RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

Y. BARAN-MARSZAK

D. ENCAOUA

# Calcul numérique d'un équilibre général avec distorsion fiscale. II

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 13, nº 4 (1979), p. 335-350

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_4_335_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 4, novembre 1979, p. 335 à 350)

# CALCUL NUMÉRIQUE D'UN ÉQUILIBRE GÉNÉRAL AVEC DISTORSION FISCALE. II (*)

par Y. BARAN-MARSZAK et D. ENCAOUA [1] [2]

La longueur de cet article a nécessité que sa publication soit découpée en deux parties présentées dans deux numéros successifs de cette revue.

La première partie présente un modèle d'équilibre général avec fiscalité. Après avoir démontré l'existence de l'équilibre par application d'un théorème de point fixe, cette partie présente des algorithmes de calcul numérique de points fixes d'applications continues définies dans un convexe compact de $R^n$ à valeurs dans lui-même.

La deuxième partie présente une adaptation de ces algorithmes au calcul de l'équilibre du modèle considéré et donne les résultats obtenus pour diverses variantes numériques du modèle.

Résumé. — *Le but de cet article est de présenter un modèle économique d'allocation de ressources avec fiscalité et d'en déterminer numériquement l'équilibre par application d'algorithmes de calcul introduits par les travaux de H. Scarf. Le modèle économique retenu concerne un système composé de deux pays ou régions dans lesquels les activités de production et de commerce se réalisent en présence de distorsions fiscales représentées par des impôts directs, indirects, droits de douane et transferts sociaux.*

*La fiscalité introduit un enrichissement du modèle théorique de l'équilibre concurrentiel et permet en outre d'étudier l'influence de plusieurs systèmes de taxation sur les résultats de l'équilibre.*

*La première partie présente le modèle d'équilibre général avec fiscalité dont une spécification numérique sera envisagée à la deuxième partie. Après avoir démontré l'existence de l'équilibre par application d'un théorème de point fixe, on présente dans cette partie une description des algorithmes de calcul numérique de points fixes d'applications continues.*

*La deuxième partie présente une adaptation de ces algorithmes au calcul de l'équilibre du modèle considéré et donne les résultats numériques obtenus pour diverses spécifications numériques.*

*La longueur de l'article a nécessité sa publication dans deux numéros successifs de la revue. Le découpage qui en résulte correspond aux deux parties mentionnées.*

Abstract. — *An economic model of ressource allocation with fiscality is presented here and its equilibrium is computed by using numerical algorithms first introduced by H. Scarf.*

*The economic model relates to two countries in which trade and production are affected by fiscal distorsions as direct and indirect taxes, tariffs and social transfers. Different values of taxes are considered and their impact upon the economic equilibrium is measured.*

*As the existence of economic equilibrium depends of a fixed point theorem, the paper contains a description of different algorithms used for computation of continuous mappings fixed points and for related problems.*

*The length of this paper induced its publication in two separate issues of this review.*

(*) Reçu juillet 1976.

(1) Les auteurs remercient M. Michael Jerison, Department of Economics, Suny at Albany, New York, des remarques et suggestions adressées à la version révisée de cet article. Ils restent néanmoins seuls responsables des éventuelles erreurs qui subsistent.

(2) Centre de Mathématiques économiques, Université de Paris-I.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0842/1979/335/$ 4.00

## III. CALCUL D'UN ÉQUILIBRE APPROCHÉ DU SYSTÈME ÉCONOMIQUE CONSIDÉRÉ

Pour calculer un équilibre approché du modèle économique décrit au paragraphe I, nous avons procédé de deux façons alternatives :

– approximation d'un point fixe de l'application $F$ (un point fixe de $F$ correspond à l'équilibre recherché);

– approximation directe de l'équilibre.

L'application $F$ dont le point fixe correspond à l'équilibre a été présentée au paragraphe I. Nous décrivons ci-dessous la seconde approche.

Dans le cas d'un modèle sans fiscalité, des labels des points d'une grille $G$ du simplexe des prix $A_L$ peuvent être obtenus à l'aide de la valeur de l'excès de demande $p.Z(p)$. Deux règles de label ont été utilisées :

*Première règle :* $l_1 : p \in G \to l_1(p) = k \in \{1, \ldots, L\}$ où $k$ est le plus petit indice tel que :

$$\begin{cases} p_k \neq 0, \\ p_k Z_k(p) \leqq 0. \end{cases}$$

*Deuxième règle :* $l_2 : p \in G \to l_2(p) = k \in \{1, \ldots, L\}$ où $k$ est le plus petit indice tel que :

$$\begin{cases} p_k \neq 0, \\ p_k Z_k(p) \leqq p_i Z_i(p), \qquad \forall i \in \{1, \ldots, L\}. \end{cases}$$

Si la fonction d'excès de demande $Z(p)$ est continue sur $A_L$, on peut démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un pas de grille $\delta(\varepsilon)$ tel que tout point $p$ d'un simplexe complètement labellé pour l'une des deux règles $l_1$ ou $l_2$ est tel que $Z_l(p) < \varepsilon$, $\forall l \in L$.

Indiquons à présent comment la méthode précédente peut être adaptée au cas d'un modèle avec fiscalité.

Considérons une grille régulière $G$ de pas $1/D$ dans $A_{L+2}$.

