RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

D. VIAUD

Une formalisation du jeu de Mastermind

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 3 (1979), p. 307-321

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_3_307_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 3, août 1979, p. 307 à 321)

UNE FORMALISATION DU JEU DE MASTERMIND (*)

par D. VIAUD [1]

Résumé. — *On commence par donner une formalisation générale du jeu de Mastermind. Elle permet de définir puis de caractériser des stratégies optimales et le nombre de coups qu'elles nécessitent. On applique ensuite les résultats obtenus à deux cas particuliers dont l'un correspond précisément à celui du Mastermind. On montre alors comment dans ces cas on peut construire une stratégie optimale.*

Abstract. — *We first give a general formalisation of the game of Masterming. It enables us to define and characterize optimal strategies and the number of plays they require to end a game. We then apply these results to two particular cases, one of them being the usual game of Mastermind. In that case we show how to build an optimal strategy.*

1. DESCRIPTION DU JEU ET NOTATIONS

On dispose de deux ensembles finis : S (ensemble des solutions) et P (ensemble des points) ainsi que d'une application $\mathscr{P}$ de $S \times S$ dans P telle que :

(i) $$\mathscr{P}(s_1, s_2) = \mathscr{P}(s_2, s_1), \qquad \forall s_1, s_2 \in S;$$

(ii) $$\exists p_* \in P \quad \text{tel que} \quad [\mathscr{P}(s_1, s_2) = p_*] \Leftrightarrow [s_1 = s_2].$$

Le jeu consiste à découvrir un élément s_* de S choisi par l'adversaire. Pour cela on choisit au premier coup s_1 dans S. L'adversaire répond en donnant le point $p_1 = \mathscr{P}(s_1, s_*)$ obtenu. On choisit alors au deuxième coup s_2 dans S ce qui fournit le point $p_2 = \mathscr{P}(s_2, s_*)$, etc. On s'arrête lorsque l'on a trouvé s_*. Il est clair qu'à chaque coup, on utilise les points obtenus lors des coups précédents et la fonction $\mathscr{P}$ qui est entièrement connue.

Une stratégie est un procédé automatique de recherche de l'élément s_* inconnu. Au premier coup, elle spécifie l'élément s_1 à jouer. Au i-ième coup, elle spécifie l'élément s_i à jouer en fonction de ceux joués précédemment : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ et des points obtenus : $p_1, \ldots, p_{i-1}$. Le dernier coup consiste à annoncer s_*. Son ordre est le nombre maximum de coups nécessaire pour

(*) Reçu décembre 1977.
[1] Centre de Calcul de l'Université Louis-Pasteur, Strasbourg.

trouver s_*. Une stratégie est dite optimale si son ordre est minimal, c'est-à-dire si elle minimise le nombre maximum de coups nécessaire pour trouver s_*. L'ordre d'une stratégie optimale est donc un « minimax ».

Pour $s \in S$ et $p \in P$, on pose :

$$\mathscr{P}_s^{-1}(p) = \{ \sigma \in S \mid \mathscr{P}(\sigma, s) = p \}.$$

Pour s fixé et p variant, ces ensembles constituent un recouvrement disjoint de S. Ils permettent de localiser un élément s_* cherché de la façon suivante. Si après avoir choisi $s_1, \ldots, s_i$ dans S on a obtenu en réponse les points respectifs : $p_1, \ldots, p_i$, on sait alors que

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k).$$

On notera :

$$\min_s \quad \text{pour} \quad \min_{s \in S} \qquad \text{et} \qquad \max_p \quad \text{pour} \quad \max_{p \in P}.$$

2. CARACTÉRISATION DES STRATÉGIES OPTIMALES

2.1. Applications τ_k

Elles sont définies sur l'ensemble des parties E de S par :

$$\begin{cases} \tau_1(E) = |E|, \\ \tau_k(E) = \min\limits_s \max\limits_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] \qquad \text{pour} \quad k > 1. \end{cases}$$

Elles s'introduisent de la façon suivante :

On cherche s_* que l'on sait appartenir à un sous-ensemble E de S. On a donc : $\tau_1(E) = |E|$ possibilités et s_* est déjà connu si $\tau_1(E) = 1$. Si $\tau_1(E) > 1$, on cherche à déterminer s_* en choisissant s_1. Si la réponse est p_1, on sait alors que :

$$s_* \in E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1),$$

et l'on connaît s_* si et seulement si le cardinal de cet ensemble est égal à 1.

