

JEAN SISKOS

Comment modéliser les préférences au moyen de fonctions d'utilité auditives

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, n° 1 (1980), p. 53-82

http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_1_53_0

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMMENT MODÉLISER LES PRÉFÉRENCES AU MOYEN DE FONCTIONS D'UTILITÉ ADDITIVES (*)

par Jean SISKOS (¹)

Résumé. — Après avoir défini le problème, nous présentons deux méthodes (méthodes UTA) d'identification et de saisie des préférences d'un individu-décideur au moyen d'une ou plusieurs fonctions d'utilité additives fondées sur l'explication d'une relation préordinaire (préférence globale) fournie par ce décideur. Ces fonctions d'utilité répondent, grâce aux techniques du « goal programming », au principe de la post-optimalité qui est plus large que celui de l'optimisation. Cette nouvelle approche permet de mieux appréhender les préférences du décideur et de définir des relations de surclassement basées sur la concordance des fonctions d'utilité multiples.

Nous proposons un mode d'utilisation interactif des méthodes UTA permettant de tester la validité, la stabilité et la cohérence des fonctions d'utilité avec les préférences a priori du décideur.

Enfin, nous décrivons la structure et les caractéristiques des programmes informatiques relatifs aux méthodes UTA.

Abstract. — After defining the problem, we present two methods (UTA methods) for modelling preferences of a decision-maker by means of one or more additive utility functions, based on a weak-order preference relation (wholistic preference) on a set of actions and on the multi-criteria evaluations of these actions. This system of utilities is assessed by using special goal programming techniques in the context of post-optimality analysis which is here much more appropriate than optimization. This new approach permits a better apprehension of individual preferences and to define outranking relations based on the concordance of multiple utility functions.

We propose an interactive use of UTA methods in order to test the model's validity and the coherence of the assessed utilities with the decision-maker's a priori preferences.

Finally, the structure and the characteristics of the FORTRAN routines related with the UTA methods are described.

1. INTRODUCTION

1.1. Le problème multicritère. Notations

Aujourd'hui, la prise en compte des critères multiples constitue une approche très classique dans l'étude des problèmes de décision. Un ensemble d'actions candidates (objets, stimuli, projets de recherche ou d'investissement, etc.), noté A , est caractérisé et évalué sur la base de n critères (cf. attributs, facteurs, variables, etc.) visant à appréhender toute l'information disponible à A et interférant avec les valeurs et objectifs du décideur. Les critères ont la forme de n

(*) Reçu janvier 1979.

(¹) Institut de Programmation, Université Pierre-et-Marie-Curie, et maintenant au LAMSADE, Université Paris-Dauphine.

applications g_1, g_2, \dots, g_n définies sur A [cf. B. Roy (1975) et (1978)] de telle sorte que le vecteur $\mathbf{g}(a) = (g_1(a), g_2(a), \dots, g_n(a))$, $a \in A$ soit l'image des conséquences de l'action a sur tous les critères (fig. 1).

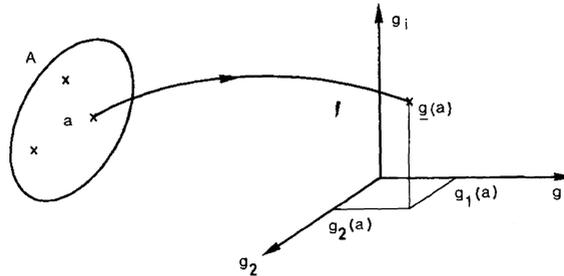


Figure 1. — Évaluation multicritère d'une action $a \in A$.

Dans le problème du choix d'un moyen de transport par un individu qui veut se rendre de son lieu d'habitation à son lieu de travail (choix modal), les critères qui peuvent l'intéresser sont, par exemple : g_1 , le temps du trajet; g_2 , le prix du transport et g_3 , la possibilité d'avoir une place assise; pour un moyen donné a , $\mathbf{g}(a)$ pourrait être identifié par le vecteur (18 minutes; 2,20 F; peu de possibilités).

Nous pouvons distinguer différentes catégories de critères suivant la nature des conséquences, ou valeurs, que les actions prennent sur ces critères (critères ordinaux, graduables, etc.) et associer des ensembles G_i , $i=1, 2, \dots, n$ délimitant les domaines des conséquences possibles de A sur chaque critère. Nous appelons dans ce cas-là ensemble de conséquences de A l'ensemble $G(A) = \{ \mathbf{g}(a); a \in A \}$ et espace produit de conséquences l'ensemble

$$G = \prod_{i=1}^n G_i = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$$

en admettant de représenter chaque G_i par des intervalles réels ou discrets de la forme

$$G_i = [g_{i*}, g_i^*]$$

avec g_{i*} et g_i^* respectivement la conséquence la moins et la plus préférée de g_i . Dans le contexte du choix modal ci-dessus, nous pouvons déterminer trois ensembles, ordonnés suivant les préférences de l'individu-voyageur (cf. décideur), par exemple

$$G_1 = [30 \text{ minutes}, 15 \text{ minutes}], \quad G_2 = [20 \text{ F}, 1,25 \text{ F}] \quad \text{et} \quad G_3 = [1, 2, 3, 4];$$

G_1 et G_2 sont continus, G_3 est discret et contient 4 échelons d'appréciation des possibilités d'avoir une place assise dans un mode de transport offert.

L'espace produit des conséquences G est déterminé, pour ce problème, par les 4 surfaces planaires de la figure 2 qui correspondent aux 4 niveaux-échelons du critère g_3 ; chaque mode de transport dans A (bus, métro, etc.) est représenté par un point situé dans cet espace (en général : $G(A) \subseteq G$). Par contre, tout point de G ne correspond pas toujours à une action réelle, comme par exemple le point idéal $\mathbf{g}^* = (g_1^*, g_2^*, g_3^*)$.

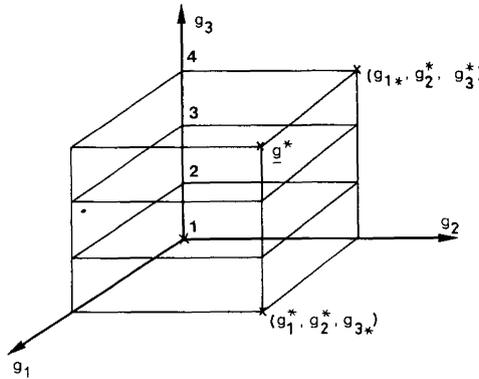


Figure 2. — L'espace-produit de conséquences G relatif au problème (exemple) du choix modal.

Dans la suite, on utilise indifféremment soit des actions réelles dont l'image est dans $G(A)$, soit des actions fictives (vecteurs $\mathbf{g} \in G$) dont l'image est dans $G - G(A)$.

1.2. La fonction d'utilité-multiattribut

Une fonction d'utilité, ou fonction de valeurs, est une fonction réelle, notée $u(\mathbf{g}) = u(g_1, g_2, \dots, g_n)$, $\mathbf{g} \in G$; son rôle est de préserver l'ordre sur G d'une préférence individuelle transitive. Si l'on désigne par P (ou $>$) la préférence et par I (ou \sim) l'indifférence, cette fonction est définie par les relations

$$u(\mathbf{g}) > u(\mathbf{g}') \Leftrightarrow \mathbf{g} P \mathbf{g}', \quad (1)$$

$$u(\mathbf{g}) = u(\mathbf{g}') \Leftrightarrow \mathbf{g} I \mathbf{g}', \quad (2)$$

pour tout \mathbf{g} et \mathbf{g}' éléments de G .

Cette fonction, propre à un décideur, aussi complexe soit-elle, est toujours supposée décomposable (décomposition des préférences) sous la forme

$$u(\mathbf{g}) = f[u_1(g_1), u_2(g_2), \dots, u_n(g_n)], \quad \mathbf{g} \in G. \quad (3)$$

Elle est considérée comme la fonction de n fonctions réelles u_1, u_2, \dots, u_n définies respectivement sur les ensembles G_1, G_2, \dots, G_n et nommées utilités

partielles. Beaucoup de travaux sont consacrés à l'étude des différentes formes de f (additive, multiplicative, etc.) en avenir certain, probabilisable ou incertain. Citons, à titre d'exemple, les travaux de synthèse de R. L. Keeney, H. Raiffa (1976), de P. Fishburn (1977) et de P. H. Farquhar (1977). Notre recherche se réfère uniquement à la forme additive qui est d'ailleurs la plus simple et la plus largement utilisée en recherche opérationnelle (cf. [31]).

2. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

2.1. Fonction d'utilité et additivité

Une fonction d'utilité apparaît également comme l'amalgame ou la règle d'agrégation de n critères. Sa connaissance permet d'identifier les préférences du décideur et de ramener le problème du choix au problème classique d'optimisation

$$\max u(\mathbf{g}); \quad \mathbf{g} \in G(A).$$

Dans l'exemple du choix modal, tout se passe comme si le voyageur choisissait le mode (action) $a^* \in A$ qui maximise sa fonction d'utilité $u[\mathbf{g}(a^*)] = \max_{\mathbf{g} \in G(A)} u(\mathbf{g})$.

