

G. PUJOLLE

AI WU

## **Approximation par un processus de diffusion de files GI/GI/1 avec dépendance de l'état**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 19, n° 2 (1985), p. 117-131

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1985\\_\\_19\\_2\\_117\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1985__19_2_117_0)

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## **APPROXIMATION PAR UN PROCESSUS DE DIFFUSION DE FILES GI/GI/1 AVEC DÉPENDANCE DE L'ÉTAT (\*)**

par G. PUJOLLE <sup>(1)</sup> et WU AI <sup>(2)</sup>

---

Résumé. — *La file GI/GI/1 avec un temps de service dépendant du nombre de clients dans la file d'attente, n'a de solution connue que lorsque les processus d'arrivées et de service sont exponentiellement distribués. Nous proposons dans cet article, une approximation par un processus de diffusion pour résoudre le cas général. Des solutions explicites sont obtenues pour les files GI/GI/m. De plus, nous proposons une méthode générale pour étudier un réseau de files d'attente GI/GI/m.*

Mots clés : Files d'attente; réseau; approximation par diffusion.

Abstract. — *The GI/GI/1 queue with state dependant service times has no solution as soon as arrival and departure are not exponentially distributed. In this paper we obtain the steady state probabilities using a diffusion approximation. Closed solutions are obtained for GI/GI/m queues. Moreover, we propose a general method to study a queueing network of GI/GI/m queues.*

Keywords: Queues; network; diffusion approximation.

### **INTRODUCTION**

La plupart des systèmes informatiques peuvent se modéliser par l'intermédiaire de files d'attente ou de réseaux de files d'attente. Or actuellement on ne sait résoudre mathématiquement que très peu de modèles. Si on suppose une discipline de service de la file d'attente du type premier entré, premier sorti (FIFO) on sait bien résoudre le cas où le processus des arrivées de l'extérieur est un processus de poisson et où les temps de service des guichets sont exponentiellement distribués. Si la file est unique on arrive tant bien que mal à résoudre quelques autres cas, mais si l'on considère un réseau, nous ne

(\*) Reçu en juillet 1983.

<sup>(1)</sup> Université P. et M. Curie, Institut de Programmation, 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

<sup>(2)</sup> E.N.S.T., 46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13.

possédons pas de solution. Or dans la plupart des systèmes, il est rare de trouver des lois exponentielles (bien que ce soit de bonnes approximations des lois que l'on rencontre naturellement). De plus, les serveurs sont influencés par le nombre de clients en attente. Dans un commerce, la personne qui sert la file d'attente a tendance à accélérer lorsqu'il y a beaucoup de monde, au contraire sur une autoroute, plus il y a de monde et plus le service est lent. Et ceci, jusqu'à l'extrême puisque l'on arrive à un service nul dans le cas d'embouteillage monstre.

Les systèmes informatiques se comportent exactement de la même façon : les divers serveurs sont très influencés en bien ou en mal par les files d'attente. Il faut donc introduire dans les modèles, des files d'attente dont les serveurs sont dépendants de l'état et en particulier du nombre de clients. De nouveau, si les temps de service sont exponentiellement distribués avec une arrivée poissonnienne, nous savons résoudre, mais pas dans les autres cas. Le but de cet article est d'introduire une solution approximative à ce genre de files d'attente. La méthode mathématique utilisée est l'approximation par les processus de diffusion qui permettent de tenir compte des deux premiers moments de la loi des intervalles entre arrivée et des lois de service [2, 6, 8].

Nous considérons une file d'attente GI/GI/1 dans laquelle le temps de service dépend de l'état de la file. La discipline de service est premier arrivé, premier servi (FIFO). Cette file est très utilisée pour modéliser les systèmes informatiques ou autres systèmes dans lesquels le temps de service est plus ou moins long suivant le nombre de clients en attente dans la file.

La dépendance est représentée par la moyenne  $\mu^{-1}(n)$  et le carré du coefficient de variation  $Ks(n)$  de la loi de service de la station. Il faut remarquer qu'une telle dépendance n'est définie directement que pour une loi exponentielle ou pour une file d'attente avec loi générale indépendante et un nombre de guichets  $m$ .

Dans la deuxième partie nous développons une méthode pour étudier un réseau général de files GI/GI/ $m$ .

