

JACQUES CARLIER

## **Le problème de l'ordonnement des paiements de dettes**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 18, n° 1 (1984), p. 43-57

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1984\\_\\_18\\_1\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_1_43_0)

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LE PROBLÈME DE L'ORDONNANCEMENT DES PAIEMENTS DE DETTES (\*)

par Jacques CARLIER <sup>(1)</sup>

**Résumé.** — *Dans cet article, nous modélisons un problème de paiements de dettes entre personnes à l'aide d'un graphe dont les sommets sont associés aux personnes et les arcs aux dettes.*

*Nous montrons d'abord que si l'on ajoute la contrainte imposant que chaque dette soit payée en une fois, le problème devient NP-difficile.*

*Nous énonçons ensuite une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du problème initial, et, proposons un algorithme déterminant une solution. Cet algorithme qui est fondé sur la décomposition d'un flot dans un réseau de transport a pour complexité  $O(n^3)$  si  $n$  est le nombre de personnes.*

*Nous montrons enfin que dans le cas où il n'existe pas de solution, le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal alors que le problème de la minimisation du nombre de personnes en faillite est NP-difficile.*

**Abstract.** — *In this paper, we modelize a problem of payments of debts between persons, by a graph the nodes of which are associated to the persons and the arcs to the debts.*

*First, we show that, if we add the constraint stating that every debt has to be paid in only one instalment, then the problem becomes NP-hard.*

*Then, we state a necessary and sufficient condition for the existence of a solution and propose an algorithm to determine one. This algorithm is based on the decomposition of a flow; its complexity is  $O(n^3)$ , with  $n$  persons.*

*At last, we show that, when some debts cannot be paid, the minimization of the unpaid debts is a problem of flow with minimum cost, and: the minimization of the number of bankrupts is a NP-hard problem.*

Keywords: Scheduling, polynomial time algorithm, NP complete problem.

### I. INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article le problème de paiements de dettes entre personnes — physiques ou morales. Nous supposons que chaque personne dispose initialement d'un certain capital et a des dettes et des créances envers d'autres personnes.

---

Mots clés : Ordonnancement, algorithme polynomial, problème NP-complet.

(\*) Reçu novembre 1982.

(<sup>1</sup>) Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, U.E.R. 50, Institut de Programmation, Tour 55-65, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

Un paiement partiel d'une dette par un débiteur à un créancier est « admissible » si la somme payée par le débiteur est inférieure à son capital et à sa dette envers le créancier.

Chaque dette est donc une tâche morcelable utilisant une ressource consommable, l'argent [2, 4, 8]; nous devons déterminer un ordonnancement de ces tâches [7].

Nous modélisons ce problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont associés aux personnes et les arcs aux dettes et l'illustrons à l'aide d'un exemple.

Nous prouvons que le problème devient *NP*-complet si nous ajoutons la contrainte imposant que les dettes soient payées en une seule fois.

Pour les cas qui autorisent les paiements morcelés, nous énonçons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution, puis présentons le schéma de la méthode de résolution et enfin l'algorithme. La complexité de cette méthode est  $O(n^3)$  si  $n$  est le nombre de personnes.

Nous montrons enfin que lorsqu'il n'existe pas de solution, le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal alors que le problème de la minimisation du nombre de personnes en faillite est *NP*-difficile.

## II. MODÉLISATION

### Graphe

L'état financier du système peut être modélisé à l'aide d'un graphe doublement valué  $G=(X, U, a, s)$  où  $X$  est l'ensemble des personnes et  $U$  l'ensemble des couples  $(x_i, x_j)$  tels que  $x_i$  ait une dette envers  $x_j$ ; le sommet  $x_i$  est valué par le capital initial  $a_i$  de  $x_i$ ; l'arc  $(x_i, x_j)$  est valué par la dette  $s_{ij}$  de  $x_i$  envers  $x_j$  (fig. 1).  $a$  désigne donc l'ensemble des capitaux des différentes personnes et  $s$ , celui des dettes.

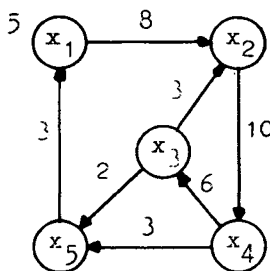


Figure 1. — Graphe.

### Païements de dettes

Le paiement partiel d'une dette est un triplet  $(x_i, x_j, g)$  tel que  $g$  soit inférieure à la dette  $s_{ij}$  de  $x_i$  envers  $x_j$  ( $x_i$  paye alors la somme  $g$  à  $x_j$ ).

Une suite de paiements partiels  $(x_{i_1}, x_{j_1}, g_1), (x_{i_2}, x_{j_2}, g_2), \dots, (x_{i_r}, x_{j_r}, g_r)$  est admissible si :

– pour  $1 \leq p \leq r$ , le capital  $t_i^p$  de toute personne  $x_i$  après le  $p$ -ième paiement est positif; donc  $t_i^0 = a_i$  et pour  $p$  strictement positif :

$t_i^p = t_i^{p-1}$  si  $i$  est différent de  $i_p$  et de  $j_p$ ;  $t_i^p = t_i^{p-1} + g_p$  si  $i$  est égal à  $j_p$ ;  $t_i^p = t_i^{p-1} - g_p$  si  $i$  est égal à  $i_p$ ;

– la somme des paiements partiels de  $x_i$  à  $x_j$  est inférieure ou égale à la dette globale de  $x_i$  envers  $x_j$ .