Soit $\Sigma$ la partition simpliciale associée. Définissons la règle de label $l_1$ sur $G$ :

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_{L+2}) \in G \to l_1(u) \in \{1, \ldots, L+2\}.$$

Les cas suivants sont distingués:

- $u_1 + u_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad l_1(u) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad u_1 \geqq u_2, \\ 2 & \text{si} \quad u_1 < u_2, \end{cases}$
- $u_1 + u_2 < 1$. Dans ce cas,

définissons les variables $v_i(u)$, $i=1, \ldots, L+2$ de la façon suivante :

Soit $T$ une constante positive choisie à l'avance. Définissons les variables

$$R_1 = u_1 T,$$

$$R_2 = u_2 T,$$

$$p_i = \frac{u_{i+2}}{1-u_1-u_2}, \qquad i=1, \ldots, L.$$

Formons alors les quantités

$$\begin{aligned} &v_1(u) = I_1(p, R_1) - R_1 \\ &v_2(u) = I_2(p, R_2) - R_2 \\ &\vdots \\ &v_{i+2}(u) = p_i Z_i(p, R_1, R_2), \qquad i=1, \ldots, L. \end{aligned}$$

La règle de label $l_1$ est donnée par :

$$u \in G \to l_1(u) = k \in \{1, \ldots, L+2\} \qquad \text{tel que :}$$

$u_k \neq 0$ et $k$ est le plus petit indice tel que $v_k(u) \leqq 0$.

Montrons à présent que si nous choisissons convenablement la constante $T$, un simplexe complètement labellé de $A_{L+2}$ n'intersecte pas le sous-ensemble $\{u \in A_{L+2} / u_1 + u_2 = 1\}$ de $A_{L+2}$.

Soit $\sigma(u^{j_1}, \ldots, u^{j_{L+2}})$ un simplexe complètement labellé de dimension $L+1$ de $\Sigma$.

Supposons qu'un sommet de ce simplexe $u^{j_0} = U^{j_0}/D$ appartienne à l'ensemble $\{u \in A_{L+2} / u_1 + u_2 = 1\}$. Le vecteur $U^{j_0}$ s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} D-B \\ B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

où $B \in \mathcal{N}$ et $D \in \mathcal{N}$.

La caractérisation des simplexes de $\Sigma$ donnée au paragraphe II.1 entraîne que $\beta(i^0)\in\{2, 3\}$ et $\beta(i^0+1)\in\{1, 2\}$ et donc, les trois vecteurs $U^{j_{i^0}-1}$, $U^{j_{i^0}}$, $U^{j_{i^0}+1}$ sont tels que la somme de leurs deux premières composantes est supérieure ou égale à $D-1$.

Or :

– si un vecteur $u=U/D\in\{u\in A_{L+2}/u_1+u_2=1\}$ alors $l_1(u)\in\{1, 2\}$ par construction de la règle $l_1$;

– si un vecteur $u=U/D\in\{u\in A_{L+2}/u_1+u_2=(D-1)/D\}$ alors d'après les notations précédentes

$$R_1=u_1 T,$$

$$R_2=u_2 T,$$

$$p_i=\frac{u_{i+2}}{1-((D-1)/D)}=Du_{i+2}, \qquad i=1, \ldots, L$$

$$v_1(u)=I_1(p, R_1)-R_1=I_1(p, R_1)-u_1 T,$$

$$v_2(u)=I_2(p, R_2)-R_2=I_2(p, R_2)-u_2 T,$$

donc

$$v_1(u)+v_2(u)=I_1(p, R_1)+I_2(p, R_2)-((D-1)/D)\,T.$$

Nous avons montré au paragraphe I que :

$$I_1(p, R_1)+I_2(p, R_2)\leqq K+s(R_1+R_2), \qquad \forall p\in A_L.$$

On a donc

$$v_1(u)+v_2(u)\leqq K+s(R_1+R_2)-\frac{D-1}{D}T=K-(1-s)\left(\frac{D-1}{D}\right)T.$$

Si on choisit $T\geqq K\,D/(1-s)(D-1)$ on a $v_1(u)+v_2(u)\leqq 0$, donc l'une au moins des deux quantités $v_1(u)$ et $v_2(u)$ est négative ou nulle, ainsi $l_1(u)\in\{1, 2\}$ par construction de la règle de label $l_1$. Ce résultat montre que les trois vecteurs $u^{j_0-1}, u^{j_0}, u^{j_0+1}$ ont des labels dans $\{1, 2\}$ ce qui est impossible puisque le simplexe est complètement labellé.

## IV. L'APPLICATION NUMÉRIQUE

### IV.1. Les données numériques

1. Liste des biens

2 biens finaux notés $F_1$, $F_2$.

2 biens intermédiaires notés $I_1$, $I_2$.

3 facteurs primaires notés $f_1$, $f_2$, $f'_2$.

Le pays 1 produit les biens $F_1$, $I_1$ et dispose du facteur $f_1$.

Le pays 2 produit les biens $F_2$, $I_2$ et dispose des facteurs $f_2$ et $f'_2$.