#### ÉTUDE DE LA FILE GI/GI/1 AVEC DÉPENDANCE DE L'ÉTAT PAR DIFFUSION

Soit  $N(t)$  le nombre de clients dans la file au temps  $t$  et  $A(t)$ ,  $D(t)$  respectivement le nombre de clients entrés dans la file et sorties de la file dans l'intervalle  $[0, t]$ . Si on suppose que le nombre de clients à l'état initial est nul on a :

$$N(t) = A(t) - D(t).$$

Lorsque la file n'est pas vide, le processus  $N(t)$  possède les propriétés suivantes : si  $t > s$ ,  $N(t) - N(s)$  est indépendant de  $N(s)$ ; si  $t - s$  est suffisamment grand,  $N(t) - N(s)$  tend vers une loi normale de dérive  $\beta(t - s)$  et de variance  $\alpha(t - s)$ . En effet, par le théorème limite centrale  $A(t)$  et  $D(t)$  tendent vers une loi normale et  $N(t)$  est la différence de deux lois normales donc une loi normale. Ceci est vérifié si les deux processus sont indépendants, ce qui est vrai si la file n'est pas vide. Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  sont obtenues de la façon suivante :

$$\beta(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E \{ N(t + \Delta t) - N(t) / N(t) = x \}}{\Delta t}$$

$$\alpha(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\text{Var} \{ N(t + \Delta t) - N(t) / N(t) = x \}}{\Delta t}$$

En supposant que  $N(t)$  est un processus de renouvellement et en appliquant les théorèmes limites nous avons :

$$\beta(x) = \lambda - \mu(x)$$

$$Ks(x) = \lambda Ka + \mu(x)Ks(x)$$

$N(t)$  est un processus de saut qui peut être approché par un processus continu  $X(t)$  dont les variations  $\Delta X(t)$  sont distribuées suivant la loi normale avec dérive  $\beta$  et variance  $\alpha$ . Le processus  $X(t)$  est alors défini par l'équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = \beta dt + Z(t)\sqrt{\alpha dt}$$

où  $Z(t)$  est un bruit blanc.

Si aucune barrière n'est imposée le processus  $X(t)$  est un mouvement Brownien dont la distribution de probabilité  $f(x, t)$  satisfait l'équation de Fokker Plank :

$$f(x, t) = \text{Prob} \{ x \leq X(t) \leq x + dx / X(0) = 0 \}$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha(x, t) f(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta(x, t) f(x, t)}{\partial x}$$

Pour notre problème, il faut tenir compte d'une barrière au point 0. En effet, la longueur de la file d'attente est supérieure ou égale à 0. Nous utiliserons une barrière absorbante avec retour instantané au point 1 qui reflète le fait que lorsque le système est vide, après un temps moyen  $\Lambda$  dans l'état 0 donc sur la barrière, le processus repart ensuite de l'état 1 au moment d'une arrivée dans le système.

L'équation de Fokker Plank est légèrement modifiée et il faut y ajouter

des conditions limites sur la barrière. Ceci donne à l'état d'équilibre, en enlevant la variable temps [2].

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 [\alpha(x)f(x)]}{dx^2} - \frac{d[\beta(x)f(x)]}{dx} &= -\Lambda P(0)\delta(x-1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d[\alpha(x)f(x)]}{dx} - \beta(x)f(x) \right\} &= \Lambda P(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

où  $\Lambda$  est le temps moyen passé sur la barrière,  $P(0)$  est la probabilité que le système soit vide,  $\delta(x-1)$  est la fonction de Dirac au point 1.

La solution de la première équation s'écrit :

$$f(x) = \frac{D(x)}{\alpha(x)} \exp \left[ 2 \int_0^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt \right] \frac{D(x)}{\alpha(x)} \exp [\gamma(x)] \quad (1.2)$$

où

$$\gamma(x) = 2 \int_0^x \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt$$

$D(x)$  est déterminé par la condition frontière :

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_0^x 2\Lambda P(0) [1 - \Phi] \exp [\gamma(u)] du \\ &= \Lambda P(0) \int_0^{\min(x,1)} \exp [\gamma(u)] du \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $\Phi$  est la fonction de Heaviside.

La discrétisation du processus continu est faite par

$$P(n) = f(n) \quad (1.4)$$

où  $P(n)$  est la probabilité d'avoir  $n$  clients dans la file à l'état d'équilibre. Donc la formule s'écrit comme

$$P(n) = \frac{D(n)}{\alpha(n)} \exp \left[ \int_0^n \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} dt \right] \quad (1.5)$$

Supposons que  $\beta(t)$  et  $\alpha(t)$  soient des fonctions en escalier :  $\beta(t) = \lambda - \mu(n)$  et  $\alpha(t) = \lambda K a + \mu(n) K s(n)$  dans l'intervalle  $[n, n+1[$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; et que  $\beta(0) = 0$  dans l'intervalle  $[0, 1[$ . La formule (1.5) devient:

$$\begin{aligned} P(n) &= \frac{D(n)}{\alpha(n)} \exp 2 \left[ \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} + \frac{\beta(2)}{\alpha(2)} + \dots + \frac{\beta(n-1)}{\alpha(n-1)} \right]; \quad n = 2, 3, \dots \\ P(1) &= \frac{D(1)}{\alpha(1)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Soit  $\hat{\rho}(k) = \exp \left[ 2 \frac{\beta(k)}{\alpha(k)} \right]$ ,  $D(n) = P(0)C(n)$ ,  $C(0) = 0$ ,

on a alors :