Une suite de paiements partiels admissible est une solution si les dettes sont toutes payées exactement.

### Exemple

La figure 2 (page suivante), rapporte les graphes associés à une suite de paiements admissible pour l'exemple de la figure 1. Initialement 5 est le capital de la personne  $x_1$ , les autres capitaux étant nuls; on effectue les paiements successifs :  $(x_1, x_2, 5)$ ,  $(x_2, x_4, 5)$ ,  $(x_4, x_3, 5)$ ,  $(x_3, x_2, 3)$ ,  $(x_2, x_4, 3)$ ,  $(x_4, x_5, 3)$ ,  $(x_5, x_1, 3)$ ,  $(x_1, x_2, 3)$ ,  $(x_2, x_4, 2)$ ,  $(x_4, x_3, 1)$ ,  $(x_3, x_5, 2)$ .

### III. PROBLÈMES DE PAIEMENTS DE DETTES NON MORCELABLES

Dans ce paragraphe, nous ajoutons la contrainte imposant que les paiements de dettes entre deux personnes données se fassent en une seule fois.

#### NP-complétude au sens faible

Le problème de l'existence d'une solution est NP-complet au sens faible [5]. Pour le prouver, nous considérons le problème de la partition qui est connu comme NP-complet :

étant donné  $m$  nombres  $a_1, a_2, \dots, a_m$  dont la somme est égale à  $2T$ , est-il possible de séparer ces nombres en deux parties disjointes (les indices étant alors partitionnés en  $I_1$  et  $I_2$ ) de telle sorte que :

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i = T?$$

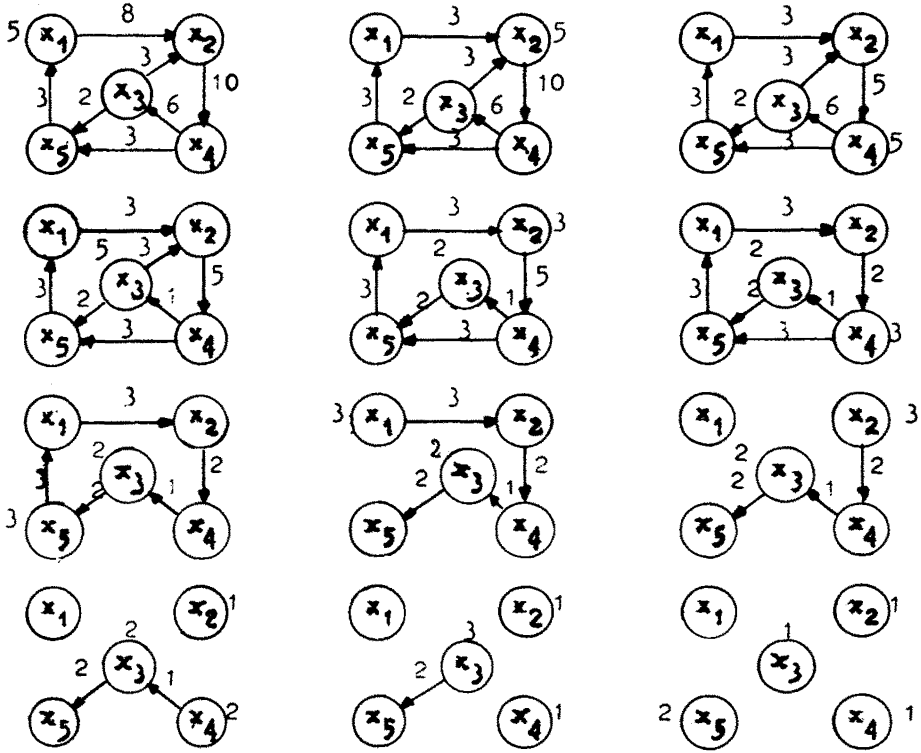


Figure 2. — Graphes associés à une solution.

Nous lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 3 qui a une solution si et seulement si le problème de la partition en admet une.

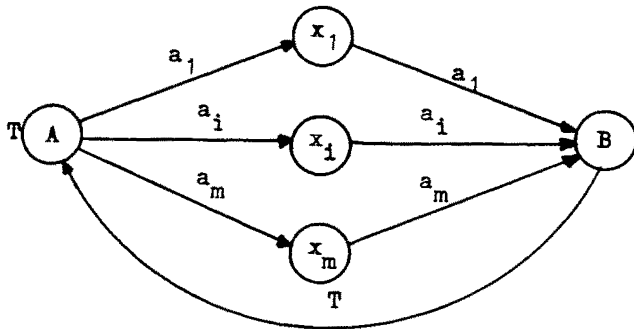


Figure 3. — Problème de paiements de dettes associé au problème de la partition.

En effet, si cette partition existe, on pourra d'abord effectuer les paiements de dettes  $(A, x_i, a_i)$  puis  $(x_i, B, a_i)$  pour  $i \in I_1$ , puis  $(B, A, T)$ . Lors d'un « second tour » on effectuera les paiements  $(A, x_i, a_i)$  puis  $(x_i, B, a_i)$  pour  $i \in I_2$  : alors toutes les dettes sont éteintes et  $B$  possède la somme  $T$ .