La distribution de valeurs $u[\mathbf{g}(a)]$, $a \in A$ définit sur l'ensemble d'alternatives A une relation préordinaire totale $\mathcal{R} = (P, I)$ dont la partie antisymétrique P est définie par les relations (1) et la partie symétrique I par les relations (2) (fig. 3).

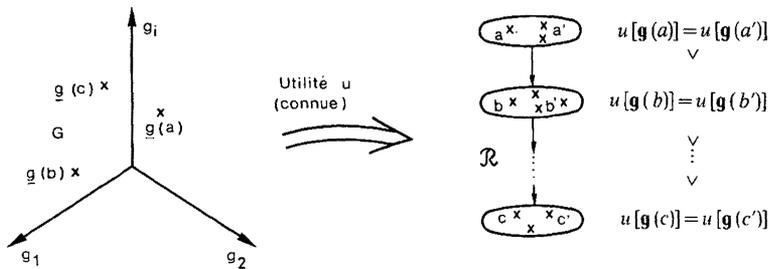


Figure 3. — Schéma d'agrégation de n critères par une fonction d'utilité.

Une utilité est appelée additive si elle est de la forme

$$u(\mathbf{g}) = u_1(g_1) + u_2(g_2) + \dots + u_n(g_n) \tag{4}$$

ou encore

$$u(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n u_i(g_i), \quad \mathbf{g} \in G.$$

Une autre forme additive (pondérée) :

$$u(\mathbf{g}) = p_1 u'_1(g_1) + p_2 u'_2(g_2) + \dots + p_n u'_n(g_n) \quad (5)$$

ou encore

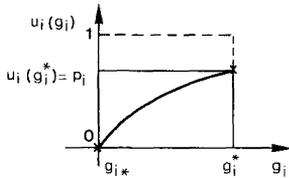
$$u(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u'_i(g_i), \quad \mathbf{g} \in G$$

est équivalente à (4) dans la mesure où les valeurs $u'_i(g_i)$ sont normées (par exemple entre 0 et 1) à l'avance. Dans ce cas, nous n'avons qu'à poser

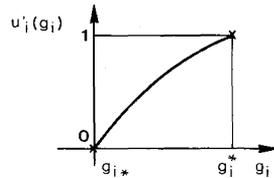
$$u'_i(g_i) = \frac{1}{p_i} u_i(g_i) \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

pour passer d'une forme à l'autre.

Les méthodes UTA (§ 3) estiment ces deux formes sous les conditions de normalisation de la figure 4.



Forme (4) : $u_i(g_{i*}) = 0, \sum_{i=1}^n u_i(g_i^*) = 1$



Forme (5) : $u'_i(g_{i*}) = 0, u'_i(g_i^*) = 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Figure 4. — Conditions de normalisation des utilités partielles u_i et u'_i pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.

L'additivité dans les formules (4) et (5) est soumise à des conditions un peu restrictives comme, par exemple, l'indépendance au sens des préférences de toute paire de critères par rapport aux critères qui restent. Cette question de l'interaction de deux critères indépendamment des valeurs ou des conséquences des autres a été l'objet des recherches de plusieurs théoriciens : G. Debreu (1960), R. D. Luce, J. M. Tukey (1964) (utilité en avenir certain) et P. Fishburn (1965), R. Pollak (1967) (utilité-multiattribut espérée ou de von Neumann-Morgenstern).

2.2. La préférence globale

Avant de poser le problème auquel les méthodes UTA (UTilité Additive) prétendent fournir une solution, nous ouvrons une petite parenthèse pour donner quelques définitions et exemples de ce que nous entendons par préférence globale. Celle-ci est une relation sur un ensemble d'actions réelles ou fictives obtenue par un des modes suivants (tableau I).

TABLEAU I

Modes d'obtention d'une préférence globale

Mode	Exemples
1. Observation des comportements individuels.	Choix des modes de transport par les voyageurs (choix modal). Achat de produits par les consommateurs.
2. Jugements globaux des actions de référence (décisions répétitives).	Classement des candidats par un concours d'entrée (déjà effectué) dans un établissement. Comparaison des dossiers de crédit déjà octroyés ou non par la direction d'une banque.
3. Réponses obtenues au moyen d'un questionnaire simple et précis	Jugements globaux (attribution des notes globales) sur un sous-ensemble-échantillon des projets de recherche à sélectionner Comparaison de quelques variantes caractéristiques de tracé autoroutier choisies parmi l'abondance des combinaisons possibles. Taux de substitution entre paires de critères ou probabilités définissant des loteries équivalentes au sens des préférences sur des conséquences $g \in G$ concernant le problème précis.

La préférence globale est alors une relation binaire R définie sur les conséquences $g(A') \subset G$ d'un ensemble d'actions A' . Dans le cas 3... , par exemple, l'attribution du taux de substitution $t_{ij}(g)$ au vecteur-conséquence $g \in G$ indique le nombre d'unités de g_i que le décideur accepte de sacrifier pour récupérer une unité sur g_j (les valeurs des autres critères restant fixes) et définit l'indifférence suivante :

$$(g_1, \dots, g_i, \dots, g_j, \dots, g_n) I (g_1, \dots, g_i - t_{ij}, \dots, g_j + 1, \dots, g_n).$$

2.3. Les données. Le problème

Le problème consiste à estimer des fonctions d'utilité additives propres à un individu-décideur à partir d'un ensemble A' évalué sur les n critères et d'une préférence globale préordinaire $R = (P, I)$ sur A' . Ceci équivaut à l'ajustement du modèle linéaire $u(g) = u_1(g_1) + \dots + u_n(g_n)$ où l'on explique « au mieux » la préférence globale (variable à expliquer) par les n critères g_1, g_2, \dots, g_n (variables explicatives). Cette démarche explicative s'appelle désagrégation de la préférence globale R [cf. E. Jacquet-Lagrange (1978)] et apparaît comme la démarche inverse de la figure 3 (fig. 5).

Estimer la fonction d'utilité $u(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$, c'est estimer les n utilités partielles $u_1(g_1)$, $u_2(g_2)$, \dots , $u_n(g_n)$ de la forme (4) ou $u'_1(g_1)$, $u'_2(g_2)$, \dots , $u'_n(g_n)$ et $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ de la forme (5).

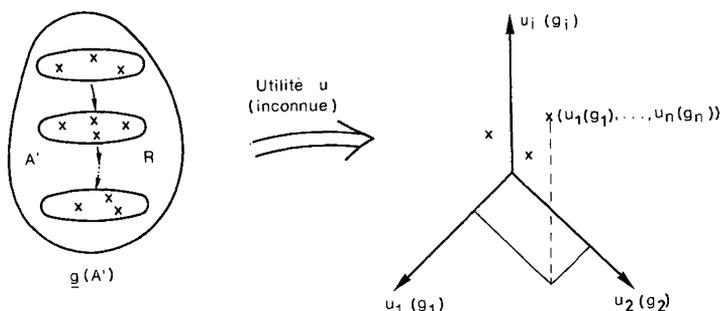


Figure 5. — Schéma de désagrégation d'une préférence globale « Plongeon » d'un vecteur $\mathbf{g} \in G$ dans l'espace des utilités partielles.

3. LES MÉTHODES UTA (UTILITÉ ADDITIVE)

Ce paragraphe contient une brève présentation du modèle UTAI [cf. E. Jacquet-Lagrange, J. Siskos (1978)] et l'exposé du modèle UTA II.

3.1. Le modèle UTAI

On considère un préordre R sur A' contenant Q classes d'équivalence (ou d'indifférence) dont chacune contient n_q , $q = 1, 2, \dots, Q$ actions.