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{D(n)}{P(0)} = 2\Lambda \int_0^{\min(n,1)} \exp [\gamma(u)] du \\ &= 2\Lambda \int_0^1 \exp \left[ 2 \frac{\beta(1)}{\alpha(1)} u \right] du \\ &= \Lambda \frac{\alpha(1)}{\beta(1)} [\hat{\rho}(1) - 1] = C(1) \end{aligned}$$

Nous savons que  $\Lambda = \lambda$ ,  $\alpha(1) = \lambda K a + \mu(1) K s(1)$ ,  $\beta(1) = \lambda - \mu(1)$ .  $C(n)$  s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned} C(n) &= \frac{\lambda [\lambda K a + \mu(1) K s(1)]}{\lambda - \mu(1)} [\hat{\rho}(1) - 1] \\ &= \alpha(1) \frac{\lambda}{\mu(1)} \frac{\hat{\rho}(1) - 1}{\frac{\lambda}{\mu(1)} - 1} \\ &= \alpha(1) \cdot \rho \frac{\hat{\rho}(1) - 1}{\rho - 1} \\ &= \alpha(1) \cdot C \end{aligned}$$

où 
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu(1)}, \quad C = \rho \frac{\hat{\rho}(1) - 1}{\rho - 1}$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} P(n) &= P(0) \cdot C \cdot \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}(k); \quad n = 2, 3, 4, \dots \\ P(1) &= P(0)C; \end{aligned} \tag{1.7}$$

avec 
$$C = \rho \frac{1 - \hat{\rho}(1)}{1 - \rho}.$$

La valeur de  $P(0)$  est obtenue par normalisation  $\sum_{i=1}^{\infty} P(i) = 1$  :

$$P(0) = \left[ 1 + C + C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}(k) \right]^{-1}. \tag{1.8}$$

Si  $\alpha(k) = \alpha$ ,  $\beta(k) = \beta$  (le cas GI/GI/1 sans dépendance de l'état), à partir de la formule (1.7) on retrouve des résultats connus [2]:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(k) &= \exp\left[2\frac{\beta}{\alpha}\right] = \hat{\rho}, \\ P(n) &= P(0)C\hat{\rho}^{n-1} \quad n > 1 \\ P(1) &= P(0)C \quad n=1 \quad \text{et} \quad C = \rho \frac{1-\hat{\rho}}{1-\rho} \\ P(0) &= \left[1 + C + C \sum_{k=2}^{\infty} \hat{\rho}^{k-1}\right]^{-1} \\ &= \left[1 + C \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\rho}^{n-1}\right]^{-1} \\ &= 1 - \rho, \\ P(n) &= \rho(1-\hat{\rho})\hat{\rho}^{n-1} \quad n \geq 1 \quad \text{avec} \quad \hat{\rho} = \exp\left[\frac{2\beta}{\alpha}\right], \\ P(0) &= 1 - \rho, \\ E[n] &= \frac{\rho}{1-\hat{\rho}}.\end{aligned}$$

Pour la file M/M/1 on a  $Ka = Ks = 1$ . Il y a deux cas à considérer :

(1) la loi de service dépend de l'état de la file

$$\hat{\rho}(k) = \exp\left(2\frac{\lambda - \mu(k)}{\lambda + \mu(k)}\right) \simeq \rho(k) = \frac{\lambda}{\mu(k)}, \quad (1.9)$$

La formule (1.7) devient :

$$\begin{aligned}P(n) &= P(0) \prod_{i=1}^n \rho(k), \\ P(0) &= 1 - \rho, \quad \rho(k) = \frac{\lambda}{\mu(k)}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu(1)},\end{aligned} \quad (1.10)$$

(2) La loi de service ne dépend pas de l'état de la file avec l'hypothèse (1.9), la formule (1.7) devient :

$$\begin{aligned}P(n) &= P(0)\rho^n \quad n \geq 1 \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \\ P(0) &= 1 - \rho\end{aligned} \quad (1.11)$$

Ce sont des résultats classiques.