Pour tenter de connaître s_* aussitôt après avoir joué s_1, quelle que soit la réponse p_1 obtenue, il faut donc choisir s_1 de façon à minimiser le nombre :

$$\max_p |E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)| = \max_p \tau_1[E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)],$$

s_1 doit alors vérifier :

$$\max_p \tau_1(E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = \min_s \max_p \tau_1[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] = \tau_2(E),$$

et l'on connaît certainement s_* après avoir joué s_1 si $\tau_2(E)=1$. Une telle stratégie n'est rien d'autre qu'une stratégie « minimax » (*voir* [1]) appliquée à l'évolution du jeu en un coup.

En raisonnant de façon analogue mais sur deux coups, on est conduit à choisir s_1 de façon à minimiser le nombre :

$$\max_p \min_{s'} \max_{p'} \left| E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p) \cap \mathscr{P}_{s'}^{-1}(p') \right| = \max_p \tau_2 (E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)),$$

s_1 doit alors vérifier :

$$\max_p \tau_2 (E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = \min_s \max_p \tau_2 [E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] = \tau_3(E),$$

et l'on connaîtra certainement s_* après avoir joué s_1, puis s_2 convenablement choisi, si $\tau_3(E)=1$.

En poursuivant cette étude récurrente du jeu, on est conduit à définir la suite des applications $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k, \ldots$, et

$$\tau_k(E) = \min_{s_1} \max_{p_1} \ldots \min_{s_{k-1}} \max_{p_{k-1}} \left| E \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p_i) \right) \right| .$$

Il est donc clair que :

$$0 \leqq \tau_k(E) \leqq \tau_{k-1}(E), \qquad \forall k>1. \tag{1}$$

Cette propriété se précise de la façon suivante :

Proposition 1 : *Pour $E \subset S$ et $k \geqq 1$, on a*

$$\begin{cases} [\tau_k(E)=0] \Leftrightarrow [E=\emptyset], & (2) \\ [\tau_k(E)>1] \Rightarrow [\tau_{k+1}(E)<\tau_k(E)]. & (3) \end{cases}$$

Preuve : Le premier point se démontre par récurrence sur k. Il est évident si $k=1$. Si $k>1$, et si $[\tau_{k-1}(E)=0] \Leftrightarrow [E=\emptyset]$,

$$\begin{aligned} [\tau_k(E)=0] &\Leftrightarrow [\min_s \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)]=0] \\ &\Leftrightarrow [\exists s_0 \in S \text{ tel que, } \forall p \in P,\ \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)]=0] \\ &\Leftrightarrow [\exists s_0 \in S \text{ tel que, } \forall p \in P,\ E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)=\emptyset] \Leftrightarrow [E=\emptyset], \end{aligned}$$

puisque les $\mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)$ forment un recouvrement de E.

Le second point se démontre aussi par récurrence sur k. Pour $k=1$, soit $E \subset S$ avec $|E|>1$. Si $s_0 \in E$, on a :

$$E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p) \begin{cases} \subset E \setminus \{s_0\} & \text{si } p \neq p_*, \\ = \{s_0\} & \text{si } p=p_*. \end{cases}$$

Ainsi

$$|E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)| < |E|, \qquad \forall p \in P,$$

d'où :

$$\tau_2(E) \leqq \max_p |E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)| < |E| = \tau_1(E).$$

Supposons maintenant la propriété vérifiée à l'ordre k et démontrons là à l'ordre $k+1$, en raisonnant par l'absurde. Soit donc $E \subset S$ avec

$$\tau_k(E) > 1 \qquad \text{et} \qquad \tau_{k+1}(E) = \tau_k(E).$$

Soit $s_0 \in S$ tel que :

$$\tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

D'après (1) et la définition des τ_k :

$$\tau_{k+1}(E) \leqq \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] \leqq \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] = \tau_k(E).$$

On a donc, puisque $\tau_{k+1}(E) = \tau_k(E)$ par hypothèse,

$$\tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] = \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

Soit $p_0 \in P$ tel que :

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

Alors :

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] \geqq \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)],$$

d'où, compte tenu de (1),

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_k(E) > 1.$$

On arrive ainsi à une contradiction, puisque, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$[\tau_{k-1}(E') > 1] \quad \Rightarrow \quad [\tau_k(E') < \tau_{k-1}(E')].$$

2.2. Étude d'une stratégie quelconque

Soit une stratégie d'ordre q quelconque. Si elle conduit à jouer la suite de coups : $s_1, \ldots, s_i$ avec les réponses respectives : $p_1, \ldots, p_i$ différentes de p_*, on pose :

$$E_j = \bigcap_{k=1}^{j} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) \qquad \text{si} \quad 1 \leqq j \leqq i \qquad \text{et} \qquad E_0 = S.$$

PROPOSITION 2 : *On a :*

$$\begin{cases} \tau_{q-i}(E_i)=1, & 0\leqq i<q, \quad (4)\\ \max_p \tau_{q-i}(E_{i-1}\cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p))=1, & 1\leqq i<q. \quad (5)\end{cases}$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre de coups restant à jouer. Si s_i est dernier coup de la stratégie, on a :

$$E_{i-1}=\{s_i\}=\{s_*\}$$

et le résultat est évident.