On suppose que les valeurs extrêmes g_{i*} , g_i^* rencontrées sur chaque critère sont finies et on découpe l'intervalle $G_i = [g_{i*}, g_i^*]$ en $(\alpha_i - 1)$ intervalles égaux $[g_i^j, g_i^{j+1}]$. α_i est choisi par l'utilisateur (par exemple $\alpha_i = 5$) qui précise ainsi le nombre de points estimés pour chaque utilité u_i . g_i^j est alors donné par la formule

$$g_i^j = g_{i*} + \frac{j-1}{\alpha_i-1} (g_i^* - g_{i*}).$$

Si l'on ajoute à chaque utilité $u[\mathbf{g}(a)]$, $a \in A'$ une variable-erreur $\sigma(a)$ pondérée ou non par un coefficient $p(a)$, les utilités partielles $u_i(g_i^j)$, $j = 1, 2, \dots, \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ de la forme (4) et les erreurs σ sont estimées par le programme linéaire suivant.

$$[\min] F = \sum_{a \in A'} p(a) \sigma(a), \quad (7)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^n \{ u_i [g_i(a)] - u_i [g_i(b)] \} + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \text{si } a P b, \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^n \{ u_i [g_i(a)] - u_i [g_i(b)] \} + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \text{si } a I b, \quad (9)$$

$$u_i (g_i^{j+1}) - u_i (g_i^j) \geq s_i \quad \text{pour tout } i \text{ et } j, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n u_i (g_i^*) = 1, \quad (11)$$

$$u_i (g_{i*}) = 0, \quad u_i (g_i^j) \geq 0, \quad \sigma(a) \geq 0 \quad \text{pour tout } i \text{ et } j \text{ et pour tout } a \in A'. \quad (12)$$

Dans le programme linéaire (7)-(12) qui est un programme de type « goal programming » (cf. A. Charnes, W. W. Cooper [3, 4]), les contraintes (8) et (9) respectent les relations (1) et (2) dans le préordre R , les contraintes (10)-(12) portent sur les conditions de monotonie et de normalisation des u_i [le calcul des u_i^j et p de la forme (5) se fait suivant les formules (6)]. Les utilités partielles u_i des actions $a \in A'$ dont les évaluations $g_i(a)$ se situent à l'intérieur d'un intervalle $[g_i^j, g_i^{j+1}]$ sont calculées par interpolation linéaire

$$u_i [g_i(a)] = u_i (g_i^j) + \frac{g_i(a) - g_i^j}{g_i^{j+1} - g_i^j} [u_i (g_i^{j+1}) - u_i (g_i^j)]. \quad (13)$$

Par exemple, si $[g_i^j, g_i^{j+1}] = [3, 4]$ et $g_i(a) = 3,8$, alors d'après (13)

$$u_i [g_i(a)] = 0,2 u_i(3) + 0,8 u_i(4).$$

Les seuils s_i doivent prendre des valeurs qui traduisent les relations de préférence $g_i^{j+1} P g_i^j$ pour tout i et pour tout j (par exemple $s_i = 0,02$). Éventuellement, dans une première utilisation du programme, on doit poser : $s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$.

La valeur δ représente la plus petite différence d'utilité que l'on souhaite restituer entre deux classes consécutives du préordre R ; elle dépend du

nombre Q de classes dans R (par exemple, pour $Q=4-6$, $0,01 \leq \delta \leq 0,10$ et plus Q augmente plus δ doit diminuer), des valeurs des seuils s_i (prendre toujours $\delta \geq \sum_{i=1}^n s_i$) et des évaluations $\mathbf{g}(A')$.

Le programme UTA I se charge de formuler et de résoudre le programme dual du programme linéaire (7)-(12), qui comporte $\left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + |A'| \right\}$ contraintes de signe « \leq » et

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i - 1) + 2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1 \right\} \text{ variables.}$$

Un exemple d'illustration et quelques applications de ce modèle sont présentées dans [16] avec un certain nombre d'extensions possibles.

3.2. Le modèle UTA II

Cette méthode contient deux phases principales : la première sert à déterminer les allures des utilités partielles normées $u_i(g_i)$ et la seconde le jeu de poids $\mathbf{p}=(p_1, \dots, p_n)$ de la forme additive (14) :

$$u(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n p_i u_i(g_i), \quad \mathbf{g} \in G. \tag{14}$$

Dans la première phase, UTA II emprunte une méthode d'étude et de construction des utilités partielles normées qui permet d'exprimer l'importance et la sensibilité des valeurs d'une échelle $G_i = [g_{i*}, g_i^*]$ au sens des préférences (fig. 6).

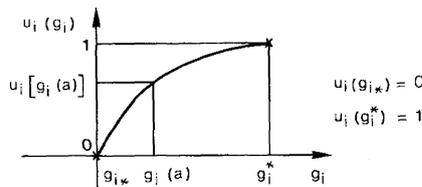


Figure 6. -- Utilité partielle normée entre 0 et 1.
Échelle sensible aux valeurs proches de g_{i*} .

Les méthodes qui peuvent servir de support à cette phase sont, par exemple, la méthode du point de valeur médiane (Mid-Value Splitting Technique) de

R. L. Keeney, H. Raiffa ([17, 18]) qui utilise des substitutions équivalentes pour compenser la même perte sur un critère, les méthodes d'étude de variation des taux de substitution dans G exposées et utilisées par K. R. Oppenheimer (1978) qui cherchent les formes explicites des $u_i(g_i)$ (par exemple $u_i(g_i) = e^{w_i g_i}$ ou $u_i(g_i) = g_i^{w_i}$, $w_i > 0$ constante), les méthodes des loteries équivalentes de P. Fishburn (1967), etc.

La seconde phase concerne la détermination des poids des critères par désagrégation de la préférence globale $R=(P, I)$. Comme dans UTAI, les vecteurs \mathbf{p} et σ sont calculés par le programme linéaire suivant :

$$[\min] F = \sum_{a \in A'} p(a) \sigma(a), \quad (15)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} p_i + \sigma(a) - \sigma(b) \geq \delta \quad \text{si } a P b, \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \{u_i[g_i(a)] - u_i[g_i(b)]\} p_i + \sigma(a) - \sigma(b) = 0 \quad \text{si } a I b, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad (18)$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \sigma(a) \geq 0, \quad a \in A'.$$

Cette structure, qui est plus réduite que celle du modèle UTAI, permet également de saisir la transitivité de R et est susceptible de subir une discussion semblable. Son dual ne contient que $n + |A'|$ contraintes de signe « \leq » à

$$\left(2 \times \sum_{i=1}^Q (n_i - 1) + Q + 1 \right) \text{ variables.}$$

Au cas où les évaluations $\mathbf{g}(A)$ permettent la mise au point du modèle additif particulier (somme pondérée) $u(\mathbf{g}) = \sum_{i=1}^n p_i g_i$, la deuxième phase du modèle UTA II s'applique directement en posant :

$$u_i[g_i(a)] = g_i(a); \quad a \in A', \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemple : Nous reprenons l'exemple du choix modal de l'introduction et nous supposons que les utilités u_i sont celles de la figure 7.

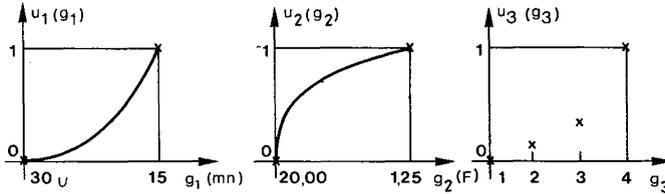


Figure 7. – Utilités partielles des critères du choix modal.

Soit $A' = \{a, b, c\}$ et R le préordre $a \succ (b \sim c)$. A partir des fonctions u_i de la figure 7 et des évaluations $g(A')$, nous calculons facilement les utilités $u[g(A')]$ (tableau II).

TABLEAU II

Évaluations $g(A')$ et utilités $u[g(A')]$

$g(A')$ A'	g_1 (mn)	g_2 (F)	g_3
a	20	15,00	4
b	18	1,25	1
c	15	2,20	2
$u[g(A')]$ A'	$u_1(g_1)$	$u_2(g_2)$	$u_3(g_3)$
a	0,35	0,75	1,00
b	0,45	1,00	0,00
c	1,00	0,90	0,20

Le programme linéaire (15)-(18) devient alors ($p(a) = p(b) = p(c) = 1, \delta = 0,1$) :

$$[\min] F = \sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(c),$$

sous les contraintes :

$$\left. \begin{aligned} -0,10 p_1 - 0,25 p_2 + p_3 + \sigma(a) - \sigma(b) &\geq 0,1, \\ -0,55 p_1 + 0,10 p_2 - 0,20 p_3 + \sigma(b) - \sigma(c) &= 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad p_3 \geq 0, \quad \sigma(a) \geq 0, \quad \sigma(b) \geq 0, \quad \sigma(c) \geq 0.$$

4. ANALYSE DE SENSIBILITÉ D'UNE FONCTION D'UTILITÉ

Dans ce paragraphe, nous abordons le problème crucial de la sensibilité d'une fonction d'utilité construite à l'aide des méthodes UTA. Il s'agit d'un problème général qui se pose toujours lorsqu'on estime les paramètres d'un modèle en rendant optimal un certain critère, quel que soit ce critère : une corrélation ou une distance entre deux variables, une somme algébrique d'écart pondérés ou absolus, etc.

Le modélisateur qui veut saisir les préférences d'un ou de plusieurs décideurs au moyen d'une fonction d'utilité se trouve face à un champ de questions liées à des phénomènes comme les suivants :

- phénomènes de forte corrélation entre critères pouvant fausser et altérer une bonne explication de la préférence globale;
- phénomènes de multiplicité de solutions, toutes considérées comme admissibles au sens de l'explication et de la reconstitution de la préférence globale.