### File GI/GI/m

Avec  $m$  serveurs identiques, le taux de service est le suivant :

$$\mu(k) = \begin{cases} k\mu & k \leq m, \\ m\mu & k > m, \end{cases} \quad \mu \text{ est le taux de service d'un serveur.} \quad (2.1)$$

Cela signifie que :

$$\begin{aligned} \mu(k) &= \min(k, m) \cdot \mu \\ Ks(k) &= Ks \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \beta(n) &= \lambda - \mu \cdot \min(n, m), \\ \alpha(n) &= \lambda Ka + \mu \cdot \min(n, m) \cdot Ks. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dans ce cas-là, la formule (1.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} P(1) &= P(0)C & n = 1, \\ P(n) &= P(0)C \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}(k) & 1 \leq n \leq m, \\ P(n) &= P(0)C \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)} \prod_{k=1}^{m-1} \hat{\rho}(k) [\hat{\rho}(m)]^{n-m} & n > m, \end{aligned} \tag{2.3}$$

où 
$$C = \rho \frac{1 - \hat{\rho}(1)}{1 - \rho}, \quad \hat{\rho}(k) = \exp \left[ \frac{2(\lambda - k\mu)}{\lambda K\alpha - k\mu \cdot Ks} \right],$$

$P(0)$  est obtenu par la formule (1.8):

$$\left[ P(0) = 1 + C + C\alpha(1) \sum_{n=2}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\hat{\rho}(j)}{\alpha(m)} + C \frac{\alpha(1)}{\alpha(n)} \frac{\prod_{j=1}^{m-1} \hat{\rho}(j)}{1 - \hat{\rho}(m)} \right]^{-1} \tag{2.4}$$

La longueur moyenne de la file est :

$$E[n] = P(0)C \left[ 1 + \alpha(1) \sum_{n=2}^{m-1} \frac{n}{\alpha(n)} \prod_{k=1}^{n-1} \hat{\rho}(k) + \frac{\alpha(1)}{\alpha(m)} \frac{m - (m-1)\hat{\rho}(m)}{[1 - \hat{\rho}(m)]^2} \prod_{k=1}^{m-1} \hat{\rho}(k) \right] \tag{2.5}$$

La charge moyenne d'une station est calculée par :

$$A_m = 1 - P(0) \tag{2.6}$$

Le temps de réponse est obtenu par la formule de Little [9] :

$$T_m = E[n] / \lambda \tag{2.7}$$

Prenons l'exemple de la file GI/GI/2, selon la formule (2.3), (2.4), on a :

$$\begin{aligned} P(1) &= P(0)C \\ P(2) &= P(0)C \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \hat{\rho}(1) \\ P(n) &= P(0)C \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \hat{\rho}(1) [\hat{\rho}(2)]^{n-2}, \\ P(0) &= \left[ 1 + C + C \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \frac{\hat{\rho}(1)}{1 - \hat{\rho}(2)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

