^k = \frac{\tilde{C}^k - C^k}{\tilde{C}^k - C_{\min}^k} \quad k = 1, \dots, K \quad (56)$$

où les paramètres  $C_{\min}^k$ ,  $k = 1, \dots, K$ , suivent la définition (49) et où :

$$\tilde{C}^k = \sum_{i,j=1}^K C_{ij}^k \cdot \tilde{T}_{ij}^k \quad k = 1, \dots, K \quad (57)$$

$[\tilde{T}_{ij}^k]$  étant la solution du problème de maximisation ( $\max H^k$  sous  $30 - k$ ,  $31 - 1k$  et  $32 - k$ ,  $k = 1, \dots, K$ ).

Dans ce cas aussi, le planificateur des transports, familier avec ces paramètres caractéristiques de la demande de transport, pourra fournir une bonne prévision initiale des niveaux de sensibilité qui conduira à une convergence rapide de la méthode proposée vers la solution globale du problème.

## 8. CONCLUSION

Dans cette étude relative à l'emploi de modèles de maximisation de fonctions d'entropie pour la résolution du problème de prévision simultanée de la distribution spatiale et modale des flux de transport, une typologie des situations que peuvent se présenter au planificateur est proposée. Dans l'un des cas considérés, l'utilisation des techniques classiques de décomposition-coordination du Calcul Hiérarchisé, permet de ramener la résolution numérique du problème de grandes dimensions obtenu, à celle d'une série de sous-problèmes pour lesquels existent des méthodes bien établies de résolution. Le mécanisme de coordination entre chacun de ces sous-problèmes est interprété à l'aide de concepts propres à la discipline de planification des transports (distributions *a priori* de voyages et niveaux de sensibilité de la population

considérée aux coûts de transport) permettant ainsi le choix judicieux (par le planificateur) des valeurs initiales des variables de coordination entre les sous-problèmes.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. BACHARACH, Estimating nonnegatives matrices from marginal data. *International Economic Review*, vol. 6, n° 3, 1965.
2. R. FAGES et M. GANGNET, Sur les modèles probabilistes de prévisions des localisations et des déplacements dans une agglomération. *R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle*, vol. 11, n° 3, 1977.
3. K. P. FURNESS, Time function iteration. *Traffic Engineering & Control*, vol. 7, n° 7, 1965.
4. L. Z. GRANJA, *Contribuição ao Estudo Teórico de Modelos de Distribuição de Viagens*. Thèse de Doctorat, COPPE/UFRJ, 1981.
5. L. Z. GRANJA et F. MORA-CAMINO, *Considerações Teóricas sobre a Solução do Modelo Entrópico de Distribuição de Viagens*. XIV<sup>e</sup> Congrès de la Société Brésilienne de Recherche Opérationnelle, Rio de Janeiro, 1981.
6. J. KRUIHOF, *Calculation of Telephone Traffic*. De Ingenieur, n° 52, 1937.
7. B. LAMOND, *Balancement de matrices et optimisation d'entropie*. Centre de Recherche sur les Transports, Montréal, Publication 211, 1980.
8. L. S. LASDON, *Optimization theory for large systems*. The McMill, Co., 1970.
9. H. P. L. LUNA, *Les Techniques de décomposition-coordination pour les modèles économiques d'optimisation*. Thèse d'état, Toulouse, 1978.
10. F. MORA-CAMINO et L. Z. GRANJA, *Planification décentralisée pour les systèmes de transport: une approche mixte*. Symposium IFAC/IFORS, Toulouse, 1979.
11. P. ROBILLARD et N. F. STEWART, Iterative Numerical Methods for Trip Distribution Problems. *Transp. Res.*, vol. 8, 1974.
12. A. M. VALENTE, L. Z. GRANJA et F. MORA-CAMINO, *Resolução Numérica do Problema de Distribuição: Análise de Alguns Algoritmos*. I. Congresso Latino Americano de Pesquisa Operacional, Rio de Janeiro, 1982.
13. A. G. WILSON, *Urban and Regional Models in Geography and Planning*. John Wiley & Sons, 1974.
14. P. A. BECK et J. G. ECKER, A Modified Concave Simplex Algorithm for Geometric Programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 15, n° 2, 1975.