Réciproquement, supposons qu'une suite de paiements admissible existe; la somme  $T$  part de  $A$  vers un sous-ensemble de sommets  $\{x_i/i \in I_1\}$ ; puis nécessairement la somme reçue en chacun de ces sommets repart vers  $B$  qui possède alors  $T$ , lui permettant ensuite de régler sa dette envers  $A$ . On a donc

$$\sum_{i \in I_1} a_i = T.$$

### NP-complétude au sens fort

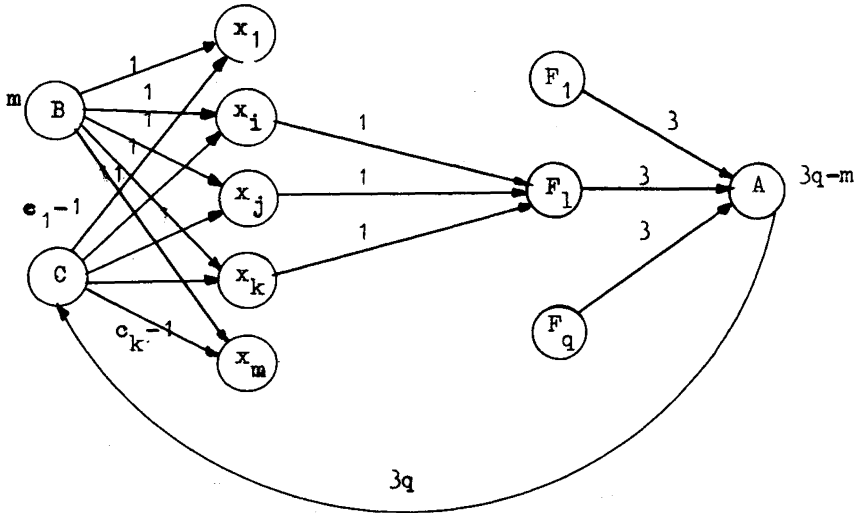


Figure 4. — Problème de paiements de dettes associé au problème du partitionnement.

Le problème de l'existence d'une solution est aussi *NP*-complet au sens fort. Pour le prouver, nous considérons le problème suivant : étant donné  $q$  sous-ensembles à trois éléments  $F_1, F_2, \dots, F_q$  de l'ensemble  $E = \{1, 2, \dots, m\}$ , existe-t-il une partie  $I_1$  de ces  $q$  sous-ensembles formant une partition de  $E$  ? Ce problème de partitionnement est *NP*-complet au sens fort [5]. Nous lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 4 : dans le graphe correspondant, on a un arc entre  $x_i$  et  $F_i$  si  $i$  appartient à  $F_i$ ;  $c_i$  est le nombre de sous-ensembles contenant  $i$ ; initialement, le capital de  $A$  est  $3q-m$ , celui de  $B, m$ .

Le problème de paiement a une solution si et seulement si le problème de partitionnement en a une. En effet, si une partition  $I_1$  existe, on peut d'abord effectuer les paiements  $(B, x_i, 1)$  pour  $1 \leq i \leq m$ , puis les paiements  $(x_i, F_l, 1)$  pour  $l \in I_1$ , puis  $(F_l, A, 3)$  pour  $l \in I_1$ , ensuite  $(A, C, 3q)$ . Lors d'un « second tour », les autres paiements peuvent être effectués. Réciproquement, supposons qu'une suite de paiements admissible existe : la somme  $m$  qui part de  $B$  atteint  $A$  avant le paiement de la dette  $(A, C, 3q)$ ; l'ensemble  $I_1$  des  $l$  tels que la dette  $(F_l, A, 3)$  soit payée antérieurement à  $(A, C, 3q)$  est une partition de  $E$ .

**IV. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE D'EXISTENCE D'UNE SOLUTION**

Nous revenons au cas où une dette peut être réglée en plusieurs fois. Nous notons  $D_i$  la somme des dettes initiales de  $x_i$  diminuée de la somme des créances initiales de  $x_i$  :

$$D_i = \sum_{x_j \in \Gamma^+(x_i)} s_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^-(x_i)} s_{ki}^{(2)}$$

$D_i$ , s'il est positif, représente le « passif » de  $x_i$ ; s'il est négatif, l'opposé de l'« actif »; il ne peut y avoir de solution au problème si ce passif est strictement supérieur au capital initial de  $x_i$ ,  $a_i$ ; nous supposons donc dans les paragraphes IV, V et VI que  $D_i$  est inférieur à  $a_i$  pour tout  $i$ .

**Réseau de transport et flot**

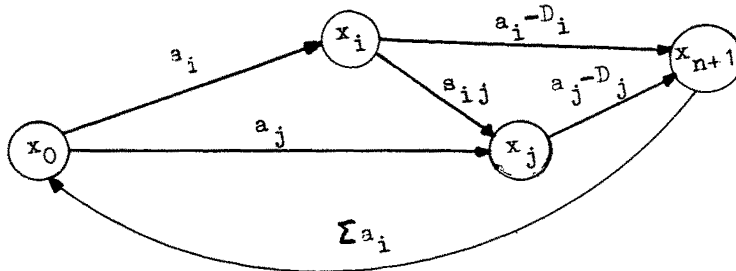


Figure 5. — Réseau de transport  $H=(Y, V)$  et flot associé.