Si s_i est un avant-dernier coup de la stratégie, $1\leqq i<q$ et p_i détermine de façon unique le coup suivant à jouer, c'est-à-dire s_*. On a donc :

$$\tau_1(E_i)=|E_i|=1 \tag{6}$$

quel que soit le point p_i obtenu en réponse à s_i. Par conséquent :

$$\max_p \tau_1(E_{i-1}\cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p))=1 \tag{7}$$

car l'ensemble sur lequel porte τ_1 est vide si le point p ne peut être obtenu en réponse à s_i.

Mais q étant l'ordre de la stratégie :

$$i+1\leqq q \qquad \text{et} \qquad 1\leqq q-i.$$

Puisque $E_i\neq\emptyset$, (1) et (2) impliquent avec (6) et (7) les relations (4) et (5) pour tout avant-dernier coup de la stratégie.

Si s_i n'est pas un avant-dernier coup de la stratégie, $1\leqq i\leqq q-2$ et p_i ne détermine pas toujours de façon unique le coup suivant à jouer. On a donc :

$$|E_i|>1 \tag{8}$$

pour au moins un point p_i obtenu en réponse à s_i. On peut alors, dans le calcul du premier membre de (5), se restreindre pour p à de tels p_i. Soit donc p_i tel que (8) soit vérifié. Au coup suivant, on jouera s_{i+1} qui n'est pas un dernier coup de la stratégie. Alors, d'après (2) et la définition des τ_k,

$$1\leqq \tau_{q-i}(E_i)=\min_s \max_p \tau_{q-(i+1)}[E_i\cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)]\leqq \max_p \tau_{q-(i+1)}[E_i\cap \mathscr{P}_{s_{i+1}}^{-1}(p)].$$

On obtient alors le résultat cherché en raisonnant par récurrence sur l'indice des coups en partant des avants derniers :

si

$$\max_p \tau_{q-(i+1)}(E_i \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p))=1,$$

on a

$$\tau_{q-i}(E_i)=1$$

pour tout p_i tel que $|E_i|>1$, ce qui implique les relations (4) et (5).

En ce qui concerne le premier coup, on obtient :

$$\max_p \tau_{q-1}[\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)]=1.$$

On en déduit que :

$$\tau_q(S)=\min_s \max_p \tau_{q-1}(\mathscr{P}_s^{-1}(p)) \leqq \max_p \tau_{q-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p))=1,$$

d'où, compte tenu de (2), puisque $S \neq \emptyset$:

$$\tau_q(S)=1.$$

Remarque : On obtient un résultat analogue lorsqu'on cherche $s_* \in E$ où E est un sous-ensemble connu de S. Dans ce cas, si une stratégie d'ordre q fait jouer la suite de coups : $s_1, \ldots, s_i$, les réponses correspondantes étant $p_1, \ldots, p_i$ différentes de p_*, on a si $i<q$:

$$\tau_{q-i}(E \cap E_i)=1,$$

$$\max_p \tau_{q-i}[E \cap E_{i-1} \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)]=1.$$

Pour $i=0$, on obtient :

$$\tau_q(E)=1.$$

2.3. Étude des stratégies optimales

On notera q_0 le plus petit indice q tel que :

$$\tau_q(S)=1$$

q_0 existe d'après la proposition 1.

PROPOSITION 3 : *Les stratégies optimales sont d'ordre* q_0 *et sont caractérisées de la façon suivante :*

Au i-ième coup, après avoir joué successivement les coups $s_1, \ldots, s_{i-1}$ *pour lesquels on a obtenu les réponses respectives* $p_1, \ldots, p_{i-1}$, *on joue si* $i < q_0$, s_i *tel que :*

$$\max_p \tau_{q_0 - i}\left[\bigcap_{k=1}^{i-1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)\right] = 1 \tag{9}$$

et si $i = q_0$, *l'unique élément de l'ensemble :*

$$\bigcap_{k=1}^{i=1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k).$$

Preuve : On garde la notation $E_j = \bigcap_{k=1}^{j} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k)$ utilisée pour démontrer la proposition 2. D'après cette proposition, pour une stratégie quelconque d'ordre q, on a :

