RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

F. LENORMAND
B. WALLISER

Modélisation du service de surveillance douanière terrestre

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 1 (1979), p. 81-94
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_1_81_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operation Research
(vol. 13, n° 1, février 1979, p. 81 à 94)

MODÉLISATION DU SERVICE DE SURVEILLANCE DOUANIÈRE TERRESTRE (*)

F. LENORMAND et B. WALLISER (¹)

Résumé. — *Le problème étudié est celui de la distribution optimale des effectifs de contrôle douanier routier sur la frontière et en retrait de celle-ci. La première partie décrit le modèle d'optimisation qui retient un double objectif de dissuasion et de répression, des relations de comportement des équipes douanières et des fraudeurs et une contrainte d'effectifs. Les deux parties suivantes présentent deux méthodes de résolution du problème (correspondant à des hypothèses différentes sur les fonctions introduites) : l'une analyse directement l'effet sur la fonction-objectif d'un report des effectifs de l'arrière vers l'avant et d'une égalisation des taux de contrôle, l'autre recourt à la programmation non linéaire pour optimiser la répartition globale des effectifs.*

Le modèle analysé est un modèle d'optimisation qui étudie le problème de la répartition optimale des équipes douanières sur la frontière et en retrait de celle-ci. L'objectif retenu est double : décourager la fraude potentielle (politique de dissuasion) et découvrir le maximum d'infractions (politique de répression). La contrainte porte sur l'effectif total de douaniers disponibles dans une zone donnée. On se donne également des relations de comportement des équipes douanières (taux de contrôle en fonction des effectifs et du trafic) et des fraudeurs (probabilité de fraude en fonction du taux de contrôle).

Le modèle considéré est également un modèle théorique en ce sens qu'il fournit des conclusions qualitatives sur la répartition optimale des effectifs en fonction d'hypothèses sur la forme des fonctions introduites. Ces conclusions ne sont donc valables que si la fonction-objectif retenue répond bien aux aspirations des décideurs et si les relations de comportement choisies sont vérifiées expérimentalement. Cependant, si ces hypothèses sont vérifiées, les résultats peuvent, du fait de leur simplicité, être traduits facilement sous forme quantitative.

Après avoir décrit les principales hypothèses du modèle, on donnera deux méthodes de résolution du problème posé pour des hypothèses différentes. La première analyse directement l'effet (positif) sur la fonction-objectif d'un report

(*) Reçu février 1978.
(¹) Direction de la prévision, Ministère de l'Économie.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399/0842/1979/81/$ 1.00

des effectifs douaniers de l'arrière vers l'avant et d'une égalisation des taux de contrôle sur les parcours ou les points de passage. La seconde optimise directement la répartition globale des effectifs en recourant à la programmation non linéaire.

I. HYPOTHÈSES DU MODÈLE

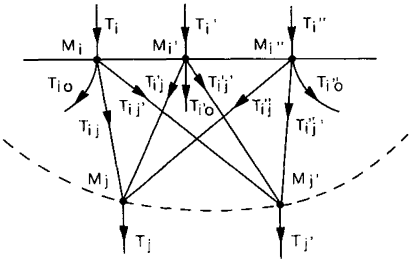
On présentera successivement les hypothèses du modèle relatives au dispositif de contrôle retenu, au comportement des fraudeurs et des douaniers et à la fonction-objectif adoptée, en spécifiant quelques propriétés des fonctions introduites qui seront utilisées par la suite.

a) Répartition des effectifs et des trafics

On suppose que les douaniers chargés de surveiller une frontière sont répartis en un certain nombre de points de contrôle M_i situés sur la frontière et M_j situés en retrait, avec des effectifs respectifs A_i et A_j. On appelle A les effectifs douaniers disponibles pour une certaine zone.