Nous associons au problème le réseau de transport  $H=(Y, V)$  (fig. 5);  $Y$  est obtenu en adjoignant à  $X$  les sommets  $x_0$  et  $x_{n+1}$ ;  $V$  est défini par :

$$V = U \cup \{(x_0, x_i)/x_i \in X\} \cup \{(x_i, x_{n+1})/x_i \in X\} \cup \{(x_{n+1}, x_0)\};$$

les capacités des arcs sont infinies.

(<sup>2</sup>)  $\Gamma^+(x_i)$  [resp. :  $\Gamma^-(x_i)$ ] est l'ensemble des successeurs (resp. : prédécesseurs) de  $x_i$  dans le graphe  $G=(X, U)$ .

Nous définissons un flot  $f$  sur ce réseau par :  $f_{0i} = a_i, f_{i, n+1} = a_i - D_i, f_{ij} = s_{ij},$   
 $f_{0, n+1} = \sum_{x_i \in X} a_i$

$f$  est un flot entier positif; la conservation du flux est satisfaite en chaque sommet :

- en  $x_0$  :  $\sum_{x_i \in X} a_i = \sum_{x_i \in X} a_i$ ;
- en  $x_i$  :  $a_i + \sum_{x_k \in \Gamma^-(x_i)} s_{ki} = \sum_{x_j \in \Gamma^+(x_i)} s_{ij} + a_i - D_i$ , du fait de la définition de  $D_i$ ;
- en  $x_{n+1}$  :  $\sum_{v_j \in X} (a_j - D_j) = \sum_{x_i \in X} a_i - \sum_{x_i \in X} D_i = \sum_{x_i \in X} a_i$ ,

car la somme des  $D_i$  est nulle.

Nous énonçons maintenant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution.

**THÉORÈME** : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que :

- (i)  $D_i \leq a_i$ , pour tout  $x_i$  de  $X$ ;
- (ii) aux sommets isolés près, le réseau de transport  $H'$  déduit de  $H$  en supprimant les arcs de flux nuls est connexe.

#### Démonstration

Les conditions sont nécessaires

Nous avons remarqué au début du paragraphe que nécessairement  $D_i \leq a_i$ .

Initialement, tout l'argent ( $\sum_i a_i$  supposé positif strictement) est en  $x_0$  (banque des capitaux initiaux); toute succession admissible de paiements correspond à un ensemble de chemins d'origine  $x_0$  puisqu'une somme ne peut se trouver en un point que si elle s'y trouvait au départ ou si elle y a été acheminée par des points intermédiaires. Soit  $x_i$  un point non isolé dans  $H'$  : ou bien, il existe l'arc  $(x_0, x_i)$ ; ou bien, il existe  $x_j$  tel que  $s_{ij}$  ou  $s_{ji}$  n'est pas nul et le paiement  $s_{ij}$  ou  $s_{ji}$ ; ainsi que les points  $x_i$  et  $x_j$  sont sur un chemin amenant l'argent depuis  $x_0$ ; ou bien, il existe l'arc  $(x_i, x_{n+1})$  qui complété par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  de  $H'$  constitue un chemin de  $x_i$  à  $x_0$ . Tout point non isolé est relié à  $x_0$  par un chemin;  $H'$  est donc connexe.  $H'$  est alors également fortement connexe (aux sommets isolés près) car  $f$  est un flot entier strictement positif sur  $H'$  [1], [6].



*Les conditions sont suffisantes*

La démonstration est assurée par la présentation d'un algorithme construisant une solution quand les conditions (i) et (ii) sont satisfaites ainsi que par la preuve de cet algorithme (paragraphe V et VI).

**COROLLAIRE :** *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que :*

(i)  $D_i \leq a_i$ , pour tout  $x_i$  de  $X$ ;

(ii) *pour chaque sommet  $x_i$  non isolé de  $X$ , il existe dans le graphe  $G=(X, U)$  un ascendant  $x_{i_0}$  de  $x_i$  dont le capital initial  $a_{i_0}$  est strictement positif.*

## V. SCHEMA DE LA METHODE DE RESOLUTION

### Analyse de l'exemple

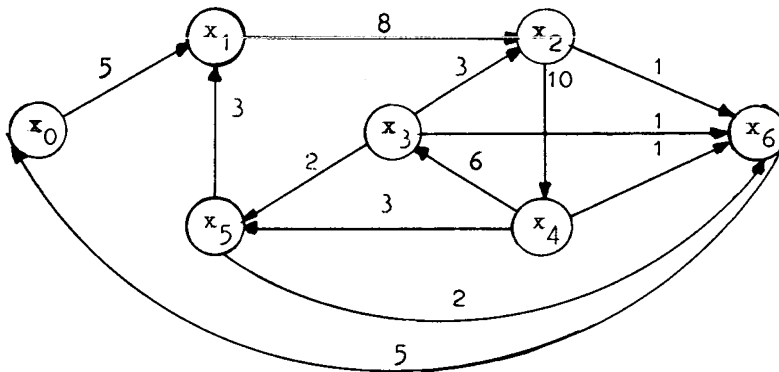


Figure 6. — Réseau de transport  $H'$  et flot associés à l'exemple.