Les structures du « goal programming » sous lesquelles se formalisent les programmes mathématiques (7)-(12) et (15)-(18) donnent la possibilité et les moyens de répondre à ces questions. Par contre, ces problèmes n'ont pas été abordés par les méthodologies évoquées par R. L. Keeney, H. Raiffa (1976), P. Fishburn (1967), R. Eckenrode (1965) ou par les méthodes du codage « optimal » MORALS [Multiple Optimal Regression by Alternating Least Squares; cf. F. W. Young, J. de Leeuw, Y. Takane (1976)] et ADDALS [ADDitivity analysis by Alternating Least Squares; cf. J. de Leeuw, F. W. Young, Y. Takane (1976)].

L'analyse qui suit peut également être employée dans d'autres méthodes qui utilisent le « goal programming » : par exemple dans les méthodes de régression linéaire multiple citées par H. M. Wagner (1959) ou A. Charnes, W. Cooper (1977), dans les méthodes de V. Srinivasan, A. D. Shocker ([32, 33]) et dans le modèle de D. Pekelman, S. Sen (1974). Une synthèse de ces travaux est présentée dans [31].

4.1. Analyse post-optimale

Nous avons qualifié d'« optimale » une fonction $u^*(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$ qui explique « au mieux » la relation binaire R au sens du « goal programming ». Dans les méthodes UTA, cette fonction a été la solution (vecteur \mathbf{x}) du programme linéaire suivant ($p(a)=1, \forall a \in A$) :

dans le polyèdre

$$\left. \begin{aligned} [\min] F &= \sum_{a \in A'} \sigma(a) \\ \mathcal{A} \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

dont la valeur optimale est symbolisée par F^* .

Soit $k(F^*)$ une petite valeur positive ou nulle dépendant de F^* . Nous formons la nouvelle contrainte (21) :

$$F \leq F^* + k(F^*) \quad (21)$$

qui est relative aux valeurs de F et nous l'ajoutons aux contraintes de (20). Le nouveau polyèdre prend la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A} \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \\ -F &\geq -[F^* + k(F^*)], \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \right\}$$

ou la forme plus synthétisée

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}' \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}', \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

avec

$$\mathcal{A}' = \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ -F \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b}' = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -F^* - k(F^*) \end{bmatrix}$$

les matrices \mathcal{A} et \mathbf{b} augmentées de la ligne supplémentaire (21).

Le système (22) associé à l'exemple du choix modal prendrait la forme ci-dessous (les équations sont remplacées par deux inégalités)

$$\begin{bmatrix} -0,10 & -0,25 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -0,55 & 0,10 & -0,20 & 0 & 1 & -1 \\ 0,55 & -0,10 & 0,20 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \sigma(a) \\ \sigma(b) \\ \sigma(c) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -F^* - k(F^*) \end{bmatrix}$$

$$p_1 \geq 0, \quad p_2 \geq 0, \quad p_3 \geq 0, \quad \sigma(a) \geq 0, \quad \sigma(b) \geq 0, \quad \sigma(c) \geq 0.$$

Dans l'espace à deux dimensions, ce polyèdre serait représenté par la région hachurée de la figure 8.

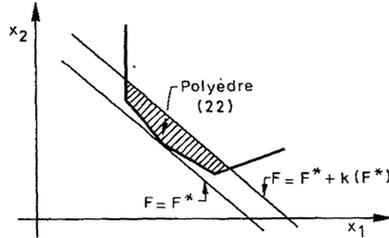


Figure 8. — Représentation graphique de la k -optimalité.

L'analyse post-optimale consiste à rechercher tous les vecteurs x contenus dans le polyèdre (22); il suffit pour cela de trouver tous ses sommets, un vecteur quelconque x étant une combinaison linéaire de ces sommets.

Les algorithmes qui peuvent servir de moyen à cette analyse sont des méthodes arborescentes [méthodes du simplexe inverse, cf. C. van de Panne (1975)] ou des techniques liées à la notion du labyrinthe en théorie des graphes [méthodes de Tarry (cf. [3, 35]) et méthode de M. Manas, J. Nedoma (1968)].

4.2. Application aux méthodes UTA

La post-optimalité est utilisée dans les méthodes UTA pour étudier la sensibilité et la stabilité de la fonction d'utilité $u^*(g)$, $g \in G$ et apporte des informations très intéressantes sur les différentes possibilités d'explication de la préférence globale R . Des expérimentations nombreuses ont montré que $u^*(g)$, $g \in G$, qui est optimale par rapport à F , n'est pas toujours optimale par rapport à d'autres critères (voir 4.3), par exemple au τ de Kendall (coefficient de distance entre R et le préordre défini par u^* , variant de -1 à 1 [cf. P. Bertier, J. M. Bouroche (1975)]). La problématique de l'optimisation est non pas seulement insuffisante mais dangereuse dans ce type d'analyses. Il est donc nécessaire de la remplacer par la problématique plus large de la k -optimalité. Les valeurs de k utilisées dans l'analyse doivent garantir un τ de Kendall au moins aussi satisfaisant que le τ de Kendall de la solution optimale.

La recherche de tous les sommets du polyèdre (22) serait un travail très coûteux ou peut-être irréalisable car la combinatoire y est très importante. Selon V. Klee (1964), un polyèdre défini par un système de m équations à l variables ($l > m$) peut avoir au plus un nombre r de sommets donné par :

$$r = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{2l}{m+l} \mathfrak{C}_{(1/2)(m+l)}^m & \text{si } l-m \text{ est pair,} \\ 2 \mathfrak{C}_{(1/2)(m+l-1)}^m & \text{si } l-m \text{ est impair.} \end{array} \right\} \quad (23)$$

La formule (23) appliquée au problème du choix modal ($m=4$, $l=8$) donne $r=20$ mais pour ($m=10$, $l=16$) $r=352$ et ($m=10$, $l=17$) $r=572$.

Nous avons alors décidé de rechercher un ensemble de sommets caractéristiques de ce polyèdre aussi différents que possible et plus précisément ceux correspondant à des utilités attribuant des poids extrémaux aux critères. Cette exploration partielle du polyèdre (22) est effectuée par la résolution successive des programmes linéaires (24). Cette idée, au cas de la dégénérescence ($F^*=0$), a été exploitée dans un modèle de désagrégation de préférences utilisant comme modèle d'agrégation des critères la règle de Condorcet généralisée (cf. [14]).

$$\left. \begin{array}{l} [\max] \sum_{i=1}^n \rho_i p_i, \\ [\min] \sum_{i=1}^n \rho_i p_i, \end{array} \right\} \text{ dans polyèdre (22)} \quad (24)$$

avec $\rho_i=0$ ou 1 pour tout i et pour UTA I : $p_i=u_i(g_i^*)$. Ce procédé donne une idée très claire de la variation (« fourchettes ») des poids d'un ou de plusieurs critères à la fois et par conséquent de la stabilité de l'optimum. Si, par exemple, l'on trouve $[\min] p_i$ et $[\max] p_i$, on peut conclure l'importance que le décideur attache au critère g_i .

4.3. Exemple d'application

Le problème qui suit nous a été communiqué par B. Roy. Considérons le cas d'un responsable habilité à décider de l'octroi d'un certain type de crédits. Supposons que sa direction lui demande de fonder principalement sa décision sur 5 ratios (critères) qui sont automatiquement calculés à partir des

informations que renferment les dossiers de demandes. Le problème consiste à déterminer des combinaisons de valeurs de ces critères susceptibles de caractériser, compte tenu de la politique de la direction, les limites du « sûrement acceptable » et celles du « sûrement inacceptable ».

L'étude est appuyée sur l'information qu'apportent 9 actions-dossiers de référence (cf. tableau I) déjà jugées et classées par la direction de l'organisme financier (tableau III). Cette préférence globale R était le préordre total suivant :

$$R : a_1 > (b_1 \sim b_2) > (a_2 \sim a_3) > (c_1 \sim c_2) > (a_4 \sim a_5). \quad (25)$$

La relation R confirme l'acceptation du dossier a_1 et le rejet de a_4 et a_5 . Pour a_2 et a_3 , aucune décision n'a été prise.

TABLEAU III

Exemple de l'octroi de crédits (B. Roy [29])

Actions de référence	Ratio 1	Ratio 2	Ratio 3	Ratio 4	Ratio 5
Limites du sûrement acceptable.....	$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \\ 0,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \\ 0,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,7 \end{array} \right.$
Limites du sûrement inacceptable.....	$\left\{ \begin{array}{l} c_1 \\ c_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,7 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,5 \end{array} \right.$
Exemples de dossiers de crédits.....	$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,6 \\ 0,6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,7 \\ 0,5 \\ 0,7 \\ 0,6 \\ 0,6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,6 \\ 0,6 \\ 0,3 \\ 0,3 \\ 0,6 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,5 \\ 0,7 \\ 0,7 \\ 0,7 \\ 0,5 \end{array} \right.$

Le cas nous incite à appliquer UTA II car les critères sont des graduations ($g_i \equiv u_i(g_i)$) permettant la comparaison directe des intervalles des valeurs. La mise au point du modèle (cas d'optimisation) a donné les résultats des tableaux IV et V ($\delta = 0,01$).