On suppose, par ailleurs, qu'un trafic T_i arrive au point M_i, est ventilé en des trafics T_{ij} s'écoulant sur les parcours (M_i, M_j), une fraction T_{i0} s'arrêtant dans la zone frontalière. Symétriquement, un trafic T_j s'écoule par le point M_j, composé des trafics T_{ij} et d'un trafic T_{0j} provenant de la zone frontalière sans avoir passé la frontière. On a, bien entendu :

$$T_i = \sum_{j \geq 0} T_{ij} \qquad \text{et} \qquad T_j = \sum_{i \geq 0} T_{ij}.$$

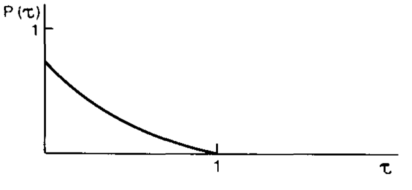


On appelle respectivement τ_i et τ_j le taux de contrôle (nombre de véhicules contrôlés divisé par le trafic) aux points M_i et M_j. On appelle de même τ_{ij} la probabilité d'être contrôlé au moins une fois sur le parcours (M_i, M_j). On montre facilement que $\tau_{ij} = \tau_i + \tau_j - \tau_i \tau_j$.

b) **Comportement des fraudeurs**

Le trafic total aussi bien que sa ventilation entre les différents itinéraires sont supposés exogènes. Ceci implique, à moins de considérer le nombre de fraudeurs comme négligeable par rapport au trafic, que les fraudeurs ne décident pas de traverser la frontière ou de choisir leur itinéraire en fonction du taux de contrôle.

Par contre, on suppose que la probabilité de fraude P sur un parcours (nombre de fraudeurs divisé par le trafic) est fonction de la probabilité d'être contrôlé sur ce parcours et d'elle seule : $P = P(\tau)$. On suppose également que la probabilité de fraude décroît quand la probabilité d'être contrôlé augmente et qu'elle s'annule lorsque $\tau = 1$: $P'(\tau) < 0$, $P(1) = 0$. On sera enfin amené à supposer dans la suite que Log $P(\tau)$ est concave $[P'(\tau)/P(\tau)$ décroissante ou $P(\tau)\,P''(\tau) - P'^2(\tau) \leqq 0]$ et que $P(\tau)$ est convexe $(P''(\tau) \geqq 0)$.



Ces conditions sont remplies en particulier par les spécifications suivantes :

- $P(\tau) = -a(\tau - 1) \Rightarrow P'' = 0$ et $PP'' - P'^2 = -a^2 \leqq 0$,
- $P(\tau) = a(e^{-b(\tau-1)} - 1) \Rightarrow P'' = ab^2\, e^{-b(\tau-1)} \geqq 0$
  et
  $PP'' - P'^2 = -a^2 b^2 e^{-b(\tau-1)} \leqq 0.$

c) **Comportement des douaniers**

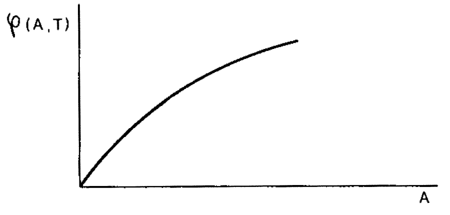
On suppose que le taux de contrôle en un point de contrôle est fonction uniquement du temps disponible par les douaniers pour contrôler un véhicule, compte tenu du temps unitaire $k(T)$ occupé par les douaniers à des tâches administratives :

$$\tau = \theta(A,\, T) = \varphi\left(\frac{A}{T} - k(T)\right).$$

On suppose, bien entendu, que le taux de contrôle est une fonction croissante des effectifs : $\partial\theta/\partial A > 0$ $(\theta(0,\, T) = 0)$ et décroissante du trafic : $\partial\theta/\partial T < 0$ [ce qui est assuré si $k'(T) \geqq 0$]. On suppose, en outre, que le rendement des effectifs est décroissant : $\partial^2 \theta / \partial A^2 \leqq 0$. Si l'on pose

$$\frac{\partial \theta}{\partial A} = \frac{1}{T} \varphi' \left(\frac{A}{T} - k(T) \right) = \frac{1}{T} \varphi' \circ \varphi^{-1}(\tau) = \frac{1}{T} h(\tau),$$

$h(\tau)$ est alors une fonction positive décroissante : $h(\tau) > 0$, $h'(\tau) < 0$.