Nous décomposons le flot associé à l'exemple (fig. 6) sur une base de circuits élémentaires :

$$f = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 + \mu_4 + 3\mu_5 + 3\mu_6 = \sum c_i \mu_i,$$

avec :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [x_0, x_1, x_2, x_6, x_0], & \mu_2 &= [x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, x_0], \\ \mu_3 &= [x_0, x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, x_0], & \mu_4 &= [x_0, x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_0], \\ \mu_5 &= [x_2, x_4, x_3, x_2], & \mu_6 &= [x_2, x_4, x_5, x_1, x_2]. \end{aligned}$$

Le circuit  $\mu_1$  passe par l'arc  $(x_6, x_0)$ ; il lui correspond le paiement  $(x_1, x_2, 1)$ . Au circuit  $\mu_3$  correspond la suite de paiements de dettes :  $(x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_5, 2)$ .

Généralement, à tout circuit  $\mu_i = [x_{i_0}, \dots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}]$  passant par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  avec  $x_{i_0} = x_0$  et  $x_{i_{r+1}} = x_{n+1}$  correspond la suite de paiements de dettes :  $(x_{i_1}, x_{i_2}, c_i), (x_{i_2}, x_{i_3}, c_i), \dots, (x_{i_{r-1}}, x_{i_r}, c_i)$ ; cette suite de paiements de dettes est admissible car la somme  $c_i$  disponible initialement en  $x_{i_1}$ , peut être transféré en  $x_{i_2}$ , puis en  $x_{i_3}, \dots$ , jusqu'à  $x_{i_r}$ .

Si tous les circuits  $\mu_i$  passent par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ , alors :  $f = \sum \mu'_i$  avec  $\mu'_i = c_i \mu_i$ ; on associe à chaque  $\mu'_i$  une suite de paiements admissible. On aura une solution du problème, car ces paiements peuvent se faire indépendamment les uns des autres.

Sur cet exemple, il n'en est pas ainsi; en effet, les circuits  $\mu_5$  et  $\mu_6$  ne passent pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ ; dans ce cas, on va construire un circuit non élémentaire valué que l'on nommera « circuit généralisé de paiement » en « greffant », par exemple,  $\mu_5$  et  $\mu_6$  sur  $\mu_3$  aux sommets  $x_2$  et  $x_4$  (fig. 7). A ce circuit généralisé correspond la suite de paiements de dettes :

$(x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_2, 2), (x_2, x_4, 1), (x_4, x_3, 1), (x_3, x_2, 1), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_5, 2), (x_5, x_1, 2), (x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_5, 1), (x_5, x_1, 1), (x_1, x_2, 1), (x_2, x_4, 1), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_5, 2)$ .

Dans le cas général, on greffera successivement, tous les circuits ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ ; tous ces circuits pourront être greffés du fait de la connexité du graphe. On obtiendra une famille de circuits généralisés auquel correspondra des suites de paiements admissibles qui globalement formeront une solution.

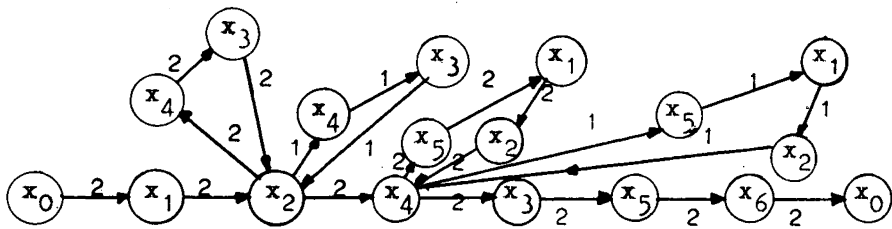


Figure 7. — Un circuit généralisé de paiement.

### Circuit généralisé de paiement

Un circuit généralisé de paiement d'un réseau de transport  $h$  est un circuit  $[x_{i_0}, \dots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}]$  de  $H$  dont les arcs sont valués par  $g_{01}, g_{12}, \dots, g_{r, r+1}, g_{r+1, 0} = g_{01}$  tel que :

- (i)  $x_{i_0} = x_0, x_{i_{r+1}} = x_{n+1}$ , avec :  $x_{i_k} \neq x_0, x_{n+1}$  pour  $1 \leq k \leq r$ ;

(ii)  $t_i^p \geq 0$ ,  $0 \leq p \leq r-1$ ,  $1 \leq i \leq n$ , où  $t_i^p$  (capital en  $x_i$  après le  $p$ -ième paiement) est défini par :

$$t_i^0 = g_{01} \quad \text{et} \quad t_i^0 = 0 \quad \text{pour} \quad x_i \neq x_i;$$

et pour  $p$  strictement positif :

$$\begin{aligned} t_i^p &= t_i^{p-1} & \text{si} & \quad x_i \neq x_i, & \quad \text{et} & \quad x_i \neq x_{i,p+1}; & \quad t_i^p &= t_i^{p-1} + g_{p,p+1} \\ & & \text{si} & \quad x_i = x_{i,p+1}; & \quad t_i^p &= t_i^{p-1} - g_{p,p+1} & \quad \text{si} & \quad x_i = x_i; \end{aligned}$$

$$(iii) \quad t_i^{r-1} = g_{01}.$$

LEMME : Si la somme d'argent  $g_{01}$  est disponible initialement en  $x_i$ , la suite de paiements  $(x_i, x_i, g_{12}) \dots (x_{i,r-1}, x_i, g_{r-1,r})$  est admissible; elle permet de transférer la somme d'argent  $g_{01}$  du sommet  $x_i$  au sommet  $x_i$ .

*Démonstration* : On montre par récurrence sur  $p$  que  $t_i^p$  est la somme d'argent dont dispose  $x_i$  après le  $p$ -ième paiement.