Cette solution repère la limite de l'« inacceptable » à la valeur $u^*[g(c_1)] = u^*[g(c_2)] = 0,500$ mais laisse une zone de flou (entre 0,595 et 0,605) pour la détermination de la limite de l'« acceptable ».

TABLEAU IV

Solution « optimale » du problème de l'octroi de crédits

PROGRAMME LINÉAIRE DUAL	CRITÈRES	POIDS
NOMBRE DE CONTRAINTES = 14	1. RAT1	0,0
NOMBRE DE VARIABLES = 14	2. RAT2	0,475
% A (I, J) NON NULS = 35 %	3. RAT3	0,100
NOMBRE D'ITÉRATIONS = 7	4. RAT4	0,100
OPTIMUM $F^* = 0.03000$	5. RAT5	0,325

TABLEAU V

Préordre R et préordre défini par l'utilité $u(g) = \sum_{i=1}^n p_i g_i$.

Les variables $\sigma(a)$, $a \in A'$ se réfèrent à la première colonne et le tau de Kendall est égal à 0,86.

PREO A EXPL		PRÉORDRE DÉFINI PAR L'UTILITÉ			
ACTION RANG		ACTION RANG		UTILITÉ U	SIGMA
A1	1	A1	1	0,605	0,010
B1	2	B2	1	0,605	0,010
B2	2	B1	2	0,595	0,0
A2	3	A2	2	0,595	0,0
A3	3	A3	2	0,595	0,0
C1	4	C1	3	0,500	0,0
C2	4	C2	3	0,500	0,0
A4	5	A5	4	0,427	0,010
A5	5	A4	5	0,417	0,0

Pour la recherche des solutions post-optimales, on a choisi $k(F^*) = 0,001$ d'où $F^* + k(F^*) = 0,031$. La résolution d'une dizaine de programmes du type (24) a apporté les éléments du tableau VI.

Les 5 premières solutions du tableau VI confirment une corrélation parfaite des critères g_1 et g_2 (résultat vérifié au tableau III d'évaluation multicritère); ceci implique que toute paire de poids (p_1, p_2) qui vérifie la relation :

TABLEAU VI
 10 solutions post-optimales du problème de l'octroi de crédits

N°	Objectif (24)	Nombre d'itérations	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	de Kendall	Limite de l'« acceptable »	Limite de l'« inacceptable »
1. . . .	[max] p_1	10	0,502	0,000	0,090	0,040	0,367	0,92	0,599	0,500
2. . . .	[min] p_2	11	0,502	0,000	0,090	0,040	0,367	0,92	0,599	0,500
3. . . .	[max] p_2	10	0,000	0,502	0,090	0,040	0,367	0,92	0,599	0,500
4. . . .	[min] $p_1 + p_2$	10	0,000	0,474	0,105	0,105	0,316	0,86	0,595-0,605	0,500
5. . . .	[max] $p_1 + p_2$	10	0,000	0,502	0,090	0,040	0,367	0,92	0,599	0,500
6. . . .	[min] p_3	10	0,000	0,478	0,090	0,090	0,343	0,86	0,595-0,604	0,500
7. . . .	[max] p_3	12	0,000	0,497	0,110	0,065	0,327	0,89	0,599	0,500
8. . . .	[min] p_4	11	0,000	0,502	0,090	0,040	0,367	0,92	0,599	0,500
9. . . .	[max] p_4	13	0,000	0,475	0,110	0,110	0,305	0,89	0,595-0,605	0,500
10. . . .	[max] $p_3 + p_4$	13	0,000	0,475	0,110	0,110	0,305	0,89	0,595-0,605	0,500

$p_1 + p_2$ = somme de deux poids d'une solution, est admissible. Dans la solution 4, par exemple, où $(p_1, p_2) = (0, 0, 0, 474)$, toute paire (p_1, p_2) telle que $p_1 + p_2 = 0,474$ est admissible pour cette solution. De plus, la pondération conjointe $p_1 + p_2$ est comprise entre 0,474 et 0,502 avec une meilleure explication de R vers les valeurs les plus élevées ($\tau = 0,92$). L'importance relative du critère g_1 par rapport à g_2 pourrait être l'objet d'une discussion entre décideur et modélisateur (cf. § 5, 3^e dialogue).

Ensuite, les critères g_3 et g_4 sont conservés à des niveaux faibles ($0,09 \leq p_3 \leq 0,11$, $0,04 \leq p_4 \leq 0,11$), de l'ordre de 10 % chacun; leur attitude se révèle discordante par rapport notamment aux critères g_1 et g_2 (solutions 1, 3, 5 et 10 du tableau VI). Le dernier critère reçoit finalement un poids de l'ordre de 30-40 %, jouant un rôle très important dans l'explication de R .

L'exploration du polyèdre (22) par l'analyse post-optimale, comme nous l'avons menée dans le paragraphe 4.2, a décelé :

- une stabilité relative (« fourchettes » très fines) de la fonction d'utilité dans le polyèdre d'admissibilité (22);
- l'infériorité évidente de la solution « optimale » $u^*(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$ devant d'autres solutions (la solution du tableau VII par exemple), jugée sur les valeurs du τ de Kendall et sur la discrimination des valeurs $u[\mathbf{g}(a)]$, $a \in A'$ vis-à-vis de la problématique du « tri » (segmentation);
- la détermination de la limite du « sûrement inacceptable » repérée à 0,500 et celle du « sûrement acceptable » repérée à 0,599.

Bien qu'en général les limites d'acceptation et de rejet d'un dossier de demande soient floues, de manière à prendre en compte une politique plus souple du décideur, nous pouvons, à titre d'exemple, construire un critère de trichotomie des dossiers candidats (ensemble A) fondé sur la distribution de valeurs de la fonction d'utilité du tableau VII ($\tau = 0,92$), notée $\tilde{u}(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$:

$$\begin{array}{ll} \text{Un dossier } a \in A \text{ est octroyé} & \Leftrightarrow \tilde{u}[\mathbf{g}(a)] \geq 0,599. \\ \text{Un dossier } a \in A \text{ est renvoyé} & \\ \text{pour complément d'informations} & \Leftrightarrow 0,500 < \tilde{u}[\mathbf{g}(a)] < 0,599. \\ \text{Un dossier } a \in A \text{ est rejeté} & \Leftrightarrow \tilde{u}[\mathbf{g}(a)] \leq 0,500. \end{array}$$

UTA I a été appliqué au même problème et dans la même perspective; ses résultats étaient comparables à ceux de la méthode UTA II mais le polyèdre (22) permettait des fonctions d'utilité moins stables que \tilde{u} . Ce phénomène est dû à la nature de la préférence globale R (information très pauvre) et à la multiplicité des dimensions exigées dans les programmes linéaires de cette méthode.

TABLEAU VII

Une des fonctions d'utilité $\tilde{u}(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$ retenue : les poids p_1 et p_2 prennent des valeurs arbitraires positives de façon à satisfaire la relation : $p_1 + p_2 = 0,502$.

CRITÈRES	POIDS
1. RAT1	p_1
2. RAT2	p_2
3. RAT3	0,090
4. RAT4	0,040
5. RAT5	0,367

PREO A EXPL		PRÉORDRE DÉFINI PAR L'UTILITÉ			
ACTION RANG		ACTION RANG		UTILITÉ U	SIGMA
A1	1	A1	1	0,609	0,001
B1	2	B1	2	0,600	0,000
B2	2	B2	3	0,599	0,001
A2	3	A3	4	0,590	0,000
A3	3	A2	4	0,590	0,0
C1	4	C1	5	0,500	0,0
C2	4	C2	6	0,490	0,010
A4	5	A5	7	0,412	0,019
A5	5	A4	8	0,393	0,0

4.4. Définition des relations de surclassement

L'analyse de sensibilité d'une fonction d'utilité u^* offre, par l'exploration du polyèdre (22), un système U de fonctions aussi admissibles que u^* compte tenu de l'explication de la préférence globale R . Bien sûr, comme nous l'avons mentionné, cette famille peut contenir une infinité de fonctions u qualifiées d'explicatives « au mieux » de la relation R . Suivant notre procédé dans le paragraphe 4.2, U ne renferme que des fonctions extrémales habiles à cerner le système des préférences du décideur.

« Lorsqu'on accepte que la modélisation des préférences ne soit que partielle et ne porte que sur la part des préférences que l'on est en mesure d'asseoir avec une objectivité et une sécurité jugées suffisantes » (cf. [23]), on peut introduire

une relation de surclassement. Celle-ci est une relation binaire définie sur A de la manière suivante :

– la proposition « a surclasse b » signifie qu'on admet que a est au moins aussi bon que b ;

– la proposition « a ne surclasse pas b » signifie que les preuves en faveur de la proposition « a est au moins aussi bon que b » sont jugées insuffisantes.