$$\tau_q(S) = 1$$

d'où avec la définition de q_0 :

$$q \geqq q_0.$$

Il suffit donc, pour établir la proposition 3 de construire une stratégie d'ordre q_0. On utilise pour cela la méthode qui a permis d'établir la proposition 2, en montrant par récurrence que la stratégie correspondante existe, avec à chaque étape du jeu :

$$\tau_{q_0 - i}(E_i) = 1. \tag{10}$$

Pour le premier coup, on sait que :

$$\tau_{q_0}(S) = \min_s \max_p \tau_{q_0 - 1}(\mathscr{P}_s^{-1}(p)) = 1.$$

Il existe donc $s_1 \in S$ tel que :

$$\max_p \tau_{q_0 - 1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = 1.$$

On joue alors un tel s_1 au premier coup. Si p_1 est la réponse obtenue, on a :

$$\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \tau_{q_0 - 1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)) \leqq 1$$

d'où compte tenu de (2) :

$$\tau_{q_0-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1))=1$$

c'est-à-dire la relation (10) pour $i=1$.

Au i-ième coup, $(i<q_0)$ supposons que l'on ait joué la suite des coups : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ pour lesquels on a obtenu les réponses respectives : $p_1, \ldots, p_{i-1}$, et faisons l'hypothèse de récurrence selon laquelle la relation (10) est vérifiée aux étapes précédentes. Alors :

$$\tau_{q_0-(i-1)}(E_{i-1})=\min_s \max_p \tau_{q_0-i}[E_{i-1}\cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)]=1.$$

Il existe donc $s_i \in S$ tel que :

$$\max_p \tau_{q_0-i}[E_{i-1}\cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)]=1.$$

On joue alors un tel s_i au i-ième coup. Si p_i est la réponse obtenue, on a :

$$E_i \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \tau_{q_0-i}(E_i)\leqq 1$$

d'où, compte tenu de (2) :

$$\tau_{q_0-i}(E_i)=1$$

c'est-à-dire la relation (10) qui se trouve ainsi établie par récurrence pour tout $i<q_0$.

Au q_0-ième coup, on a donc :

$$\tau_{q_0-(q_0-1)}(E_{q_0-1})=|E_{q_0-1}|=1.$$

On choisit alors, pour s_{q_0}, l'unique élément de E_{q_0-1} qui n'est autre que l'élément s_* cherché.

La méthode indiquée permet ainsi de construire au moins une stratégie optimale. Réciproquement, en vertu de la proposition 2, toute stratégie optimale peut être construite par cette méthode.

REMARQUE 1 : Il peut arriver que, pour certaines suites de coups et de réponses $|E_{i-1}|=1$ pour $i<q_0$. Il serait alors maladroit de ne pas choisir pour s_i l'unique élément de E_{i-1} (bien que la stratégie reste optimale pour tout autre choix). La partie considérée peut alors se terminer au i-ième coup, avec $i<q_0$.

De même, il peut arriver qu'une réponse p_i soit le point p_* pour $i<q_0$, auquel cas la partie considérée se termine encore au i-ième coup puisque $s_i=s_*$.

REMARQUE 2 : On obtient un type particulier de stratégies optimales de la façon suivante.

Au i-ième coup, après avoir joué successivement les coups : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ pour lesquels on a obtenu les réponses respectives $p_1, \ldots, p_{i-1}$ différentes de p_*, on sait que :

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i-1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) = E_{i-1}.$$

On définit alors q_{i-1} comme le plus petit indice q tel que :

$$\tau_q(E_{i-1}) = 1.$$

D'après ce qui précède, $q_{i-1} \leqq q_0 - (i-1)$.

On joue alors au i-ième coup :

– si $q_{i-1} > 1$, un élément $s_i \in S$ tel que

$$\max_p \tau_{q_{i-1}-1}(E_{i-1} \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)) = 1;$$

– si $q_{i-1} = 1$, l'unique élément $s_i = s_*$ de l'ensemble E_{i-1}.

D'après la remarque finale du paragraphe 2.2, cette stratégie consiste à minimiser à chaque coup le nombre maximum de coups restant à jouer. Ainsi au i-ième coup, le nombre maximum de coups restant à jouer est q_{i-1}. On a donc :

$$q_i \leqq q_{i-1} - 1.$$

Une telle stratégie est évidemment optimale, et, parmi les stratégies optimales, c'est l'une de celles qui exploitent au mieux, à chaque coup, les informations acquises aux étapes antérieures de la partie.