La propriété est vraie pour  $p=0$ ; initialement, le capital de  $x_i$  est  $g_{01}$  alors que les autres capitaux sont nuls :  $t_i^0 = g_{01}$  et  $t_i^0 = 0$  pour  $x_i \neq x_i$ .

Supposons la propriété vraie à l'ordre  $p-1$ ; le  $p$ -ième paiement est  $(x_i, x_{i,p+1}, g_{p,p+1})$ . Alors,  $t_i^p$  est la somme d'argent disponible en  $x_i$  après le  $p$ -ième paiement :  $t_i^p = t_i^{p-1}$  si  $x_i \neq x_i$ , et  $x_i \neq x_{i,p+1}$ ;  $t_i^p = t_i^{p-1} + g_{p,p+1}$  si  $x_i = x_{i,p+1}$ ;  $t_i^p = t_i^{p-1} - g_{p,p+1}$  si  $x_i = x_i$ . Le  $p$ -ième paiement est admissible car  $t_i^p$  reste positif pour tout  $i$ .

Après le dernier paiement, on a :  $t_i^{r-1} = g_{01}$ ; la somme d'argent  $g_{01}$  est donc disponible en  $x_i$ . Les autres capitaux sont nuls car  $\sum_i t_i^p$  est un invariant égal à  $g_{01}$ , et, parce que les autres capitaux sont positifs ou nuls.

### Organisation de la greffe d'un circuit sur un circuit généralisé

Soient  $\mu_1$  un circuit généralisé, et,  $\mu$  un circuit ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  mais ayant un sommet commun  $x_i$  avec  $\mu_1$  :  $\mu_1 = [x_i, \dots, x_{i,p+1}, x_i]$  et il existe  $k$  tel que  $x_k = x_i$ , où  $x_i$  est un sommet du circuit  $\mu$ ; on note  $c$  le coefficient de  $\mu$  sur la base de circuits et  $h = t_i^{k-1}$  la somme disponible en  $x_i$  après le  $k-1$ -ième paiement associé au circuit généralisé  $\mu_1$ .

Nous nous proposons de greffer le circuit  $\mu$  sur le circuit généralisé  $\mu_1$  et écrivons dans ce but la division entière de  $c$  par  $h$  :  $c = hq + v$  avec  $0 < v \leq h$  (le lecteur remarquera qu'il ne s'agit pas de la division euclidienne usuelle).

Le lecteur pourra vérifier que le circuit  $\mu'_1$  est encore un circuit généralisé :

$$\mu'_1 = [x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, \underbrace{\mu, \mu, \dots, \mu}_{q+1 \text{ fois le circuit}}, x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}];$$

le circuit  $\mu$  est répété  $q+1$  fois, la valuation des  $q$  premiers circuits  $\mu$  étant  $h$ , celle du dernier circuit  $\mu$ ,  $v$ ; on remarquera que la plus grande de ces deux valuations de  $\mu$  est  $\min(c, h)$  (fig. 8).

REMARQUE : Le nombre  $q$  apparaissant lors de la greffe peut être un nombre très grand, ce qui risque de rendre la solution non polynomiale; toutefois l'algorithme restera polynomial car un circuit généralisé sera codé de façon implicite : on précisera pour un circuit  $\mu$  ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  sur quel circuit  $\mu_1$  et en quel sommet  $x_i$  il est greffé.

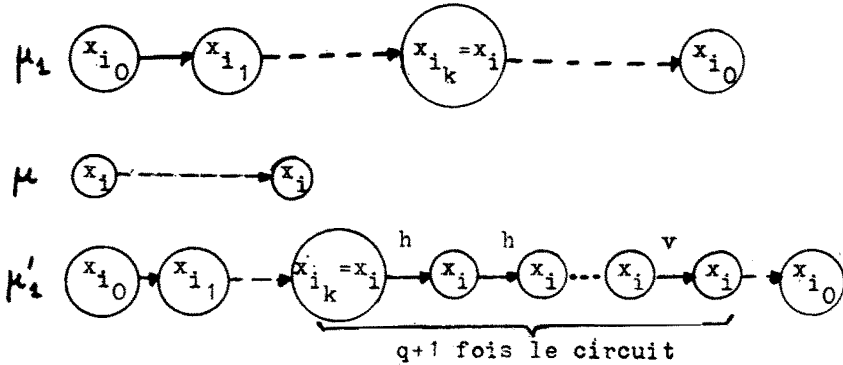


Figure 8. — Greffe de  $\mu$  sur  $\mu_1$ .

## VI. ALGORITHME

### Phase 1

Décomposer le flot  $f$  sur une base de circuits élémentaires :  $f = \sum c_i \mu_i$ .

### Phase 2

Décomposer le flot  $f$  comme une somme de circuits généralisés :  $f = \sum \mu'_i$ .

Phase 1 : décomposition du flot sur une base de circuits :

(i) Soit  $(x_{i_0}, x_{i_1})$  un arc ayant un flux non nul; poser  $k=1$ .

(ii) Soit  $x_{i_{k+1}}$  un sommet tel qu'il passe un flux non nul par l'arc  $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$ ; poser  $k=k+1$  et aller en (iii).

(iii) Si  $x_{i_k}$  est un sommet n'appartenant pas au chemin  $[x_{i_0}, \dots, x_{i_{k-1}}]$ , retourner en (ii); sinon déterminer  $r$  tel que  $x_{i_k} = x_{i_r}$ .