On sera amené, en outre, à supposer que Log $(1-\varphi)$ est concave (2[e] et 3[e] parties) ou convexe (3[e] partie), c'est-à-dire que :

$$\frac{T(\partial \theta / \partial A)}{1 - \theta(A, T)} = \frac{h(\tau)}{1-\tau}$$

est une fonction positive croissante ou décroissante.

Les conditions précédentes sont remplies en particulier lorsque $\tau = \varphi(u)$ a l'une des formes suivantes :

$$\tau = \nu u \quad \Rightarrow \quad h(\tau) = \nu \quad \Rightarrow \quad \frac{h(\tau)}{1-\tau} = \frac{\nu}{1-\tau} \text{ croissante,}$$

$$\tau = 1 - e^{-\nu u} \quad \Rightarrow \quad h(\tau) = \nu(1-\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{h(\tau)}{1-\tau} = \nu \text{ constante.}$$

d) Fonction-objectif

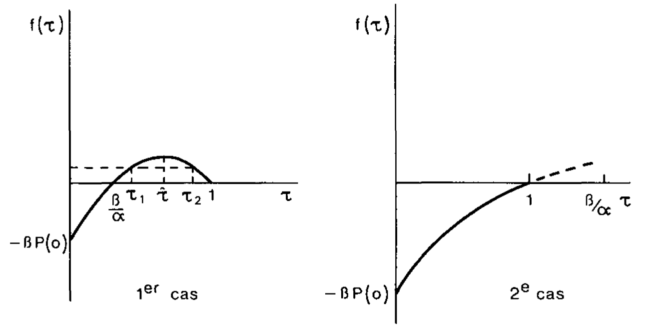
Le nombre de fraudeurs empruntant un parcours donné est $TP(\tau)$ alors que le nombre de fraudeurs contrôlés sur ce parcours est $TP(\tau)\tau$. On suppose que tous les contrôles sont efficaces, c'est-à-dire permettent de détecter une fraude si elle existe.

On choisit pour fonction-objectif, une combinaison linéaire de ces deux expressions, soit

$$Tf(\tau) = \alpha\, TP(\tau)\tau - \beta\, TP(\tau) = T(\alpha\tau - \beta)\, P(\tau),$$

la valeur relative des coefficients α et β traduisant l'importance relative accordée aux critères de répression et de dissuasion.

Selon la valeur de β/α, $f(\tau)$ a l'allure suivante (compte tenu de P'/P décroissant) :



Dans le premier cas, l'optimum se situera toujours dans la zone croissante de $f(\tau)$ puisque, pour deux valeurs τ_1 et τ_2 donnant même valeur à la fonction-objectif ($f(\tau_1)=f(\tau_2)$), on retiendra la plus faible qui suppose les effectifs les moins nombreux. Dans les deux cas, on peut alors montrer que $f(\tau)$ est concave ($f''(\tau) \leqq 0$) :

si $\alpha\tau-\beta \geqq 0$ (1er cas avec $\tau \in [\beta/\alpha, \hat{\tau}]$):

$$P(\tau)f''(\tau)=2\,\underset{\leqq 0}{P'(\tau)f'(\tau)}+\underset{\geqq 0}{(\alpha\tau-\beta)}\,\underset{\leqq 0}{(P(\tau)P''(\tau)-2\,P'^2(\tau))} \leqq 0,$$

si $\alpha\tau-\beta \leqq 0$ (2e cas et 1er cas avec $\tau \in [0, \beta/\alpha]$) :

$$f''(\tau)=\underset{\leqq 0}{(\alpha\tau-\beta)}\,\underset{\geqq 0}{P''(\tau)}+2\alpha\,\underset{\leqq 0}{P'(\tau)} \leqq 0.$$