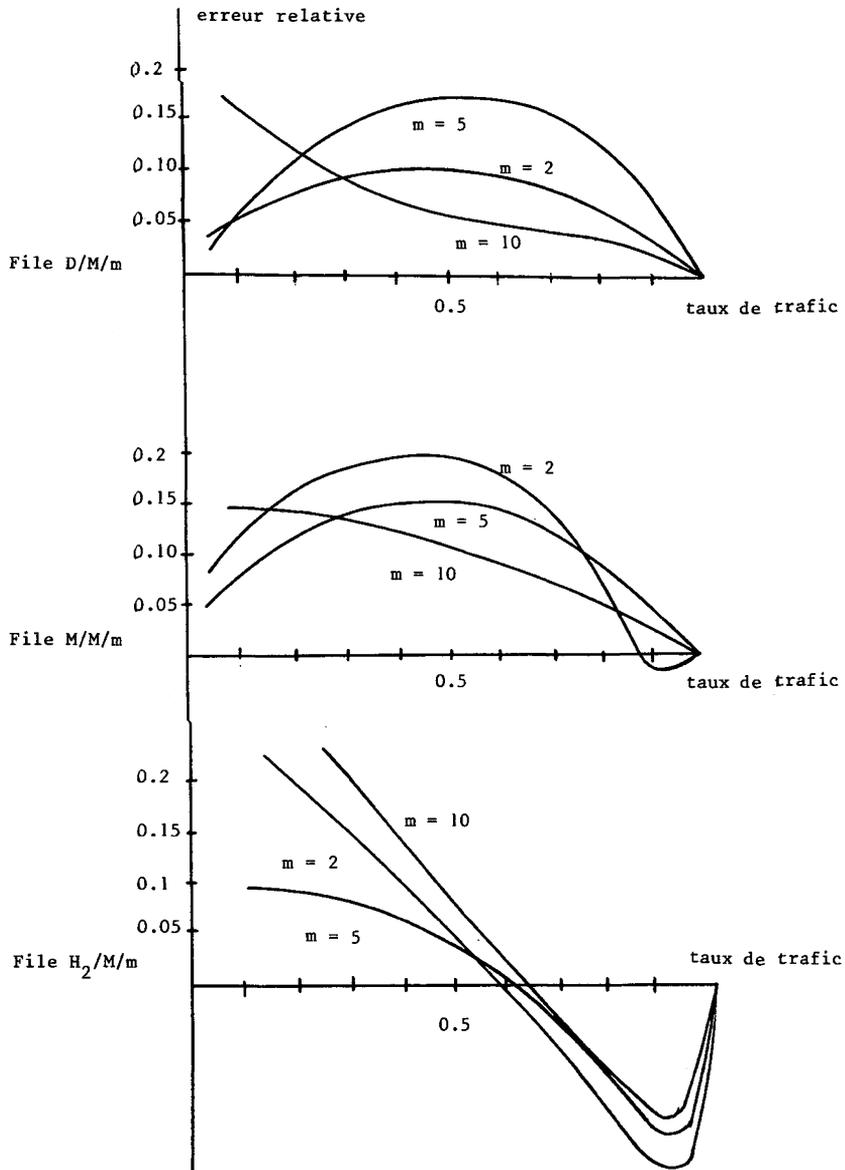


Figure 1. — Erreur relative de diverses files d'attente en fonction du taux de trafic.

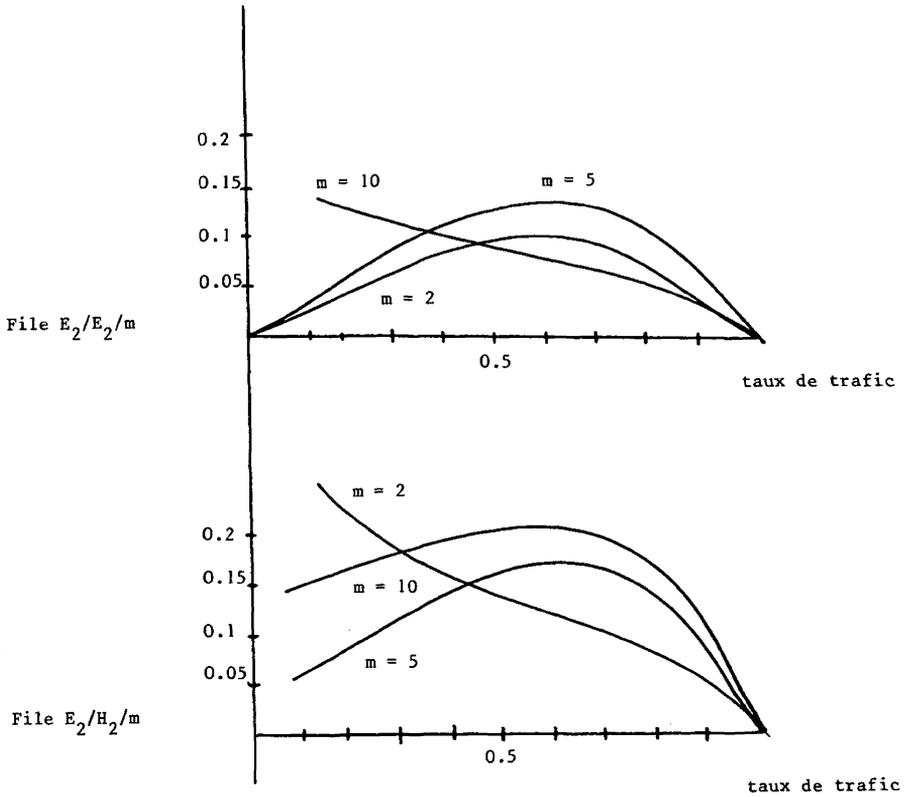


Figure 1. — Erreur relative de diverses files d'attente en fonction du taux de trafic.

Le nombre moyen de clients dans la file et la charge moyenne sont calculés par :

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(n) \\ &= P(1) + \sum_{n=2}^{\infty} P(1) \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \hat{\rho}(1)n [\hat{\rho}(2)]^{n-2}, \\ &= P(1) \left[ 1 + \hat{\rho}(1) \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \frac{2 - \hat{\rho}(2)}{[1 - \hat{\rho}(2)]^2} \right], \\ A_m &= 1 - \left[ 1 + C + C \frac{\alpha(1)}{\alpha(2)} \frac{\hat{\rho}(1)}{1 - \hat{\rho}(2)} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

La figure 1 montre les résultats des calculs effectués à partir des formules (2.5) et (2.6) pour différentes valeurs de  $Ka$ ,  $Ks$ ,  $\lambda/m\mu$  et  $m$ . Les résultats sont

comparés avec ceux obtenus par une simulation ou par des méthodes exactes si elles existent.