(iv)  $[x_{i_r}, \dots, x_{i_k}]$  est un circuit  $\mu$  du réseau de transport; déterminer le plus petit flux  $c$  des arcs de ce circuit; stocker  $c$  et  $\mu$ ; poser  $f := f - c\mu$ ; si  $f$  est nul, Fin; si  $x_{i_r} \neq x_{i_0}$ , poser  $k = r$  et aller en (ii); sinon, aller en (i).

**PROPOSITION 1 :** *La phase 1 décompose le flot sur une base de circuits en  $O(nm)$  opérations.*

*Démonstration :* Quand on est en (i), il existe un arc  $(x_{i_0}, x_{i_1})$  car le flot est non nul; quand on est en (ii), il existe un sommet  $x_{i_{k+1}}$ , car le chemin  $[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$  est élémentaire, et, du fait de la conservation du flux appliquée au sommet  $x_{i_k}$  : le flux entrant en  $x_{i_k}$  étant non nul, il en est de même du flux sortant de  $x_{i_k}$ .

A chaque itération, on annule le flux sur au moins un arc de ce réseau; si  $m$  est le nombre d'arcs, il y aura au plus  $m$  itérations. La complexité de (ii) est  $O(1)$  si le réseau est codé par la file des successeurs; (ii) est exécuté au plus  $n$  fois à chaque itération. La complexité de (iii) est  $O(1)$ ; (iii) est exécuté au plus  $n$  fois lors de chaque itération. La complexité de (iv) est  $O(n)$ ; (iv) est exécuté une fois lors de chaque itération, la complexité de cet algorithme est donc  $O(nm)$  (s'il est codé avec soin...).

*Phase 2 :* greffe de circuits.

La phase 1 a permis de décomposer le flot sur une base de circuits  $f = \sum c_i \mu_i$ ; la phase 2 permet de calculer, pour chaque circuit  $\mu$  de cette décomposition ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ , le sommet  $x_i$  et le circuit  $\mu(x_i)$  sur lequel sera greffé le circuit  $\mu$ ;  $L_{x_i}$  désignera l'ensemble des circuits qui sont greffés en  $x_i$ ; pour chaque sommet  $x_i$ ,  $\mu(x_i)$  est choisi de telle sorte que  $h(x_i)$ , somme d'argent disponible en  $x_i$ , soit maximale.

(i) Déterminer l'ensemble  $C$  des circuits de la décomposition passant par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  et l'ensemble  $\bar{C}$  des circuits ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ .

(ii) Déterminer l'ensemble  $Y$  des sommets empruntés par les circuits de  $C$ ; choisir, pour chaque élément  $x_i$  de  $Y$ , un circuit  $\mu(x_i)$  de  $C$  passant par  $x_i$  tel que  $h(x_i)$ , somme d'argent disponible en  $x_i$ , soit maximale ( $h(x_i)$  est ici le coefficient de  $\mu(x_i)$  dans la décomposition sur la base). Ordonner  $Y$  dans l'ordre des  $h(x_i)$  décroissants (on parlera de la liste  $Y$ ).

(iii) Pour chaque circuit  $\mu$  de  $\bar{C}$ , calculer la fonction indicatrice de l'ensemble des sommets de  $\mu$  :  $1_\mu(x_i) = 1$  si  $x_i$  appartient à  $\mu$ ,  $1_\mu(x_i) = 0$  sinon.

(iv) Déterminer le premier sommet  $x_i$  de  $Y$  (rappelons que  $Y$  est ordonné) appartenant à un circuit  $\mu$  de  $\bar{C}$ ; inclure le circuit  $\mu$  dans l'ensemble  $L_{x_i}$  des circuits greffés en  $x_i$  et dans l'ensemble  $C$ ; retirer  $\mu$  de l'ensemble  $\bar{C}$ .

(v) *Mise à jour de la liste Y*

Déterminer l'ensemble  $Y'$  des sommets de  $\mu$  (on peut greffer, lors d'une itération ultérieure, des circuits sur les sommets de  $\mu$ ) et  $v$  le minimum de  $h(x_i)$  et du coefficient  $c$  de  $\mu$  sur la base.

Réunir la liste  $Y$  et l'ensemble  $Y'$  en posant :  $Y := Y \cup Y'$ ; pour  $x_k \in \overline{Y} \cap Y'$ ,  $h(x_k) := v$ ,  $\mu(x_k) := \mu$ ; pour  $x_k \in Y \cap Y'$  et si  $v > h(x_k)$ ,  $h(x_k) := v$ ,  $\mu(x_k) := \mu$ . Retourner en (iv) si  $\overline{C}$  est non vide; Fin.

PROPOSITION 2 : *La complexité de la phase 2 est  $O(nm)$ .*

*Démonstration* : Il y a au plus  $m$  circuits dans la base; ces circuits étant élémentaires, leurs parcours dans (i) coûte  $O(nm)$ ; (ii) et (iii) coûte  $O(nm)$  pour la même raison.

La liste  $Y$  et le calcul des fonctions indicatrices permet de faire au plus une fois, pour chaque sommet  $x_i$  de  $X$  et pour chaque circuit  $\mu$  de  $\overline{C}$ , le test portant sur l'appartenance de  $x_i$  à  $\mu$ . Ce test coûtant  $O(1)$ , le coût global sera  $O(nm)$ .