2. Fonctions de production et capacités de production

Supposons définies les unités physiques des facteurs primaires $f_1$, $f_2$, $f'_2$. Les fonctions de production suivantes, associées à leurs capacités de production, permettent alors de définir de proche en proche les unités physiques des autres biens

$$I_2 = 500(f'_2)^{0,8} \quad \text{et} \quad I_2 \leqq 10^9,$$

$$I_1 = 500(I_2)^{0,35}(f_1)^{0,35} \quad \text{et} \quad I_1 \leqq 10^9,$$

$$F_1 = 500(I_1)^{0,4}(f_1)^{0,35} \quad \text{et} \quad F_1 \leqq 10^9,$$

$$F_2 = 500(I_1)^{0,2}(I_2)^{0,25}(f_2)^{0,2}(f'_2)^{0,15} \quad \text{et} \quad F_2 \leqq \alpha\, 10^9.$$

Les résultats numériques seront donnés pour deux valeurs du paramètre $\alpha$ :

cas $\alpha = 1$, ce cas sera désigné : capacité de production faible;

cas $\alpha = 2$, ce cas sera désigné : capacité de production forte.

3. Les consommateurs

Dans chaque pays, nous avons considéré quatre catégories socio-professionnelles notées respectivement $A$, $B$, $C$, $D$ et $a$, $b$, $c$, $d$. Les C.S.P. diffèrent :

- par leur effectif;
- leurs ressources initiales en facteurs primaires;
- leurs préférences sur les biens finaux;
- leurs parts de profit en cas d'économie de propriété privée;
- leurs coefficients de transfert.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des consommateurs. Les préférences des agents d'une même C.S.P. sont identiques et représentées par des fonctions d'utilité du type $U(F_1, F_2) = F_1^{u_1} \times F_2^{u_2}$ où les élasticités $u_1$ et $u_2$ dépendent de la C.S.P.

La dernière colonne du tableau I indique la règle de transfert suivante :

Dans chacun des deux pays les agents $D$ et $d$ sont ceux qui ne possèdent aucune ressource initiale en facteurs primaires (ils correspondent aux « inactifs »). La politique de transferts indique alors que dans chaque pays, chaque agent des C.S.P. $D$ ou $d$ reçoit de la part de l'État $\beta$-fois ce que reçoit chaque agent des autres C.S.P. Cette règle permet de déduire les coefficients de transfert $a^{mi}$. Les résultats numériques seront donnés pour deux valeurs numériques de $\beta$ : $\beta=2$ et $\beta=4$.

TABLEAU I

| Effectif global | C.S.P. | Effectif des C.S.P. | Ressources initiales d'un agent de chaque C.S.P. | | | Élasticités des utilités par agent | | Politique de transferts |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $f_1$ | $f_2$ | $f'_2$ | $u_1$ | $u_2$ | |
| Pays 1 : $18.10^6$. | $A$ | $2.10^6$ | 8 | 0 | 0 | 0,6 | 0,4 | 1 |
| | $B$ | $14.10^6$ | 8 | 0 | 0 | 0,35 | 0,65 | 1 |
| | $C$ | $1.10^6$ | 8 | 0 | 0 | 0,7 | 0,3 | 1 |
| | $D$ | $1.10^6$ | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0,9 | $\beta$ |
| Pays 2 : $52.10^6$. | $a$ | $2.10^6$ | 0 | 8 | 0 | 0,7 | 0,3 | 1 |
| | $b$ | $17.10^6$ | 0 | 0 | 8 | 0,3 | 0,7 | 1 |
| | $c$ | $7.10^6$ | 0 | 0 | 8 | 0,5 | 0,5 | 1 |
| | $d$ | $26.10^6$ | 0 | 0 | 0 | 0,1 | 0,9 | $\beta$ |

## 4. Distribution des profits

En cas d'appropriation privée des profits des branches (économie de propriété privée), les profits seront distribués selon les coefficients donnés par le tableau II.

TABLEAU II

| | C.S.P. $A$ | C.S.P. $C$ | C.S.P. $a$ | C.S.P. $c$ |
|---|---|---|---|---|
| Branche $F_1$. . . . . . | 0,8 | 0,2 | 0 | 0 |
| Branche $F_2$. . . . . . | 0 | 0 | 0 | 1 |
| Branche $I_1$. . . . . . . | 0,7 | 0,3 | 0 | 0 |
| Branche $I_2$. . . . . . . | 0 | 0 | 0,3 | 0,7 |

## 5. Fiscalité directe

### 5.1. *Fiscalité directe des consommateurs*

Dans chaque pays les consommateurs sont imposés sur leur revenu issu des ressources initiales au taux uniforme de 20 %.

5.2. *Fiscalité directe des producteurs*

En cas de propriété privée, les profits nets (profits bruts-impôts indirects) sont imposés au taux de 40 % dans chaque pays. Les économies de propriété publique correspondent alors dans ce modèle à une imposition des profits nets au taux de 100 %.

## 6. Fiscalité indirecte

6.1. *Fiscalité indirecte du premier type.*

6.1.*a. Cas des consommateurs*

La taxe *ad valorem* sur les biens finaux locaux est de 20 %.

La taxe *ad valorem* sur les biens finaux importés est de 30 %.

La différence du montant des taxes correspondrait à un « droit de douane ».

On étudiera une variante dans laquelle les barrières douanières sont abolies (intégration des deux pays); le taux est alors ramené uniformément à 20 %.

6.1.*b. Cas des producteurs*

La taxe sur les biens intermédiaires importés est de 30 %.

La taxe sur les biens intermédiaires locaux est de 20 %.