Le nombre de serveurs est 2, 5 ou 10. Nous donnons l'erreur relative en fonction du trafic dans la file  $GI/GI/m$ , c'est-à-dire pour  $\rho = \lambda/m\mu$  variant de 0 à 1. Les valeurs de  $Ka$  et  $Ks$  varient entre 0 et 2.

Les résultats trouvés montrent que l'erreur relative est très souvent inférieure à 10 % et qu'elle augmente en général lorsque le carré du coefficient de variation dépasse ou atteint 2. De même, l'erreur relative peut devenir grande lorsque le taux d'utilisation des ressources est faible. Cependant l'erreur absolue est toujours très petite dans ces différents cas.

### RÉSEAU OUVERT AVEC FILES $GI/GI/m$

Supposons un réseau de  $N$  stations. La discipline de service est FIFO sans priorité. Les lois d'arrivée et de service sont identiques pour tous les clients (une seule classe). La  $i^{\text{ème}}$  station possède  $m_i$  serveurs identiques. Chaque serveur est caractérisé par un taux de service  $\mu_i^{-1}$  et un carré de coefficient de variation (CCV)  $Ks_i$ .

Les probabilités de transition d'un client d'une station à l'autre sont déterminées par une chaîne Markovienne de matrice de transition  $P = \{p_{ij}\}$ .

Le flot de clients arrivant de l'extérieur est caractérisé par le taux d'arrivée  $\lambda_0$  et le CCV  $Ka_0$ . Un client de l'extérieur va dans la  $i^{\text{ème}}$  station avec une probabilité  $p_{0i}$  et quitte le système de la  $i^{\text{ème}}$  station avec une probabilité  $P_{iN+1}$ .

Nous allons utiliser une méthode approximative — la méthode de décomposition [2] pour résoudre ce problème. Elle consiste à étudier chaque file du réseau par une décomposition file par file du réseau. Les distributions des temps de ser-

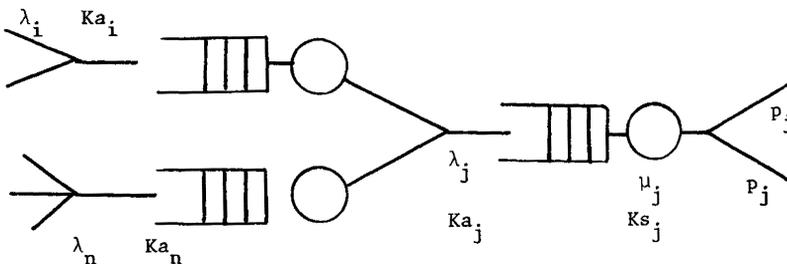


Figure 2. — Méthode de décomposition consistant à calculer les valeurs de  $\lambda_j$  et  $Ka_j$ .

vice et des intervalles de temps entre deux arrivées successives d'une station sont caractérisées par leurs deux premiers moments, ce qui nous permettra d'utiliser les formules de diffusion présentées dans la première partie. La méthode de décomposition est représentée par le schéma de la figure 2.

- $\lambda_j$  — le taux d'arrivées du flot entrant dans la station  $j$ ;
- $\mu_j$  — le taux de service de la station  $j$ ;
- $Ka_j$  — CCV du flot entrant ;
- $Ks_j$  — CCV de la loi de service de la station  $j$ ;
- $C_j$  — CCV du flot sortant de la station  $j$ ;

Nous ferons l'hypothèse suivante : le processus de départ de n'importe quelle station est un processus de renouvellement : l'intervalle de temps entre deux départs ne dépend pas des intervalles précédents. Cette hypothèse est exacte dans le cas d'arrivées poissoniennes et de services distribués exponentiellement ou bien lorsque la station est saturée.

Soit  $e=(e_1, e_2, \dots, e_N)$  la solution du système linéaire  $e=P_0+eP$  où  $P_0=\{P_{0i}\}$ ,  $P=\{p_{ij}\}$ . La valeur de  $\lambda_j$  est obtenue par l'équation  $\lambda_j=\lambda_0 e_j$  où  $e_j$  est le nombre moyen de visite à la station  $j$  par un client pendant son séjour dans le système.

Dans le but de ne déterminer que le processus de départ, nous remplacerons  $m_j$  serveurs par « un serveur » dont la fonction de distribution  $G(t)$  est choisie pour satisfaire  $G(t)=F(m_j t)$  où  $F(t)$  est la fonction de distribution d'un des  $m_j$  serveurs identiques. La précision de cette approche pour le processus de départ est évaluée par Arjas [3].