Dans ce nouveau contexte de modélisation des préférences, nous pouvons introduire une relation de surclassement S basée sur la répartition des valeurs des fonctions d'utilité $u \in U$. En effet, une relation déterministe S est définie par les relations suivantes (a et b actions de A) :

$$aSb \Leftrightarrow u[\mathbf{g}(a)] \geq u[\mathbf{g}(b)], \quad \forall u \in U$$

ou encore

$$aSb \Leftrightarrow \min_{u \in U} \{ u[\mathbf{g}(a)] - u[\mathbf{g}(b)] \} \geq 0. \quad (26)$$

La relation S qui est transitive (cf. [15]) devient forte (surclassement fort) lorsque le nombre d'éléments de U , noté $|U|$, grandit; par contre, le surclassement est faible lorsque $|U|$ est petit. Ceci met en évidence les relations (27) suivantes :

$$|U| < |U'| < |U''| < \dots \Rightarrow S(A) \subseteq S'(A) \subseteq S''(A) \subseteq \dots \quad (27)$$

Une relation de surclassement flou est caractérisée par la définition d'un degré de crédibilité $d(a, b)$, ($a, b \in A \times A$) destiné à repérer la plus ou moins grande crédibilité du surclassement de b par a . Si l'on suppose que les éléments de U sont indicés ($U = \{u^1, u^2, \dots, u^i, \dots\}$), nous pouvons poser :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(a, b) &= \begin{cases} 1 & \text{si } u^i[\mathbf{g}(a)] - u^i[\mathbf{g}(b)] \geq 0, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \\ d(a, b) &= \frac{\sum_{i=1}^{|U|} \varphi_i(a, b)}{|U|} \text{ pour toute paire d'actions } a \text{ et } b. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Il est facile de démontrer que la fonction d vérifie les trois conditions, citées dans [23, 28], qui la caractérise comme degré de crédibilité. Dans ce cas-là, une relation S^λ (non floue) est définie par la relation (29) :

$$aS^\lambda b \Leftrightarrow d(a, b) \geq \lambda, \quad (29)$$

c'est-à-dire a surclasse b lorsque le degré de crédibilité $d(a, b)$ atteint un seuil λ ; λ doit être supérieur à 0.5 et proche de 1.

Pour illustrer les notions citées ci-dessus, nous considérons le système U composé de 6 fonctions d'utilité de l'exemple du paragraphe 4.3; nous prenons alors la fonction optimale u^* et les fonctions 1, 4, 6, 7 et 9 du tableau VI. La relation de surclassement S^λ au seuil $\lambda = 4/6$, définie sur l'ensemble $A = \{b_1, b_2, a_2, a_3, c_1, c_2\}$ de dossiers de crédits, est représentée par le graphe de la figure 9. Pour obtenir le graphe du surclassement déterministe (26) dans cet exemple, il suffit de retenir les arcs valués de 1 (fig. 9).

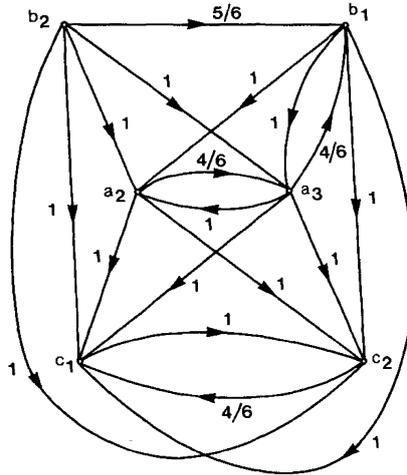


Figure 9. — Graphe de surclassements défini par (29).

Une relation de surclassement déterministe ou flou peut conduire en général à un préordre total sur l'ensemble des actions A . Des exemples classiques à ce propos constituent les algorithmes ELECTRE (cf. B. Roy).

5. MODE D'APPLICATION INTERACTIF DES MODÈLES UTA

Les modèles UTA sont des méthodes d'identification des préférences individuelles. Leur application nécessite un processus interactif au cours duquel le modélisateur peut tester la validité de son modèle sur les trois points suivants :

- l'additivité de la fonction d'utilité (indépendance des critères au sens des préférences);
- le pouvoir explicatif du modèle (bonne explication de R);
- la cohérence entre les préférences *a priori* du décideur et les résultats du modèle.

Cette insertion interactive des modèles UTA dans un processus décisionnel est intégrée par le schéma de la figure 10. Un schéma plus général est proposé par E. Jacquet-Lagrezze [15].

La figure 10 comporte trois dialogues entre modélisateur et décideur et met en œuvre quatre boucles de rétro-actions possibles.

Au cours du premier dialogue, le décideur présente son problème au modélisateur et lui apporte toute l'information nécessaire pour conduire la modélisation sur les trois niveaux. Le modèle de préférence globale choisi est une fonction d'utilité additive de la forme (4) ou (5).

Le modélisateur construit ensuite un langage simple et précis de discussion des différents niveaux de conséquences dans G (compensations et interactions entre critères à plusieurs niveaux $\mathbf{g} \in G$) et provoque un second dialogue avec le décideur. Un exemple de ce dialogue, basé sur des taux de substitution, est développé par R. L. Keeney, H. Raiffa ([17, 18]). Cette expérience permet de tester l'indépendance (au sens des préférences) pour toute paire de critères. W. M. Gorman (1968) a démontré que si cette indépendance est vraie pour les paires (g_i, g_j) et (g_i, g_k) de critères, elle est vraie aussi pour la paire (g_j, g_k) . Ce théorème permet à l'homme d'étude d'effectuer seulement $n - 1$ tests au lieu de $n(n - 1)/2$ s'il y a n critères. Au cas où l'on cherche à estimer une utilité unique et si l'indépendance n'est pas détectée, il y a retour au 3^e niveau (1^{re} boucle) avec le choix d'un autre modèle de préférence globale (par exemple : utilité multiplicative).

Si le modèle additif est adopté, l'homme d'étude demande la préférence globale du décideur sur un ensemble de conséquences A' (cf. tableau I) pour la mise au point du modèle de désagrégation correspondant à la forme d'utilité choisie. Un exemple de recueil par questionnaire de la préférence globale d'un administrateur universitaire est donné par D. S. P. Hopkins, J. C. Larreche, W. F. Massy (1977).

Après examen des résultats fournis par UTA, l'homme d'étude s'interroge sur l'explication de la donnée R ; celle-ci est étudiée à l'aide du coefficient de distance de deux relations binaires τ de Kendall. Si τ est élevé, l'explication est bonne et les résultats sont présentés au décideur; dans le cas contraire, la famille de critères $\{\mathbf{g}\}$ n'est pas explicative de R et il y a retour au second niveau de modélisation (2^e boucle).

Finalement, les résultats font l'objet d'un troisième et dernier dialogue entre décideur et modélisateur basé sur une analyse de sensibilité des fonctions d'utilité (cf. § 4) bâties par le modèle. Le décideur, au vu des différentes possibilités de