La remarque précédente sur l'intégration des deux pays s'appliquera aussi aux producteurs.

6.1.*c. Charges sociales*

Les charges sociales sont à la charge des producteurs et portent sur la valeur des facteurs primaires utilisés. Leur taux est de 20 %.

6.2. *Fiscalité indirecte du second type : T.V.A.*

On a pris un taux uniforme de 20 % pour la T.V.A. sur tous les biens finaux et intermédiaires.

Les charges sociales – non déductibles – sont au taux de 40 %.

Avant de donner les résultats numériques de l'équilibre, explicitons les différentes variantes étudiées.

Pour chaque variante, nous avons calculé, entre autres résultats numériques, les valeurs suivantes :

– les prix d'équilibre approché hors taxes et taxes comprises (en distinguant prix à la consommation et prix à la production);

– les excès de demande pour chacun des biens;

– le déficit ou excédent budgétaire de chaque pays.

TABLEAU III

| | Capacité de production en $F_2$ $\alpha=1$ faible $\alpha=2$ forte | Propriété des profits (privée ou publique) | Intégration des deux pays (notée I) ou barrières douanières (notées B.D.) | Fiscalité indirecte (contribution indirecte T.V.A. sans charges soc., T.V.A. avec charges soc.) | Politique des transferts $\beta=2$ $\beta=4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variante I. ....... | $\alpha=1$ | privée | B.D. | C.I. | $\beta=4$ |
| Variante II........ | $\alpha=1$ | publique | B.D. | C.I. | $\beta=4$ |
| Variante III. ...... | $\alpha=1$ | publique | I. | C.I. | $\beta=4$ |
| Variante IV. ...... | $\alpha=2$ | publique | I. | C.I. | $\beta=4$ |
| Variante V........ | $\alpha=2$ | publique | I. | C.I. | $\beta=2$ |
| Variante VI. ...... | $\alpha=2$ | privée | B.D. | C.I. | $\beta=2$ |
| Variante VII....... | $\alpha=2$ | privée | B.D. | T.V.A. sans charges soc. | $\beta=2$ |
| Variante VIII...... | $\alpha=2$ | privée | B.D. | T.V.A. avec charges soc. | $\beta=2$ |
| Variante IX. ...... | $\alpha=2$ | publique | B.D. | T.V.A. avec charges soc. | $\beta=2$ |

*Dans toutes les variantes utilisées, l'approximation obtenue pour les prix d'équilibre a conduit à des écarts relatifs sur les excès de demande et sur les budgets des deux pays qui ne dépassent jamais* $10^{-4}$.

Le pas de grille finale ayant permis d'obtenir l'équilibre approché est de $1/2^{28}$. Le nombre d'itérations a varié de 18 000 à 30 000. Nous donnerons plus loin quelques indications concernant les performances obtenues selon différentes variantes algorithmiques. Le programme a été écrit en Fortran et a été exécuté sur le P 880 du Centre de Calcul de l'Université de Paris-I.

## IV.2. Les résultats de l'application numérique

Nous présentons une partie des résultats numériques obtenus dans les tableaux IV à IX donnant :

- le système des prix réalisant l'équilibre approché;
- les utilités des agents;
- les productions brutes;

– les recettes fiscales;
– la ventilation des revenus des agents.

Ces résultats seront brièvement commentés au paragraphe suivant.

## IV.3. Commentaires sur les résultats

Nous commenterons brièvement l'ensemble des résultats en comparant les variantes prises deux à deux.

*Variante I-Variante II : Effet de l'appropriation publique des profits.*

Les recettes fiscales ont augmenté dans les deux pays, mais beaucoup plus dans le pays 2 (passage de 3 896 à 16 264 millions d'unités de numéraire $f'_2$ non taxé) que dans le pays 1 (augmentation de 2 024 à 2 720).

Tous les biens (sauf un, le bien $F_2$) ont le même prix relatif. Le prix relatif de $F_2$ a plus que doublé.

TABLEAU IV

*Prix charges comprises en numéraire $f'_2$ non taxé*

| | | VARIANTES | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
| Prix à la consommation dans le pays 1 | $F_1$ | 5.78 | 5.28 | 5.32 | 0.65 | 0.73 | 0.93 | 0.87 | 1.16 | 0.91 |
| | $F_2$ | 7.74 | 17.40 | 15.5 | 0.49 | 0.50 | 0.57 | 0.46 | 0.64 | 0.61 |
| | $I_1$ | 5.08 | 5.08 | 5.09 | 0.99 | 1.06 | 1.25 | 1.27 | 1.72 | 1.46 |
| | $I_2$ | 0.60 | 0.60 | 0.58 | 0.24 | 0.25 | 0.28 | 0.30 | 0.41 | 0.39 |
| Prix à la consommation dans le pays 2 | $F_1$ | 5.72 | 5.72 | 5.32 | 0.65 | 0.73 | 1.01 | 0.87 | 1.16 | 0.91 |
| | $F_2$ | 7.14 | 16.0 | 15.5 | 0.49 | 0.50 | 0.52 | 0.46 | 0.64 | 0.61 |
| | $I_1$ | 5.51 | 5.51 | 5.09 | 0.99 | 1.06 | 1.36 | 1.27 | 1.71 | 1.46 |
| | $I_2$ | 0.51 | 0.51 | 0.58 | 0.24 | 0.25 | 0.25 | 0.30 | 0.41 | 0.32 |
| Prix à la production dans le pays 1 | $F_1$ | 4.40 | 4.40 | 4.43 | 0.54 | 0.61 | 0.77 | 0.73 | 0.97 | 0.76 |
| | $I_1$ | 4.24 | 4.24 | 4.24 | 0.82 | 0.88 | 1.05 | 1.06 | 1.43 | 1.21 |
| | $f_1$ | 11.1 | 11.1 | 11.2 | 1.14 | 1.28 | 1.68 | 1.66 | 2.19 | 1.69 |
| Prix à la production dans le pays 2 | $F_2$ | 5.95 | 13.4 | 12.9 | 0.41 | 0.41 | 0.44 | 0.38 | 0.53 | 0.51 |
| | $I_2$ | 0.46 | 0.46 | 0.49 | 0.20 | 0.21 | 0.21 | 0.25 | 0.34 | 0.32 |
| | $f_2$ | 6.57 | 6.57 | 6.58 | 6.57 | 6.57 | 6.57 | 5.47 | 7.66 | 7.66 |
| | $f'_2$ | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1.20 | 1. | 1.40 | 1.40 |
| Numéraire H.T. | $f'_2$ | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |

TABLEAU V

*Prix hors taxes en numéraire $f'_2$ non taxé*

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 4.40 | 4.40 | 4.43 | 0.54 | 0.61 | 0.77 | 0.87 | 1.16 | 0.91 |
| $F_2$ | 5.95 | 13.4 | 12.9 | 0.41 | 0.41 | 0.44 | 0.46 | 0.64 | 0.61 |
| $I_1$ | 4.24 | 4.24 | 4.24 | 0.82 | 0.88 | 1.05 | 1.27 | 1.72 | 1.46 |
| $I_2$ | 0.46 | 0.46 | 0.49 | 0.20 | 0.20 | 0.21 | 0.30 | 0.41 | 0.39 |
| $f_1$ | 9.26 | 9.26 | 9.32 | 0.95 | 1.07 | 1.40 | 1.66 | 1.57 | 1.20 |
| $f_2$ | 5.47 | 5.47 | 5.48 | 5.47 | 5.47 | 5.47 | 5.47 | 5.47 | 5.47 |
| $f'_2$ | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. | 1. |

TABLEAU VI

*Utilité d'un agent de chaque catégorie socio-professionnelle*

| | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pays 1 | A | 34.7 | 11.3 | 11.2 | 10. | 12.7 | 43.4 | 46.4 | 45.2 | 18.2 |
| | B | 12. | 8.6 | 8.8 | 11.1 | 14.4 | 19.5 | 20. | 19.1 | 20.7 |
| | C | 28.7 | 13.6 | 13.3 | 10.4 | 13. | 34.2 | 36. | 35.2 | 18.6 |
| | D | 37.4 | 24.3 | 24.8 | 30.8 | 24. | 39.3 | 33. | 39.7 | 45.6 |
| Pays 2 | a | 8.7 | 11.2 | 11.5 | 36.8 | 36.7 | 33.7 | 40.5 | 34.7 | 29.9 |
| | b | 3. | 6.1 | 6.1 | 12. | 14.7 | 10.1 | 10. | 9.3 | 12.5 |
| | c | 40.7 | 6.8 | 6.9 | 10.4 | 12.6 | 21.5 | 23.9 | 23.6 | 10.6 |
| | d | 12.4 | 2.5 | 24.8 | 30.8 | 24. | 14.3 | 11.7 | 14.2 | 21.3 |

TABLEAU VII

*Productions brutes en $12^6$ unités physiques*

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 718.2 | 718.2 | 719.1 | 450.4 | 473.6 | 525.5 | 539.9 | 530. | 481.7 |
| $F_2$ | 1000. | 1000. | 1000. | 1727. | 1695. | 1605. | 1589. | 1607. | 1657. |
| $I_1$ | 274. | 274. | 277.2 | 241.1 | 240.8 | 233.5 | 262.6 | 262. | 260.6 |
| $I_2$ | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. | 1000. |

Les utilités des agents du pays 1 ont baissé (le pays 1 a une proportion d'inactifs de 1/18). Les utilités des agents du pays 2 ont augmenté, sauf celle de l'agent $c$ qui détient la majorité des profits (le pays 2 a $26/52 = 50\ \%$ d'inactifs).

TABLEAU VIII

*Montant des recettes fiscales en $10^6$ fois le numéraire $f'_2$ non taxé*

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pays 1 | 2024 | 2720 | 18040 | 808 | 844 | 308 | 215.2 | 352 | 378.4 |
| Pays 2 | 3896 | 16264 | | | | 430.4 | 308.8 | 518.4 | 720.8 |
| % fiscalité indirecte Pays 1 | 65 | 57 | 21 | 43.5 | 43.5 | 64 | 46.5 | 62 | 44 |
| % fiscalité indirecte Pays 2 | 39.6 | 19 | | | | 62.5 | 45.5 | 59.5 | 41.5 |
| % impôts sur les bénéfices Pays 1 | 22.5 | 42 | 77 | 46.5 | 46.5 | 23.5 | 32.5 | 26 | 47 |
| % impôts sur les bénéfices Pays 2 | 59. | 81 | | | | 24.5 | 36.5 | 30 | 50.5 |
| % impôts sur le revenu Pays 1 | 12.5 | 1 | 2 | 10 | 10 | 12.5 | 21. | 12 | 9 |
| % impôts sur le revenu Pays 2 | 1.4 | 0 | | | | 13 | 18. | 10.5 | 8 |

Le même phénomène s'observe au niveau des revenus nets. Même si l'agent $D$ du pays 1 a un revenu net qui a augmenté dans le passage $I \rightarrow II$, son utilité a baissé : l'effet prix (augmentation du prix relatif de $F_2$) l'a emporté sur l'effet revenu.