3. ESTIMATION DE q_0

La détermination de l'ordre q_0 des stratégies optimales est en général impossible du fait de la complexité des calculs qu'elle entraîne. On peut cependant en obtenir une estimation en calculant une minoration q_1 de q_0 et en construisant une stratégie particulière, non nécessairement optimale, d'ordre q_2. Alors :

$$q_1 \leqq q_0 \leqq q_2.$$

On obtient la minoration q_1 en posant :

$$\pi = |P| - 1,$$

où P est l'ensemble des points p, et en raisonnant comme suit.

Une stratégie d'ordre q permet de jouer de façon à atteindre tous les éléments de S en un maximum de q coups. Pour cela elle spécifie la suite des coups à jouer : $s_1, \ldots, s_i, \ldots$ où s_i est fonction de $s_1, \ldots, s_{i-1}$ et des points $p_1, \ldots, p_{i-1}$ obtenus en réponse aux coups précédents. Au premier coup on ne peut atteindre que s_1. Au deuxième coup, suivant le point p_1 obtenu en réponse à s_1, on ne peut atteindre qu'un maximum de π éléments de S. Au troisième coup, suivant les points p_1 et p_2 obtenus en réponse à s_1 et s_2, on ne peut atteindre qu'un maximum de π^2 éléments de S.

On peut donc atteindre en q coups un maximum de :

$$1+\pi+\ldots+\pi^{q-1}=\frac{\pi^q-1}{\pi-1}$$

éléments de S, d'où nécessairement :

$$|S|=\tau_1(S)\leqq\frac{\pi^q-1}{\pi-1}, \tag{11}$$

ce qui permet d'obtenir une borne inférieure de l'ordre des stratégies optimales. On peut améliorer ce résultat en considérant non plus S mais $\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)$. Si le point obtenu en réponse au premier coup est p_1, on ne pourra atteindre aux coups suivants que des éléments de $\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)$ et cela en au plus $q-1$ coups. On en déduit, par un raisonnement analogue au précédent,

$$|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)|\leqq\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1},$$

et, ce résultat étant valable pour tout p_1,

$$\tau_2(S)\leqq\max_p|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|\leqq\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1}. \tag{12}$$

(11) se déduit de (12) car, si q vérifie (12) et si $s_1\in S$ vérifie :

$$\tau_2(S)=\max_p|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|,$$

on a :

$$|S|=1+\sum_{p\neq p_*}|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|\leqq 1+\pi\tau_2(S)\leqq 1+\pi\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1}=\frac{\pi^q-1}{\pi-1}.$$

q vérifie donc (11) s'il vérifie (12), et la minoration de q_0 donnée par (12) est au moins aussi bonne que celle donnée par (11).

La stratégie particulière utilisée est construite de la façon suivante. Après avoir joué i coups : $s_1, \ldots, s_i$ pour lesquels on a obtenu en réponses les points : $p_1, \ldots, p_i$ différents de p_*, on sait que :

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) = E_i.$$

Au coup suivant, si $|E_i| = 1$ on joue l'unique élément s_* de E_i, et si $|E_i| > 1$ on joue l'un des $s \in S$ qui minimise :

$$\max_p |\mathscr{P}_s^{-1}(p) \cap E_i|.$$

Pour le premier coup, on prend :

$$E_0 = S.$$

4. APPLICATIONS

Dans le cas du jeu du Mastermind, S est l'ensemble des n-uplets

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \qquad \text{où} \quad s_i \in \{1, \ldots, m\}.$$

C'est donc un ensemble à m^n éléments.

La fonction $\mathscr{P}$ est définie de la façon suivante. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit $n_r(s)$ le nombre de fois où l'entier r apparaît dans la suite s.

Si

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \qquad \text{et} \qquad s' = (s'_1, \ldots, s'_n), \qquad \mathscr{P}(s, s') = (p_1, p_2)$$

où :

$$\begin{cases} p_1 \text{ est le nombre de fois où } s_i = s'_i, \\ p_1 + p_2 = \sum_{r=1}^{m} \inf[n_r(s), n_r(s')]. \end{cases}$$

p_1 est le nombre d'éléments de s' se retrouvant dans s à la même place; $p_1 + p_2$ est le nombre d'éléments se retrouvant à la fois dans s et dans s' à une place quelconque.

On vérifie facilement que :

$$p_1 + p_2 \leqq n \qquad \text{et} \qquad \text{le point } (n-1, 1) \text{ n'est jamais atteint.}$$

On en déduit que :

$$|P| = 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Pour : $n=m=4$, on a :

$$|S|=\tau_1(S)=256, \qquad \pi=|P|-1=13.$$

(11) donne alors :

$$q_0 \geqq 4.$$

La stratégie particulière construite est alors d'ordre 4, qui est donc l'ordre des stratégies optimales du jeu considéré. Cette stratégie optimale est donnée à la fin de ce paragraphe par la suite des coups s qu'elle fait jouer et des points correspondants $p=(p_1, p_2)$ obtenus en réponse.