ANNEXE I

ANALYSE DE SENSIBILITÉ

Le problème  $P_6$  peut s'écrire sous la forme :

$$\max_t \mathcal{H}(t) \quad \text{avec} \quad A \cdot \underline{t} = \underline{b} \tag{A-1}$$

où  $\underline{t}' = (T_{11}^1, T_{i2}, \dots, T_{NN}^K) \in \mathbb{R}^{+N^2 \cdot K}$

Les conditions nécessaires (et suffisantes) d'optimalité s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + A' \cdot \underline{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad A \cdot \underline{t} - \underline{b} = 0 \quad (\text{A-2})$$

où  $\underline{\gamma}$  est un vecteur de paramètres de Lagrange.

Autour de la solution  $(\underline{t}^*, \underline{\gamma}^*)$  du système d'équations (A-2), on a :

$$\frac{d}{dP} \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + A' \cdot \underline{\gamma} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dP} (A \cdot \underline{t} - \underline{b}) = 0 \quad (\text{A-3})$$

où  $\underline{P}$  est constitué d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{P}$  des paramètres du problème (A-1), avec :

$$\mathcal{P} = \{ f_{11}^1, \dots, f_{NN}^k, C_{11}, \dots, C_{NN}, O_1, \dots, O_N, D_1, \dots, D_N, C \} \quad (\text{A-4})$$

Les relations (A-3) s'écrivent aussi, le '.' indiquant la dérivation directe par rapport aux paramètres :

$$\left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_* \cdot \dot{\underline{t}} + \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial P \partial t} \right]_* \cdot \dot{\underline{P}} + A' \cdot \underline{\gamma}^* + A' \cdot \dot{\underline{\gamma}} = \underline{0} \quad (\text{A-5})$$

$$\text{et} \quad A \cdot \underline{t}^* + A \cdot \dot{\underline{t}} - \dot{\underline{b}} = \underline{0} \quad (\text{A-6})$$

Supposant que la solution  $\underline{t}^*$  est strictement positive et que  $A$  est de rang plein, les matrices inverses de

$$\left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_* \quad (= \text{diag} (-1/t_l^*, l=1 \dots N^2 \cdot K) \quad \text{et} \quad \left[ A \cdot \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} A' \right]$$

existent, et les relations (A-5) et (A-6) se réécrivent :

$$\dot{\underline{t}} = - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} \left( \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial t} \right]_* \cdot \dot{\underline{P}} + A' \cdot \underline{\gamma}^* + A' \cdot \dot{\underline{\gamma}} \right) \quad (\text{A-7})$$

et

$$\dot{\underline{\gamma}} = \left[ A \cdot \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} A' \right]^{-1} \left( -A \cdot \dot{\underline{t}}^* + \dot{\underline{b}} - A \cdot \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} \cdot \left( \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial t} \right]_* \cdot \dot{\underline{P}} + A' \cdot \underline{\gamma}^* \right) \right) \quad (\text{A-8})$$

Choissant  $\underline{P}' = (f_{11}^1, \dots, f_{NN}^k)$ , on aura :

$$\dot{\underline{t}} = - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} \cdot \left( \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p \partial t} \right]_* + A' \cdot \left[ A \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} A' \right]^{-1} \cdot A \cdot \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_* \right) \cdot \dot{\underline{P}} \quad (\text{A-9})$$

ou encore  $\dot{\underline{t}} = \mathcal{S} \cdot \dot{\underline{P}}$ ,  $\mathcal{S}$  étant la matrice de la relation (44).

Choissant  $P=C$ , on aura :

$$\dot{\underline{t}} = M \cdot \dot{\underline{b}} \quad \text{avec} \quad M = - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} \cdot A' \cdot \left[ A \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} \right]_*^{-1} A' \right]^{-1} \quad (\text{A-10})$$

où  $M$  est la matrice de la relation (53).