II. RECHERCHE DIRECTE DE LA SOLUTION OPTIMALE

On procédera par étapes en recherchant, à partir d'une répartition quelconque des effectifs douaniers (sur la frontière et en arrière), pour chaque étape, une répartition qui soit la meilleure parmi toutes celles qui peuvent être obtenues en ventilant ou en regroupant les douaniers sur les parcours considérés.

a) Nouvelle répartition des effectifs sur les tronçons

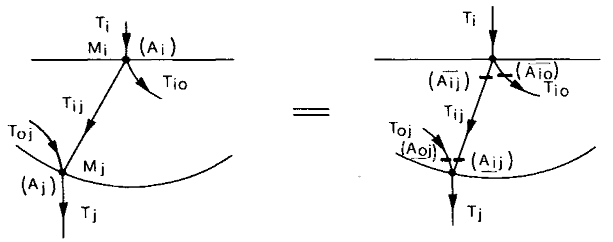
Si les effectifs initiaux A_i (ou A_j) sont ventilés sur chacun des parcours (M_i, M_j) proportionnellement au trafic T_{ij} de ces parcours, on obtient ainsi une nouvelle répartition ne modifiant pas l'efficacité globale du système et permettant de contrôler le même nombre de véhicules qu'avant en tous points du dispositif.

En effet, les effectifs A_i de la frontière sont ventilés en effectifs $\overline{A_{ij}}$ ($j \geqq 0$) avec

$$\frac{\overline{A_{ij}}}{T_{ij}} = \mathrm{Cte} = \frac{\sum_{j \geqq 0} \overline{A_{ij}}}{\sum_{j \geqq 0} T_{ij}} = \frac{A_i}{T_i}.$$

Si l'on suppose que $k(T_{ij}) = 0$, le taux de contrôle τ_{ij} de ces équipes n'est fonction que du rapport $\overline{A_{ij}}/T_{ij}$ et est encore égal au taux de contrôle τ_i qui existait au point M_i. Il en est de même des taux de contrôle des équipes $\underline{A_{ij}}$ provenant de la ventilation des équipes A_j de l'arrière.

Les deux dispositifs suivants sont donc strictement équivalents :



b) **Regroupement des effectifs affectés à chaque parcours**

Dans certaines conditions, il est plus efficace de regrouper les effectifs $\overline{A_{ij}}$ et $\underline{A_{ij}}$ affectés à chaque parcours (M_i, M_j).

C'est le cas si le taux de contrôle obtenu après regroupement est plus fort que le taux obtenu avant regroupement, ceci quels que soient les parcours (M_i, M_j) et les conditions de trafic existant sur ces parcours. Cette condition est remplie si :

$$\varphi\left(\frac{\underline{A_{ij}}}{T_{ij}} + \frac{\overline{A_{ij}}}{T_{ij}}\right) \geqq \varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right) + \varphi\left(\frac{A_j}{T_j}\right) - \varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right)\varphi\left(\frac{A_j}{T_j}\right).$$

En posant

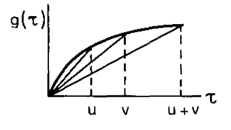
$$\left\{\begin{array}{l} u = \dfrac{A_i}{T_i} \\ \\ v = \dfrac{A_j}{T_j}, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g = \mathrm{Log}(1 - \varphi),$$

on obtient la condition :

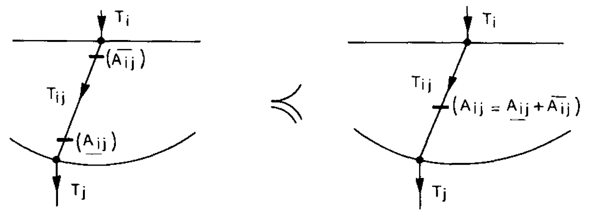
$$g(u+v) \leqq g(u) + g(v), \quad \forall u, v \qquad \text{avec} \quad g(0) = 0.$$