On joue ainsi 3211 au premier coup. Si le point alors obtenu est (0, 1), on joue 4244 au deuxième coup. Puis, si le point alors obtenu est (1, 2), on joue 4121 au troisième coup. Enfin, si le point alors obtenu est (0, 2), la seule possibilité est de jouer 2442 au quatrième et dernier coup, ce qui donne $p_*=(4, 0)$, de sorte que $s_*=2442$ (*voir* la sixième ligne de la première colonne).

Remarque : La stratégie optimale ainsi obtenue n'est pas unique. On en obtient d'autres en permutant entre eux soit les entiers 1, 2, 3, 4 utilisés pour former les éléments de S, soit les places 1, 2, 3, 4 occupées par les entiers constituant chaque élément de S. Dans les deux cas, la permutation est la même pour tous les $s \in S$. Par exemple, la transposition de 1 et 2 donnera pour 3411, 3422 si elle s'applique aux chiffres et 4311 si elle s'applique aux places. On peut, bien entendu, combiner ces deux procédés.

Pour : $n=4$, $m=6$, on a, avec $\pi=13$,

$$\left\{\begin{aligned} \tau_1(S)&=|S|=1296, \\ \tau_2(S)&=\min_s \max_p |\mathscr{P}_s^{-1}(p)|=256. \end{aligned}\right.$$

Dans le calcul de $\tau_2(S)$, le minimum est atteint pour $s=s_1=1122$, à une permutation près. $|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|$ est maximum pour :

$$p=(0, 0), \qquad (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (0, 1),$$

(11) et (12) donnent respectivement :