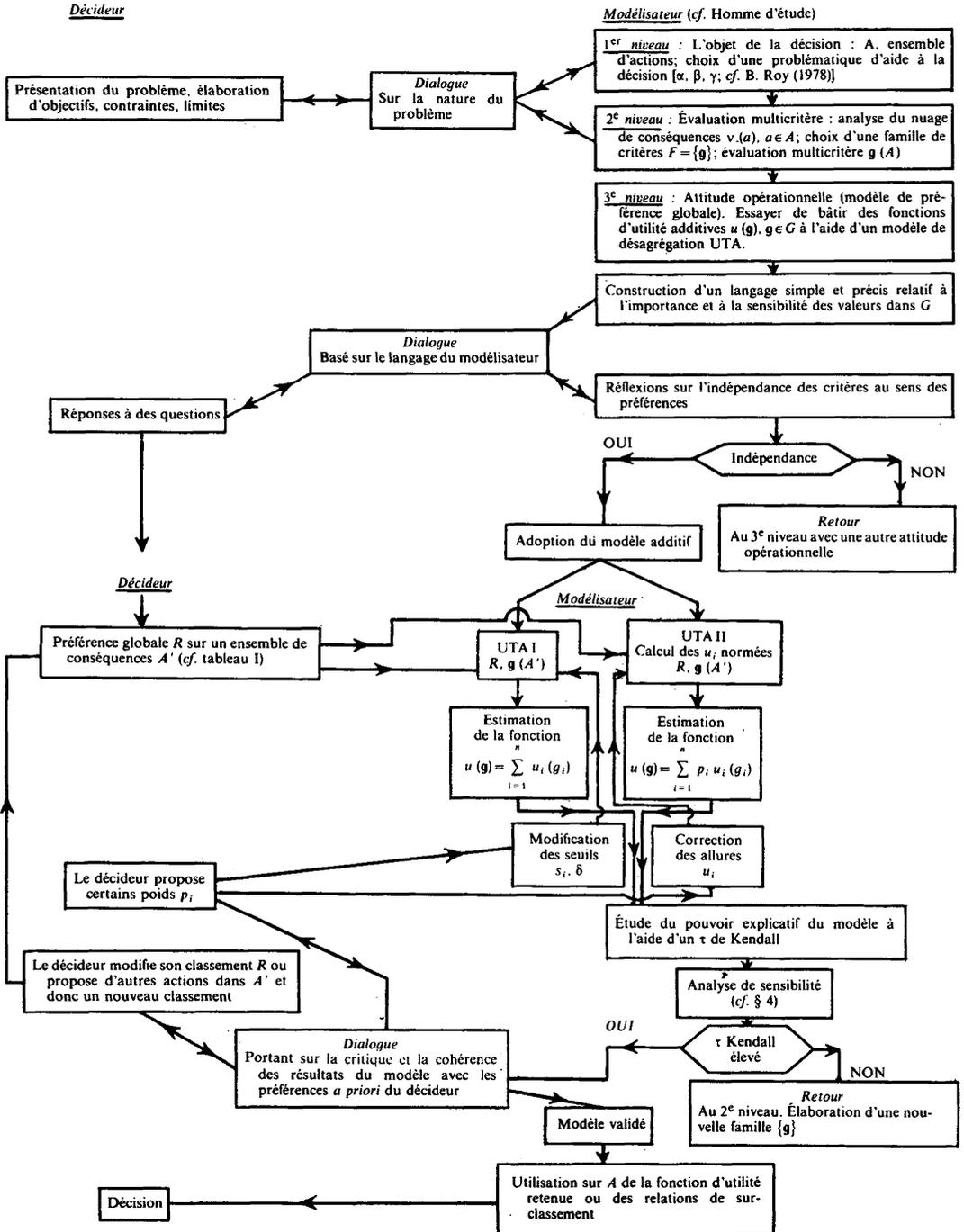


Figure 10. — Schéma interactif d'insertion des modèles UTA dans un processus de décision.

modélisation de ses préférences, peut réagir de deux manières (deux boucles de rétro-actions) :

- il modifie sa préférence globale en proposant ou modifiant certaines actions. Dans ce cas-là, l'homme d'étude accepte ce complément d'information et réapplique UTA;
- il propose des valeurs pour les poids de certains critères en fonction de ses préférences *a priori* (systèmes de valeurs, objectifs, . . .). Dans ce dernier cas, le modélisateur essaye de modifier les entrées dans UTA (cf. *fig.* 10) et de réutiliser le modèle.

L'identification des préférences est obtenue (choix d'une ou de plusieurs fonctions $u(\mathbf{g})$, $\mathbf{g} \in G$) après un accord au cours du dernier dialogue. L'aide à la décision est basée sur ces fonctions d'utilité à partir de A et de la problématique choisie.

La démarche ci-dessus a été utilisée par J. C. Marchet, J. Siskos [22] dans une étude d'impact sur l'environnement.

Dans les méthodes d'analyse et d'explication des données par usage du modèle linéaire (exemple : [30]) ou dans les méthodes de codage « optimal » (exemples : [6, 37]), les statisticiens et les psychométriciens suppriment les deux derniers dialogues du schéma. La validité de leur modèle « est assurée » par l'optimisation d'un critère prédéfini comme par exemple d'une distance euclidienne ou d'un coefficient de corrélation.

6. LA STRUCTURE DES PROGRAMMES

Les méthodes UTA I et UTA II sont automatisées et comportent respectivement 980 et 694 instructions FORTRAN IV. Leur mise au point est caractérisée par l'existence de deux phases. La première phase se situe dans le contexte d'optimisation avec recherche de la fonction d'utilité « optimale » u^* ; $IP\emptyset ST$ (Indicateur de POST-optimalité) = 0. La structure commune des deux programmes pour cette phase est donnée par la figure 11. Lors de la seconde phase ($IP\emptyset ST = 1$) les programmes produisent un ensemble de fonctions post-optimales telles que nous les avons définies au paragraphe 4.

Les deux programmes, à l'exception des sous-programmes DATA et SORTIE, appellent les mêmes sous-programmes au cours de leur déroulement. Leur fonctionnement est contrôlé par un indicateur d'arrêt ISTOP (*fig.* 11) qui prend la valeur 1 lorsque le problème est mal posé ou quand les paramètres sont mal introduits dans DATA

Nous présentons ci-dessous les sous-programmes de UTA I et II accompagnés de leurs caractéristiques :

– *DATA* : Lecture des données, Structuration du programme linéaire (primal) (7)-(12) pour UTA I ou du programme (15)-(18) pour UTA II, Passage au dual par appel du sous-programme MATRA;

– *MATRA* (MATRice A) : Stockage uniquement des éléments non nuls de A dans des matrices unidimensionnelles. Cette technique permet d'économiser un grand espace-mémoire d'ordinateur.

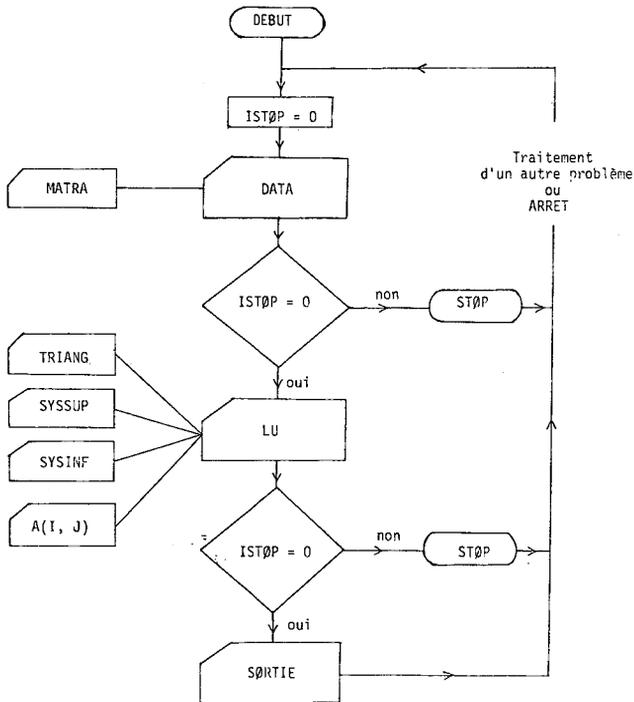


Figure 11. — Organigramme général des programmes UTA (IP0ST=0 : optimisation).

– *LU* : Résolution d'un programme linéaire par la méthode de décomposition de Bartels-Golub (cf. R. H. Bartels [1] ou P. Tolla [34]). Dans cette méthode, la base du simplexe s'exprime par le produit d'une matrice triangulaire inférieure L et d'une matrice triangulaire supérieure U ($B=LU$). Les résultats de cette méthode sont dotés d'une grande précision numérique;

– *TRIANG* : TRIANGularisation d'une matrice avec recherche du plus grand coefficient sous la diagonale;

- *SYSINF* : Résolution d'un SYStème linéaire triangulaire INFérier pour la détermination du vecteur π des multiplicateurs du simplexe;
- $A(I, J)$: Fonction d'identification d'un élément non nul de la matrice \mathcal{A} .
- *SYSSUP* : Résolution d'un SYStème linéaire triangulaire SUPérier pour le calcul du vecteur y du simplexe;
- *SØRTIE* : Présentation des résultats :
 - programme dual (nombre de contraintes, nombre de variables, nombre d'itérations, F^*);
 - pondération pour UTA II ou pondération et utilités partielles u_i pour UTA I;
 - valeur du τ de Kendall;
 - préordre à expliquer et préordre défini par l'utilité;
 - matrices associées aux préordres (uniquement si $IPØST=0$).

Les deux programmes ont été déjà adaptés à un ordinateur IBM 370/168. La complexité des algorithmes dépend de la taille et du nombre des programmes linéaires à résoudre. Nous présentons (tableau VIII) les temps de calcul nécessaires au déroulement du programme UTA I sur quatre problèmes réels; UTA II est évidemment beaucoup plus rapide que UTA I.

TABLEAU VIII

Expérience numérique avec le programme UTA I sur quelques problèmes réels

N°	Problème	Référence	Nombre d'actions	Nombre de critères	Nombre de solutions	Temps de calcul
1..	Choix de dossiers de crédits	[23] [29]	9	5	10	0 minute, 9,74 secondes
2..	Choix d'un tracé autoroutier	[22]	8	4	10	0 minute, 10,86 secondes
3..	Analyse des préférences d'un juge	[16] [31]	18	7	10	1 minute, 05,69 secondes
4..	Évaluation des fonctions d'une entreprise	[31]	57	6	1	1 minute, 12,03 secondes

7. CONCLUSION

Nous avons présenté deux méthodes (méthodes UTA) d'identification et de saisie des préférences d'un individu-décideur au moyen de fonctions d'utilité additives fondées sur l'explication d'une relation préordinaire (préférence

globale) fournie par ce décideur. Ces fonctions d'utilité répondent, grâce aux techniques du « goal programming », au principe de la post-optimalité qui est plus large que celui de l'optimisation. Cette nouvelle approche permet d'appréhender mieux le système des préférences du décideur et de définir des relations de surclassement basées sur la concordance des fonctions d'utilité multiples.