*Variante II-Variante III : Effet de l'abolition des barrières douanières.*

L'intégration des deux pays (abolition des B.D. et redistribution des recettes fiscales globales selon la même règle de transferts) a eu peu d'influence sur les résultats de l'équilibre (utilités, revenus nets, production brute).

*Variante III-Variante IV : Effet de l'augmentation de capacité de production de $F_2$.*

La structure des prix d'équilibre a complètement changé. Les prix les plus élevés sont à présent ceux des facteurs primaires $f_1$, $f_2$, $f'_2$.

Les recettes fiscales ont chuté, ce qui explique que les revenus nets de tous les agents ont baissé.

Le doublement de la capacité de production de $F_2$ a eu pour effet d'augmenter les utilités des consommateurs du pays 2. Mais la modification des prix relatifs à la consommation (passage de 15,5/5,3 à 0,49/0,65 pour $p F_2/p F_1$) a bénéficié aux habitants du pays 1 qui préféraient le bien $F_2$ (plus forte élasticité de l'utilité pour le bien $F_2$ que pour le bien $F_1$).

Il y a eu de plus effet cumulatif pour les habitants du pays 1 qui préfèrent le bien $F_1$ : leur pouvoir d'achat en bien $F_1$ [mesuré par le rapport (revenu

TABLEAU IX

*Ventilation du revenu d'un agent. L'unité est 8 fois le numéraire*

| | | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Revenus issus des parts de profit | A | 32.8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4.5 | 4.9 | 6.5 | 0 |
| | B | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | C | 19.7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3.2 | 3.2 | 4.3 | 0 |
| | D | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | a | 6.8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1.4 | 1.9 | 2.5 | 0 |
| | b | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | c | 60.5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.4 | 2.5 | 3.4 | 0 |
| | d | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Revenus issus des transferts | A | 12. | 16.2 | 14.9 | .67 | 1.1 | 2. | 1.4 | 2.3 | 2.5 |
| | B | 12. | 16.2 | 14.9 | .67 | 1.1 | 2. | 1.4 | 2.3 | 2.5 |
| | C | 12. | 16.2 | 14.9 | .67 | 1.1 | 2. | 1.4 | 2.3 | 2.5 |
| | D | 48. | 64.8 | 59.7 | 2.7 | 2.2 | 4. | 2.8 | 4.6 | 5 |
| | a | 3.7 | 15.6 | 14.9 | .67 | 1.1 | 0.7 | .5 | 0.8 | 1.2 |
| | b | 3.7 | 15.6 | 14.9 | .67 | 1.1 | 0.7 | .5 | 0.8 | 1.2 |
| | c | 3.7 | 15.6 | 14.9 | .67 | 1.1 | 0.7 | .5 | 0.8 | 1.2 |
| | d | 15. | 62.4 | 59.7 | 2.7 | 2.2 | 1.4 | 1. | 1.7 | 2.4 |
| Revenus nets | A | 52.3 | 23.6 | 22.5 | 1.43 | 1.95 | 8.1 | 7.7 | 10.1 | 3.5 |
| | B | 19.4 | 23.6 | 22.5 | 1.43 | 1.95 | 3.2 | 2.7 | 3.6 | 3.5 |
| | C | 39.1 | 23.6 | 22.5 | 1.43 | 1.95 | 6.3 | 6. | 7.8 | 3.5 |
| | D | 48. | 64.8 | 59.7 | 2.7 | 2.2 | 4. | 2.8 | 4.6 | 5 |
| | a | 12.3 | 20. | 19.3 | 5. | 5.50 | 6.4 | 6.7 | 7.7 | 5.5 |
| | b | 4.5 | 20. | 15.7 | 1.47 | 1.9 | 1.5 | 1.3 | 1.6 | 2. |
| | c | 65. | 20. | 15.7 | 1.47 | 1.9 | 3.9 | 3.8 | 5.1 | 2. |
| | d | 15. | 62.4 | 59.7 | 2.5 | 2.2 | 1.4 | 1. | 1.7 | 2.4 |

net/prix de $F_1$)] a baissé : passage de 22,5/5,3 à 1,43/0,65, et leur pouvoir d'achat en bien $F_2$ a augmenté : passage de 22,5/15,5 à 1,43/0,49.

Enfin il faut remarquer que le doublement de la capacité de production a modifié les productions brutes. La contrainte en $F_2$ n'est plus à présent saturée.

*Variante IV-Variante V : Effet de la modification de la politique de transferts.*

Chaque « inactif » ne reçoit plus que le double (au lieu de 4) de ce que reçoit chaque agent des autres C.S.P. Cette modification a « profité » (revenu net et utilités) à tous les agents sauf bien entendu aux inactifs.