$$q_0 \geqq 4 \qquad \text{et} \qquad q_0 \geqq 5.$$

La stratégie particulière construite est d'ordre 5, qui est donc l'ordre des stratégies optimales du jeu considéré. Faute de place, on ne donne pas ici cette stratégie optimale.

```
3211 11 4141 02 2412 04 1224 40
3211 11 4141 02 2412 11 3424 40
3211 11 4141 03 2414 40
3211 11 4141 04 1414 40
3211 11 4141 10 4232 40
3211 11 4141 10 4232 10 3133 40
3211 11 4141 10 4232 12 3342 40
3211 11 4141 10 4232 13 2243 40
3211 11 4141 10 4232 22 4223 40
3211 11 4141 10 4232 30 4233 40
3211 11 4141 11 3422 02 4313 40
3211 11 4141 11 3422 03 4234 40
3211 11 4141 11 3422 11 3134 40
3211 11 4141 11 3422 12 1242 40
3211 11 4141 11 3422 21 2421 40
3211 11 4141 11 3422 30 3442 40
3211 11 4141 12 4412 40
3211 11 4141 12 4412 04 1244 40
3211 11 4141 12 4412 11 1114 40
3211 11 4141 12 4412 21 4314 40
3211 11 4141 12 4412 30 4413 40
3211 11 4141 20 4331 40
3211 11 4141 20 4331 04 3143 40
3211 11 4141 20 4331 11 4243 40
3211 11 4141 21 2441 40
3211 11 4141 21 2441 12 3144 40
3211 11 4141 21 2441 21 4431 40
3211 11 4141 21 2441 22 4421 40
3211 11 4141 22 1441 40
3211 11 4141 22 1441 04 4114 40
3211 11 4141 30 1141 40
3211 11 4141 30 1141 20 4341 40
3211 12 2312 40
3211 12 2312 02 1412 03 4131 40
3211 12 2312 02 1412 04 4121 40
3211 12 2312 02 1412 11 1131 40
3211 12 2312 02 1412 12 1121 40
3211 12 2312 02 1412 21 1431 40
3211 12 2312 02 1412 22 1421 40
3211 12 2312 03 3123 40
3211 12 2312 03 3123 03 1234 40
3211 12 2312 03 3123 12 1243 40
3211 12 2312 03 3123 13 1233 40
3211 12 2312 03 3123 30 3124 40
3211 12 2312 04 1223 40
3211 12 2312 11 4113 40
3211 12 2312 11 4113 03 1331 40
3211 12 2312 11 4113 04 1341 40
3211 12 2312 11 4113 12 2141 40
3211 12 2312 11 4113 22 1413 40
3211 12 2312 11 4113 30 1113 40
3211 12 2312 12 3132 40
3211 12 2312 12 3132 03 4321 40
3211 12 2312 12 3132 11 2121 40
3211 12 2312 12 3132 12 2431 40
3211 12 2312 12 3132 30 3142 40
3211 12 2312 13 3122 40
3211 12 2312 13 3122 13 1232 40
3211 12 2312 20 1412 40
3211 12 2312 20 1412 13 2114 40
3211 12 2312 20 1412 20 1313 40
3211 12 2312 20 1412 21 1314 40
3211 12 2312 20 1412 22 4112 40
3211 12 2312 20 1412 30 1112 40
3211 12 2312 21 2413 40
3211 12 2312 21 2413 12 2331 40
3211 12 2312 21 2413 13 2341 40
3211 12 2312 22 2321 40
3211 12 2312 30 4312 40
3211 12 2312 30 4312 20 2112 40
3211 12 2312 30 4312 21 2313 40
3211 12 2312 30 4312 22 2314 40
3211 13 1312 40
3211 13 1312 04 2131 40
3211 13 1312 13 2113 40
3211 13 1312 22 1321 40
3211 20 1414 00 2212 10 3233 40
3211 20 1414 00 2212 11 3223 40
3211 20 1414 00 2212 20 3232 40
3211 20 1414 00 2212 21 3222 40
3211 20 1414 01 3242 40
3211 20 1414 01 3242 10 3331 40
3211 20 1414 01 3242 11 2221 40
3211 20 1414 01 3242 30 3243 40
3211 20 1414 02 2241 40
3211 20 1414 02 2241 20 3341 40
3211 20 1414 02 2241 22 4221 40
3211 20 1414 03 4241 40
3211 20 1414 10 3224 40
3211 20 1414 10 3224 10 3313 40
3211 20 1414 10 3224 11 2212 40
3211 20 1414 10 3224 30 3234 40
3211 20 1414 11 4212 40
3211 20 1414 11 4212 02 3431 40
3211 20 1414 11 4212 11 3244 40
3211 20 1414 12 4111 40
3211 20 1414 12 4111 11 3441 40
3211 20 1414 20 3413 40
3211 20 1414 20 3413 10 1111 40
3211 20 1414 20 3413 11 2214 40
3211 20 1414 20 3413 22 3314 40
3211 20 1414 21 4214 40
3211 20 1414 22 4411 40
3211 20 1414 30 3414 40
3211 20 1414 30 3414 20 1411 40
3211 21 3141 40
3211 21 3141 02 1212 40
3211 21 3141 02 1212 21 2213 40
3211 21 3141 03 4213 40
3211 21 3141 03 4213 21 1214 40
3211 21 3141 11 3312 40
3211 21 3141 11 3312 02 1221 40
3211 21 3141 11 3312 03 2231 40
3211 21 3141 12 3412 40
```

```
3211 40
3211 00 4444 40
3211 01 4244 02 2422 40
3211 01 4244 10 4333 40
3211 01 4244 11 4433 40
3211 01 4244 12 4121 02 2442 40
3211 01 4244 12 4121 11 2424 40
3211 01 4244 12 4121 20 4422 40
3211 01 4244 20 4343 40
3211 01 4244 20 4343 22 4334 40
3211 01 4244 21 4443 40