Avec cette approche, on obtient :

$$\hat{\mu}_j = m_j \mu_j \quad (3.1)$$

$$K \hat{s}_j = K s_j \quad (3.2)$$

La charge moyenne de la station  $j$  est calculée par :

$$\hat{\rho}_j = \frac{\lambda_j}{\hat{\mu}_j} = \frac{\lambda}{m_j} \frac{e_j}{\mu_j} \quad (3.3)$$

La valeur de  $Ka_j$  est déterminée par l'utilisation du théorème limite centrale [6] :

$$Ka_j = \frac{1}{\lambda_j} \sum_{i=0}^N [(C_i - 1)p_{ij} + 1] \lambda_i p_{ij} \quad (3.4)$$

La valeur de  $C_i$  peut être prise comme dans l'approche de Reiser-

Kobayashi [7] qui consiste à prendre  $C_j = Ks_j$ . Une meilleure approximation de  $C_j$  est donnée par Gelenbe Pujolle [10] :

$$C_j = \hat{\rho}_j(Ks_j - 1) + Ka_j(1 - \rho_j) + \hat{\rho}_j \tag{3.5}$$

Cette formule est exacte pour les files  $M/Mm$  et  $M/M/\infty$  [4] [5].

En appliquant les familles (3.4) de (3.5), nous pouvons obtenir  $\{C_j\}$  et  $\{Ka_j\}$ .

Avec l'approximation par les processus de diffusion, nous pouvons appliquer les formules (2.5), (2.6) et (2.7) pour calculer les critères de performance de chaque station du réseau.

Nous avons pris comme exemple, le réseau de deux files d'attente décrit dans la figure 3. Les deux stations comportent trois serveurs. Le processus arrivant de l'extérieur est supposé exponentiellement distribué. Ce modèle peut représenter un système avec trois unités de traitement et une unité de disque composée de trois disques.

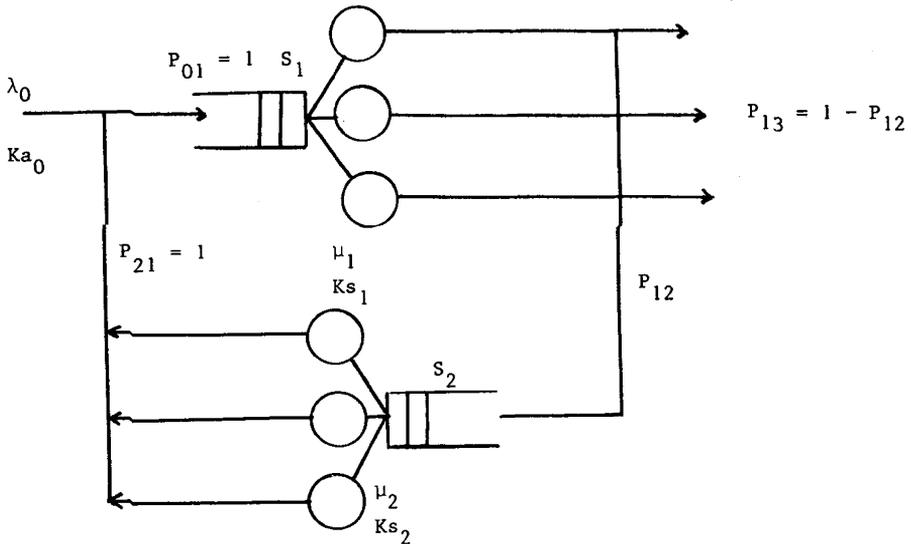


Figure 3. — Un réseau ouvert de files GI/GI/3.

Les résultats obtenus par l'approximation par les processus de diffusion décrit dans la première partie de cet article sont comparés à des résultats obtenus par simulation. Ils sont regroupés dans les tableaux 4.1 et 4.2. Les distributions des lois de service ont des CCV qui varient entre 0 et 3. Les résultats montrent que l'approximation est tout à fait concluante lorsque les carrés du coefficient de variation sont inférieurs à 2.

TABLEAU 4.1

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.0 & M &= 3 \\ \mu_1 &= 1.0 & \mu_2 &= 0.5 \\ \lambda_1 &= 2.0 & \lambda_2 &= 1.0 \end{aligned}$$