*Variante V-Variante VI : Effet du rétablissement de la propriété privée et des barrières douanières.*

A nouveau les consommateurs du pays 1 ont des niveaux de satisfaction accrus et ceux du pays 2 des niveaux de satisfaction moindres (sauf les consommateurs de la catégorie $c$ qui détiennent la majeure partie des profits du pays 2).

Il est à noter que dans le passage *Variante I-Variante VI* deux paramètres ont changé : la politique de transferts et le doublement de la capacité de production. Les consommateurs de la C.S.P. $c$ dans le pays 2 ont un niveau de satisfaction plus grand dans la variante I que dans la variante VI.

*Variante VI-Variante VII : Effet du changement de type de fiscalité indirecte.*

On passe d'un système d'impôts du premier type à une T.V.A. sans charges sociales. Malgré le fait que le revenu net de presque tous les agents ait baissé, le niveau de satisfaction de tous les agents à l'exception des inactifs a légèrement augmenté.

Deux effets se sont combinés : un effet prix et un effet revenu :

– les prix des biens finaux taxés ont baissé du fait de la T.V.A.;

– les revenus nets ont baissé du fait du plus faible montant des recettes fiscales.

Mais l'effet prix l'a emporté sur l'effet revenu pour presque tous les agents.

*Variante VII-Variante VIII : Effet de l'introduction des charges sociales.*

L'introduction des charges sociales a augmenté les prix d'équilibre de tous les biens exprimés en numéraire $f'_2$. L'augmentation des recettes fiscales a « profité » aux inactifs (niveaux de satisfaction accrus). L'utilité de tous les autres agents a baissé.

Remarquons que dans le passage *Variante VI-Variante VIII*, tous les prix se sont accrus, mais les utilités ont faiblement varié. En fait la comparaison est un peu biaisée car le niveau des charges sociales n'est pas le même.

*Variante VIII-Variante IX : Effet de l'appropriation publique des profits.*

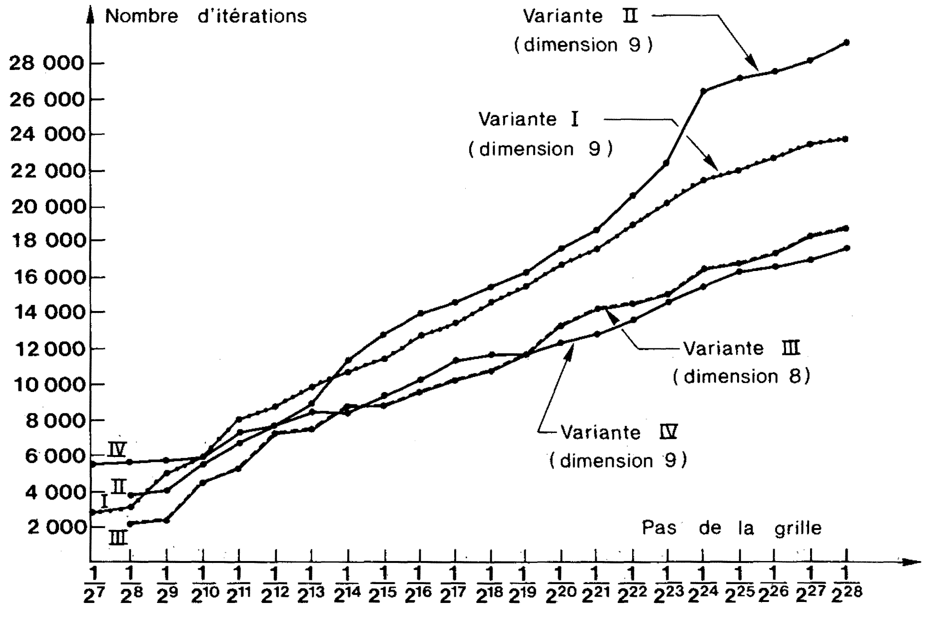
Le même phénomène s'observe dans les deux pays : les possesseurs des profits ont une utilité moindre, le résultat étant inversé pour les autres agents.

REMARQUE : Les résultats ci-dessous ont été obtenus à l'aide de l'algorithme de Kuhn et MacKinnon, la règle de label étant la règle $l_1$ décrite au paragraphe III. C'est ce choix algorithmique qui a conduit aux résultats les plus satisfaisants. Nous avons appliqué diverses variantes algorithmiques à ce type de modèle pour lesquelles des indications concernant les performances sont résumées dans le tableau ci-dessous.

| Méthode | Erreur relative maximale sur l'excès de demande | Nombre d'itérations et temps de calcul |
|---|---|---|
| Algorithme de Scarf. Approximation d'un point fixe de l'application $F$. Règle de label $l$ du paragraphe II 2, pas de grille 1/500 | 8 à 25 % suivant les modèles | 10 000 à 30 000 suivant les modèles (1,30 à 4 minutes de temps machine sur IBM 370/168) |
| Algorithme de MacKinnon. Approximation d'un point fixe de l'application $F$. Règle de label $l'$ du paragraphe II 2, pas de grille final 1/10 000 | 5 à 20 % suivant les modèles | 30 000 à 50 000 itérations |
| Algorithme de MacKinnon. Règle de label $l_2$ du paragraphe III portant sur la valeur de l'excès de demande, pas de grille final 1/10 000 | Toujours inférieur à 5 % | 30 000 à 50 000 |
| Algorithme de MacKinnon. Règle de label $l_1$ du paragraphe III portant sur la valeur de l'excès de demande, pas de grille final $4.10^{-9}$ | Toujours inférieur à $10^{-4}$ | 30 000 au plus. Temps de calcul au plus 2 heures sur le Philips P-880 de Paris-I (mini-ordinateur ne comportant pas d'opérateur flottant câblé). |