La mise à jour dans  $v$  de la liste  $Y$  coûte  $O(n)$ . Globalement  $v$  coûte  $O(nm)$ .

REMARQUE : On peut montrer que, pour une décomposition fixée du flot  $f = \sum c_i \mu_i$ , il est préférable de choisir  $x_i$  tel que  $h(x_i)$  soit maximal.

PROPOSITION 3 : *Lorsque le graphe est connexe, tous les circuits qui ne passent pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$ , sont greffés à la fin de la phase 2.*

*Démonstration* : Soient  $\mu$  un circuit ne passant pas par l'arc  $(x_{n+1}, x_0)$  et  $x_i$  un sommet de  $\mu$ ; le sommet  $x_i$  n'étant pas isolé est relié à  $x_0$  par une chaîne  $[x_{i_0} = x_0, \dots, x_{i_r} = x_i]$  élémentaire;  $[x_{i_0}, x_{i_1}]$ ,  $\dots$ ,  $[x_{i_{r-1}}, x_{i_r}]$  appartiennent à des circuits  $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_r}$  de la base;  $\mu_{j_2}$  pourra être greffé sur  $\mu_{j_1}, \dots, \mu_{j_r}$  sur  $\mu_{j_{r-1}}$ , et  $\mu$  sur  $\mu_{j_r}$ . On aura donc greffé  $\mu$  à la fin de la phase 2.

PROPOSITION 4 : *A la famille de circuits généralisés définie à la fin de la phase 2 correspond une solution.*

*Démonstration* : Cette proposition est une conséquence du lemme du paragraphe V. Il en résulte la validité de l'algorithme; de plus, comme il a été annoncé, la condition du théorème énoncé au paragraphe III est bien suffisante.

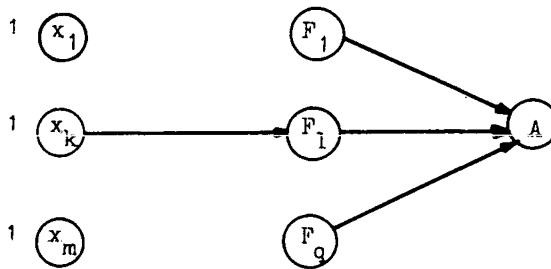
## VII. MINIMISATION DES FAILLITES ET DES IMPAYÉS

Nous supposons dans ce paragraphe que tout sommet  $x_i$  a un antécédent  $x_{i_0}$  avec  $a_{i_0} > 0$ , mais que la condition  $D_i \leq a_i$  n'est pas satisfaite pour tout  $i$  : certaines dettes ne pourront pas être payées.

Nous envisageons deux objectifs : minimiser le nombre de personnes en faillite et minimiser la somme des impayés (c'est-à-dire le montant global des faillites).

**PROPOSITION 5 :** *Le problème de la minimisation du nombre de faillites est un problème NP-difficile.*

*Démonstration :* Pour le prouver, nous considérons le problème du partitionnement de l'ensemble  $E = \{1, 2, \dots, m\}$  avec  $q$  sous-ensembles donnés à l'avance  $F_1, F_2, \dots, F_q$  et lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 9 : il y a un arc entre  $x_k$  et  $F_l$  si  $x_k$  appartient à  $F_l$ . Il y a exactement  $q \cdot m / 3$  faillites au minimum; ce minimum est atteint si et seulement si le problème du partitionnement a une solution.



**Figure 9. — Problème de paiements associé au problème du partitionnement.**

**PROPOSITION 6 :** *Le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal.*

*Démonstration :* Nous définissons un réseau de transport de la façon suivante : l'ensemble des sommets est  $X$ ; l'ensemble des arcs est obtenu en ajoutant à  $U$  tous les arcs  $(x_j, x_i)$  si  $(x_i, x_j)$  est un arc de  $U$ ; l'arc  $(x_i, x_j)$  a pour borne inférieure et capacité  $s_{ij}$  et un coût nul; l'arc  $(x_j, x_i)$  a pour borne inférieure 0 et pour capacité  $s_{ij}$  et un coût égal à 1.

Déterminer un flot de coût minimal sur ce réseau revient à minimiser la somme des impayés.

#### REMERCIEMENT

Je remercie le Professeur Bernard Lemaire pour l'aide qu'il m'a apportée lors de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. J. CARLIER et A. H. G. RINNOOY KAN, *Financing and Scheduling*, Operations Research Letters, vol. 1, n° 2, avril 1982.
3. P. CHRETIENNE, *Réseaux de Petri temporisés (Rapport de l'Institut de Programmation, 1981)*.
4. M. CRAMER et J. P. PONSSARD, *Ordonnements des mouvements de trésorerie*, R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle, vol. 11, n° 4, novembre 1977, p. 393-404.
5. M. GAREY et D. S. JOHNSON, *Computers and Intractability*, W. H. Freeman and Company, 1979.
6. M. GONDRAN et M. MINOUX. *Graphes et algorithmes*, Dunod, Paris, 1980.
7. R. L. GRAHAM, E. L. LAWLER, J. K. LENSTRA et A. H. G. RINNOOY KAN, *Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: a Survey*, Ann. Discrete. Math., 1979.
8. R. SLOWINSKY, *Multiobjective Network Scheduling with Efficient Use of Renewable and Non-Renewable Resources*, European Journal of Operational Research, vol. 5, 1980.