Nous avons proposé un mode d'utilisation interactif des méthodes UTA permettant de tester la validité, la stabilité et la cohérence des fonctions d'utilité avec les préférences *a priori* du décideur.

La méthodologie proposée est susceptible d'être appliquée dans tous les domaines du management scientifique, de même que dans d'autres domaines, tels que l'analyse des préférences, la régression linéaire multiple, etc.

Nous avons déjà appliqué les modèles UTA dans deux problèmes concrets d'aide à la décision. Le premier (*cf.* [31]) consistait à construire un critère d'évaluation des fonctions d'une société (gestion du personnel) à partir du classement indiciaire de 57 postes de référence et de 6 critères qualificatifs comme le niveau intellectuel, les compétences, la responsabilité, etc. Le second consistait à bâtir des critères en matière d'environnement et à faire asseoir des fonctions d'utilité compatibles avec le classement global de 8 tracés autoroutiers; ces fonctions ont permis d'évaluer et de comparer tous les tracés possibles situés dans une grande bande de terrain comprise entre deux villes françaises (*cf.* [22]).

Les méthodes UTA peuvent également être considérées comme des méthodes d'identification et de révélation locale des préférences, basées sur l'explication d'une relation binaire locale, de manière à guider interactivement le décideur vers la configuration $g \in G$ préférée.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier vivement Éric Jacquet-Lagrez et Bernard Roy du LAMSADE (Paris-IX - Dauphine) pour leurs suggestions constructives à la réalisation de cette recherche.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. H. BARTELS, *A Stabilization of the Simplex Method*, Num. Math., vol. 16, 1971, p. 414-434.
2. P. BERTIER et J. M. BOUROCHE, *Analyse des données multidimensionnelles*, P. U. F., Paris, 1975.

3. A. CHARNES et W. W. COOPER, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, vol. 1, John Wiley and Sons, 1961.
4. A. CHARNES et W. W. COOPER, *Goal Programming and Multiple Objective optimizations Part 1*, European Journal of Operational Research, vol. 1, 1977, p. 39-54.
5. G. DEBREU, *Topological Methods in Cardinal Utility Theory*, dans Mathematical methods in the social sciences, K. J. ARROW, S. KARLIN et P. SUPPES, éd., Stanford University Press, Stanford, Calif., 1960, p. 16-26.
6. J. DE LEEUW, F. W. YOUNG et Y. TAKANE, *Additive Structure in Qualitative Data: an Alternating Least Squares Method with Optimal Scaling Features*, Psychometrika, vol. 41, n° 4, 1976, p. 471-503.
7. R. ECKENRODE, *Weighting Multiple Criteria*, Management Science, vol. 12, n° 3, 1965, p. 180-192.
8. P. H. FARQUHAR, *A Survey of Multiattribute Utility Theory and Applications*, T.I.M.S. Studies in the Management Sciences, vol. 6, North-Holland Publishing Company, 1977, p. 59-89.
9. P. FISHBURN, *Independence in Utility Theory with Whole Product sets*, Operations Research, vol. 13, 1965, p. 28-45.
10. P. FISHBURN, *Methods of Estimating Additive Utilities*, Management Science, vol. 13, n° 7, 1967, p. 435-453.
11. P. FISHBURN, *Multiattribute Utilities in Expected Utility Theory*, dans Conflicting Objectives in Decisions, D. E. BELL, R. L. KEENEY et H. RAIFFA, éd., I.I.A.S.A., John Wiley and Sons, 1977.
12. W. M. GORMAN, *The Structure of Utility Functions*, Review of Economic Studies, vol. 35, 1968, p. 367-390.
13. D. S. P. HOPKINS, J. C. LARRECHE et W. F. MASSY, *Constrained Optimization of a University Administrator's Preference Function*, Management Science, vol. 24, n° 4, 1977, p. 365-377.
14. E. JACQUET-LAGREZE, *Explicative Models in Multicriteria Preference Analysis*, Second European Congress on Operations Research, Stockholm, 29 novembre-1^{er} décembre, 1976, p. 213-218.
15. E. JACQUET-LAGREZE, *De la logique d'agrégation de critères à une logique d'agrégation-désagrégation de préférences et de jugements*, Cahier de l'I.S.M.E.A., Série Sciences de Gestion, t. XIII, n° 456, 1979, p. 839-859.
16. E. JACQUET-LAGREZE et J. SISKOS, *Une méthode de construction de fonctions d'utilité additives explicatives d'une préférence globale*, Cahier LAMSADE n° 16, 1978, Université Paris-IX - Dauphine, Communication présentée aux Journées de l'A.S.U., Nice, 22-24 mai 1978.
17. R. L. KEENEY et H. RAIFFA, *Additive Value Functions*, dans Théorie de la décision et applications, Actes du colloque C.E.S.M.A.P., C.N.I.P.E. édition, 1973, p. 65-79.
18. R. L. KEENEY et H. RAIFFA, *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley and Sons, 1976.
19. V. KLEE, *On the Number of Vertices of a Convex Polytope*, Can. J. Math., vol. 16, 1964, p. 701-720.
20. R. D. LUCE et J. W. TUKEY, *Simultaneous Conjoint Measurement: a New-Type of Fundamental measurement*, J. Math. Psychology, vol. 1, 1964, p. 1-27.

21. M. MANAS et J. NEDOMA, *Finding all Vertices of a Convex Polyhedron*, Num. Math., vol. 12, 1968, p. 226-229.
22. J. C. MARCHET et J. SISKOS, *Aide à la décision en matière d'environnement. Application aux choix de tracé autoroutier*, Systemi Urbani, 2, 1979, p. 65-95.
23. J. MOSCAROLA et B. ROY, *Procédure automatique d'examen de dossiers fondée sur une segmentation trichotomique en présence de critères multiples*, R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle, vol. 11, n° 2, 1977, p. 145-173.
24. K. R. OPPENHEIMER, *A Proxy Approach to Multiattribute Decision Making*, Management Science, vol. 24, n° 6, 1978, p. 675-689.
25. D. PEKELMAN et S. SEN, *Mathematical Programming Models for the Determination of Attribute Weights*, Management Science, vol. 20, n° 8, 1974, p. 1217-1229.
26. R. A. POLLAK, *Additive von Neumann-Morgenstern Utility Functions*, Econometrica, vol. 35, n° 3-4, 1967, p. 485-494.
27. B. ROY, *Vers une méthodologie générale d'aide à la décision*, Rev. M.E.T.R.A., vol. XIV, n° 3, 1975, p. 459-497.
28. B. ROY, *ELECTRE III : Un algorithme de classements fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples*, S.E.M.A., Rapport de Recherche n° 81, juin 1977, Communication présentée à la 8^e Conférence internationale de l'I.F.O.R.S., Toronto, 19-23 juin 1978.
29. B. ROY, *L'aide à la décision. Critères multiples et optimisation pour choisir, trier, ranger*, Livre en préparation, 1978.
30. G. SAPORTA, *Une méthode et un programme d'analyse discriminante pas à pas sur variables qualitatives*, Colloques I.R.I.A. : Analyse des Données et Informatique, vol. 1, 1977, p. 201-210.
31. J. SISKOS, *La modélisation des préférences au moyen de fonctions d'utilité additives*, Thèse de 3^e cycle, Institut de Programmation, Université Pierre-et-Marie-Curie, juin 1979.
32. V. SRINIVASAN et A. D. SHOCKER, *Linear Programming Techniques for Multidimensional Analysis of preferences*, Psychometrika, vol. 38, n° 3, 1973, p. 337-369.
33. V. SRINIVASAN et A. D. SHOCKER, *Estimating the Weights for Multiple Attributes in a Composite Criterion using Pairwise Judgments*, Psychometrika, vol. 38, n° 4, 1973, p. 473-493.
34. P. TOLLA, *Contrôle et amélioration de la précision numérique des codes de programmation linéaire continue*, R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle, vol. 11, n° 1, 1977, p. 109-121.
35. C. VAN DE PANNE, *Methods for Linear and Quadratic Programming*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975, p. 202-231.
36. H. M. WAGNER, *Linear Programming Techniques for Regression Analysis*, J. Amer. Stat. Association, vol. 54, 1959, p. 206-212.
37. F. W. YOUNG, J. DE LEEUW et Y. TAKANE, *Regression with Qualitative and Quantitative Variables: an Alternating least Squares Method with Optimal Scaling Features*, Psychometrika, vol. 41, n° 4, 1976, p. 505-529.