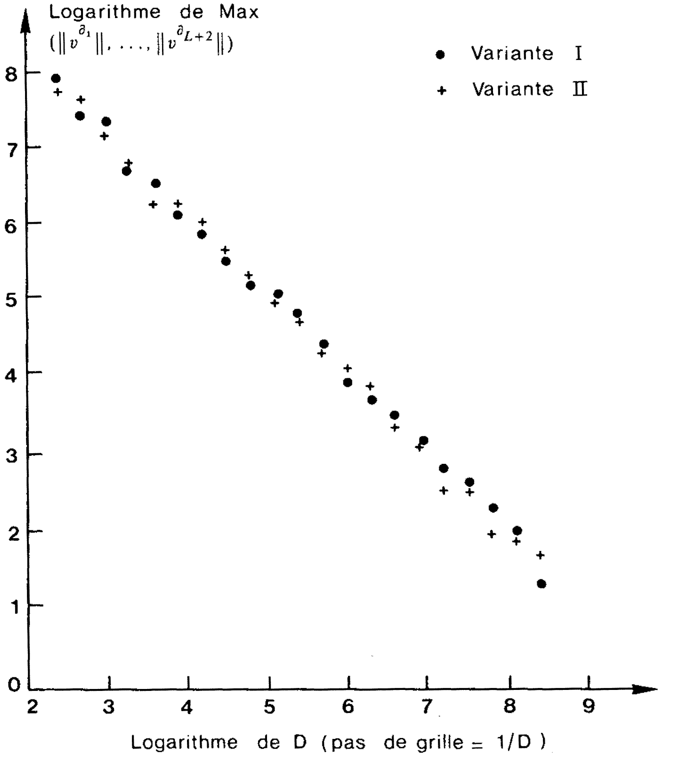
La figure 8 donne le nombre d'itérations en fonction du pas de grille pour quelques-unes des variantes numériques du modèle présenté.

**Figure 8**



La figure 9 donne, en fonction du pas de la grille, la plus grande norme du maximum de la valeur de l'excès de demande généralisé (quantité $v_i$ du paragraphe III) obtenue et des transferts correspondant aux sommets du simplexe complètement labellé.

**Figure 9**




## CONCLUSION

L'application numérique qui a été présentée, révèle de nombreuses possibilités d'utilisation de l'algorithme de détermination d'un équilibre approché pour étudier des problèmes de statique comparative. Bien entendu, la substitution progressive de données numériques observées à des données iréalistes, permettra d'enrichir considérablement le cadre d'application de ces méthodes de calcul. De plus, on peut envisager leur utilisation à des problèmes de fiscalité où celle-ci ne serait pas traitée comme étant entièrement exogène, mais devrait obéir à certains objectifs déterminés.

Outre l'approximation d'un point fixe d'une application ou d'une correspondance, le lemme de Scarf et les divers algorithmes qui s'en inspirent permettent de calculer, de nombreux concepts de solutions de la Théorie des Jeux :

— équilibre non coopératif de jeux bimatriciels;

— cœur d'un jeu coopératif à utilité non transférable [11].

Les présents auteurs ont également employé la même approche pour déterminer numériquement des vecteurs dans l'ensemble de négociation d'un jeu à utilité transférable [10].

## BIBLIOGRAPHIE


1. ARROW et HAHN, *General Comptitive Analysis*, Holden Day, San Francisco, 1971.
2. EAVES, *Homotopies for Computation of Fixed Points*, Math. Programming, vol. 3, n° 1, 1972.
3. KUHN et M. KINNON, *Sandwich Method for Finding Fixed Points*, J. opt. th. and appl., vol. 17, n$^{os}$ 3/4, 1975.
4. LEMKE et HOWSON, *Equilibrium Points of Bimatrix Games*, S.I.A.M. J. Appl. Math., vol. 12, n° 2, 1964.
5. SCARF, *The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping*, S.I.A.M. J. Appl. Math., vol. 15, n° 5, 1967.
6. SCARF et HANSEN, *Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven, 1973.
7. SHOVEN et WHALLEY, *A General Equilibrium Calculation of the Effects of Differentiel Taxation of Income from Capital in the U.S.*, J. Publ. Econ., n° 1, 1972.
8. SHOVEN et WHALLEY, *General Equilibrium with Taxes: A Computational Procedure and an Existence Proof*, Rev. Econ. Studies, vol. 40, 1973.
9. EAVES et SCARF, *The Solutions of Systems of Piecewise Linear Equations*, Math. Oper. Res., vol. 1, n° 1, 1976.
10. Y. BARAN-MARSZAK et D. ENCAOUA, *Détermination numérique de solutions d'un jeu dans l'ensemble de négociations* (*Cahiers du Séminaire d'Économétrie*, n° 20, octobre 1979).
11. Y. BARAN-MARSZAK et D. ENCAOUA, *Calcul numérique du cœur d'une économie productive*, Informatique et Sciences Humaines, n$^{os}$ 40-41, mars-juin 1979.