\* Résultats de la simulation

KS1	KS2	$P_1^*$	$N_1^*$	$N_2^*$	$\rho_1$	$N_1$	$N_2$	$\Delta N_1/N_1^*$	$N_0/N_2^*$
0.0	0.0	9113	2.338	2.497	983	2.55	2.55	0.09	0.02
	0.5	8938	2.385	2.585	976	2.58	2.85	0.08	0.1
	1.0	8963	2.5	2.813	968	2.62	3.22	0.05	0.14
	1.5	8930	2.526	2.702	959	2.65	3.63	0.05	0.34
	3.0	8889	2.611	3.349	935	2.79	4.93	0.07	0.47
0.5	0.0	9055	2.694	2.615	959	2.85	2.58	0.06	-0.01
	0.5	8928	2.676	2.772	951	2.89	2.89	0.08	0.04
	1.0	8945	2.779	2.956	942	2.94	3.27	0.06	0.11
	1.5	8897	2.743	2.768	934	2.99	3.69	0.09	0.33
	3.0	8744	2.626	3.161	912	3.16	5.04	0.203	0.59
1.0	0.0	9013	2.850	2.682	935	3.22	2.62	0.13	-0.02
	0.5	8720	2.886	2.864	927	3.27	2.94	0.13	0.03
	1.0	8839	2.839	2.821	919	3.33	3.33	0.17	0.18
	1.5	8819	2.873	2.933	912	3.39	3.75	0.2	0.28
	3.0	8799	2.786	3.290	892	3.57	5.11	0.28	0.55
1.5	0.0	8906	2.747	2.590	913	3.63	2.65	0.32	0.02
	0.5	8832	2.653	2.635	906	3.69	2.99	0.39	0.13
	1.0	8862	2.695	2.656	899	3.75	3.37	0.39	0.28
	1.5	8857	2.702	2.756	892	3.81	3.81	0.41	0.38
	3.0	8959	3.167	3.222	875	4.01	5.18	0.07	0.61

TABLEAU 4.2

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 1.0 & M &= 3 \\ \mu_1 &= 0.8 & \mu_2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 2.0 & \lambda_2 &= 1.0 \end{aligned}$$

\* Résultat de la simulation

KS1	KS2	$P_1^*$	$N_1^*$	$N_2^*$	$\rho_1$	$N_1$	$N_2$	$\Delta N/N_1^*$	$\Delta N/N_2^*$
0.0	0.0	9735	3.832	4.602	997	3.60	3.60	0.06	0.32
	0.5	9608	4.224	4.582	993	3.89	4.71	-0.08	0.03
	1.0	9637	4.848	6.431	988	4.20	5.87	-0.133	-0.09
	1.5	9553	4.288	4.983	982	4.51	7.07	0.05	0.419
	3.0	9558	5.135	6.536	964	5.49	10.7	0.07	-0.63
0.5	0.0	9578	4.551	4.265	990	4.71	3.89	0.03	0.09
	0.5	9617	5.677	6.203	985	5.02	5.02	-0.115	-0.19
	1.0	9524	4.988	5.073	979	5.34	6.02	0.07	0.19
	1.5	9.534	5.819	5.608	972	5.67	7.40	-0.03	0.32
	3.0	9506	6.787	10.38	955	6.68	11.1	-0.02	-0.07
1.5	0.0	9569	5.168	4.565	973	7.07	4.51	0.37	-0.01
	0.5	9604	6.453	5.842	967	7.40	5.67	0.15	-0.03
	1.0	9512	5.876	5.103	961	7.74	6.87	0.32	0.35
	1.5	9528	6.182	5.485	956	8.08	8.08	0.31	0.49
	3.0	9461	6.656	6.731	941	9.12	11.1	0.37	-0.72

## BIBLIOGRAPHIE

1. E. CINLAR, *Introduction to Stochastic processes*, Engle woods N. J. Cliffs, Prentice Hall, 1975.
2. E. GELENBE et G. PUJOLLE, *Introduction aux Réseaux de Files d'Attente*, Eyrolles, avril 1982.
3. E. ARJAS, *Approximation many server queues by means of single server queues*, Research Report 0-27, University of Onlu, Helsinki, 1977.
4. P. J. BURKE, The output of a queueing system, *Opns. Res.*, vol. 4, 1956, p. 699-704.
5. N. M. MIRASOL, The output of M/M/ $\infty$  queueing system is Poisson, *Opns. Res.*, vol. 11, 1963, p. 282-284.
6. H. KOBAYASHI, Application of the diffusion approximation to queueing network I, *J. ACM*, vol. 21, n° 2, 1974, p. 316-318.

7. M. REISER and H. KOBAYASHI, Accuracy of the diffusion approximation for some queueing system, *IBM J. res. Devel.*, vol. 18, n° 2, 1974, p. 110-124.
8. E. GELENBE et G. PUJOLLE, *A diffusion model for multiple class queueing networks* proc. of the 3rd International symposium on Modelling, Bonn 1977.
9. J.O.C. LITTLE, A proof of the queueing formula  $L = \lambda W$ , *Operations Research*, vol. 9, n° 3, 1961, p. 383-387.
10. E. GELENBE et G. PUJOLLE, Approximation to a single queue in a network, *Acta Informatica*, vol. 7, 1976, p. 123-136.