3211 01 4244 21 4443 21 1444 40
3211 01 4244 21 4443 22 4434 40
3211 01 4244 22 4121 02 2444 40
3211 01 4244 22 4121 11 4442 40
3211 01 4244 22 4121 20 4424 40
3211 01 4244 30 4144 40
3211 01 4244 30 4144 30 4344 40
3211 02 2144 40
3211 02 2144 01 1333 40
3211 02 2144 02 4332 40
3211 02 2144 02 4332 12 1433 40
3211 02 2144 02 4332 22 4323 40
3211 02 2144 02 4332 30 4322 40
3211 02 2144 03 4432 40
3211 02 2144 03 4432 20 1422 40
3211 02 2144 03 4432 22 4423 40
3211 02 2144 10 2432 12 2323 40
3211 02 2144 10 2432 20 2333 40
3211 02 2144 10 2432 21 2322 40
3211 02 2144 10 2432 30 2332 40
3211 02 2144 11 1343 40
3211 02 2144 11 1343 02 2432 40
3211 02 2144 11 1343 11 2423 40
3211 02 2144 11 1343 12 2433 40
3211 02 2144 11 1343 13 4133 40
3211 02 2144 11 1343 22 1334 40
3211 02 2144 12 4342 40
3211 02 2144 12 4342 03 1434 40
3211 02 2144 12 4342 12 1443 40
3211 02 2144 12 4342 20 4122 40
3211 02 2144 12 4342 22 4324 40
3211 02 2144 13 1442 40
3211 02 2144 13 1442 22 1424 40
3211 02 2144 20 2342 40
3211 02 2144 20 2342 20 2122 40
3211 02 2144 20 2342 21 2334 40
3211 02 2144 20 2342 22 2324 40
3211 02 2144 20 2342 30 2343 40
3211 02 2144 21 4143 40
3211 02 2144 21 4143 03 2434 40
3211 02 2144 21 4143 13 1344 40
3211 02 2144 21 4143 21 2443 40
3211 02 2144 21 4143 22 4134 40
3211 02 2144 22 4142 40
3211 02 2144 22 4142 22 4124 40
3211 02 2144 30 4332 01 1144 40
3211 02 2144 30 4332 02 2124 40
3211 02 2144 30 4332 11 2142 40
3211 02 2144 30 4332 12 2344 40
3211 03 1342 40
3211 03 1342 03 2123 40
3211 03 1342 03 2123 30 2133 40
3211 03 1342 04 4123 40
3211 03 1342 04 4123 13 2134 40
3211 03 1342 11 1133 40
3211 03 1342 12 2132 40
3211 03 1342 12 2132 11 1124 40
3211 03 1342 12 2132 20 1134 40
3211 03 1342 13 4132 40
3211 03 1342 13 4132 04 1423 40
3211 03 1342 13 4132 13 2143 40
3211 03 1342 20 1122 40
3211 03 1342 21 1323 40
3211 03 1342 21 1323 20 1143 40
3211 03 1342 22 1432 40
3211 03 1342 22 1432 13 1324 40
3211 03 1342 30 1332 40
3211 03 1342 30 1332 20 1142 40
3211 03 1342 30 1332 30 1322 40
3211 04 1132 40
3211 04 1132 22 1123 40
3211 10 1434 00 2222 40
3211 10 1434 01 4222 40
3211 10 1434 01 4222 22 2242 40
3211 10 1434 02 4242 40
3211 10 1434 02 4242 10 3343 40
3211 10 1434 10 3333 40
3211 10 1434 10 3333 00 2224 40
3211 10 1434 11 4224 40
3211 10 1434 11 4224 22 2244 40
3211 10 1434 11 4224 30 4244 40
3211 10 1434 12 4441 40
3211 10 1434 12 4441 11 3344 40
3211 10 1434 12 4441 20 3443 40
3211 10 1434 20 3433 40
3211 10 1434 20 3433 22 3334 40
3211 10 1434 21 4414 40
3211 10 1434 21 4414 21 3444 40
3211 10 1434 30 3434 40
3211 11 4141 40
3211 11 4141 00 2232 40
3211 11 4141 00 2232 02 3323 40
3211 11 4141 00 2232 12 3322 40
3211 11 4141 00 2232 20 3332 40
3211 11 4141 00 2232 22 2223 40
3211 11 4141 00 2232 30 2233 40
3211 11 4141 01 3432 40
3211 11 4141 01 3432 10 1222 40
3211 11 4141 01 3432 12 2234 40
3211 11 4141 01 3432 13 3324 40
3211 11 4141 01 3432 22 3423 40
3211 11 4141 01 3432 30 3422 40
3211 11 4141 02 2412 40
```

```
3211 21 3141 12 3412 04 4231 40
3211 21 3141 12 3412 11 1311 40
3211 21 3141 12 3412 21 2411 40
3211 21 3141 13 4311 40
3211 21 3141 20 3321 40
3211 21 3141 20 3321 11 2111 40
3211 21 3141 21 3113 40
3211 21 3141 21 3113 02 1241 40
3211 21 3141 21 3113 11 3421 40
3211 21 3141 22 3114 40
3211 21 3141 30 3131 40
3211 22 3112 40
3211 22 3112 04 1231 40
3211 22 3112 13 1213 40
3211 22 3112 13 1213 13 2311 40
3211 22 3112 22 3121 40
3211 30 3341 10 1211 40
3211 30 3341 10 1211 30 2211 40
3211 30 3341 11 3212 40
3211 30 3341 11 3212 20 4211 40
3211 30 3341 12 3213 40
3211 30 3341 12 3213 30 3214 40
3211 30 3341 20 3111 40
3211 30 3341 20 3111 20 3221 40
3211 30 3341 21 3231 40
3211 30 3341 21 3231 20 3411 40
3211 30 3341 30 3241 40
3211 30 3341 30 3241 20 3311 40
```

BIBLIOGRAPHIE

1. S. VAJDA, *The Theory of Games and Linear Programming*, Methuen, London, 1961.