Or, toutes les fonctions concaves passant par l'origine vérifient cette inégalité fonctionnelle. Pour le montrer, il suffit en effet d'écrire la concavité entre les points 0, u, $u+v$ d'une part, 0, v, $u+v$ d'autre part :

$$\left.\begin{array}{l} g(u+v)\,.\,\dfrac{u}{u+v} \leqq g(u) \\[2ex] g(u+v)\,.\,\dfrac{v}{u+v} \leqq g(v) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g(u+v) \leqq g(u)+g(v).$$



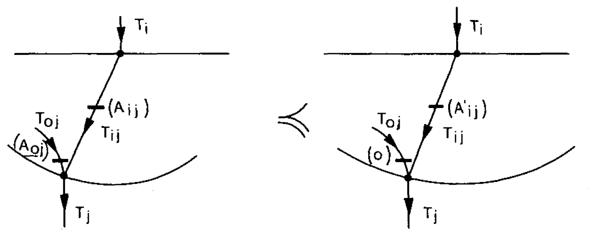
Si l'on pose $A_{ij}=\underline{A_{ij}}+\overline{A_{ij}}$, on obtient les dispositifs suivants :



c) Ventilation des effectifs restant sur les tronçons T_{0j}

Les effectifs contrôlant un trafic T_{0j} ne provenant pas de la frontière peuvent être répartis sur les autres parcours T_{ij} en améliorant l'efficacité du dispositif. On considérera ici la ventilation qui permet d'obtenir un surcroît d'efficacité maximale.

Cette ventilation permettant une efficacité meilleure que celle du dispositif initial, il en résulte que la répartition des douaniers ne peut être optimale si on maintient des effectifs en arrière de la frontière en des points où le trafic T_{0j} (composé de véhicules n'ayant pas franchi la frontière) n'est pas nul.



d) **Recherche de la solution optimale parmi toutes les solutions permises par le dispositif précédent**

Puisqu'on a écarté les solutions consistant à laisser des équipes aux points M_j où le trafic T_{0j} n'est pas nul, il reste à préciser la position des douaniers sur les différents parcours et la valeur optimale de leur taux de contrôle.

La fonction-objectif s'écrit :

$$J = \sum_{\substack{i>0 \\ j>0}} T_{ij} f(\tau_{ij}) + \sum_{i>0} T_{i0} f(\tau_i) = \sum_{i>0} T_i \sum_{j \geqq 0} \frac{T_{ij}}{T_i} f(\tau_{ij}).$$

En utilisant la concavité de la fonction $f(\tau)$, on obtient :

$$J \leqq \sum_{i>0} T_i f\left(\sum_{j \geqq 0} \frac{T_{ij}}{T_i} \tau_{ij} \right).$$

En utilisant la concavité de la fonction $\tau = \varphi(A/T)$, on obtient :

$$\sum_{j \geqq 0} \frac{T_{ij}}{T_i} \tau_{ij} = \sum_{j \geqq 0} \frac{T_{ij}}{T_i} \varphi\left(\frac{A_{ij}}{T_{ij}}\right) \leqq \varphi\left(\frac{\sum_{j \geqq 0} A_{ij}}{T_i}\right) = \varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right),$$

d'où

$$J \leqq \sum_{i>0} T_i f\left(\varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right)\right) \qquad (f \text{ croissant}).$$

Il en résulte que le dispositif recherché est optimal si tous les effectifs sont ramenés sur la frontière même.

En outre, la meilleure solution consiste à répartir les effectifs de façon à assurer un taux de contrôle identique partout. En effet,

$$J \leqq \sum_{i>0} T_i f\left[\varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right)\right] \leqq T f\left[\sum_{i>0} \frac{T_i}{T} \varphi\left(\frac{A_i}{T_i}\right)\right]$$

$$\leqq T f\left[\varphi\left(\sum_{i>0} \frac{A_i}{T}\right)\right] = T f\left[\varphi\left(\frac{A}{T}\right)\right],$$

en posant

$$A = \sum_i A_i \qquad \text{et} \qquad T = \sum_i T_i.$$

$T f[\varphi(A/T)]$ est l'efficacité du dispositif obtenu en regroupant tous les effectifs aux points M_i de la frontière, de façon proportionnelle au trafic.

III. OPTIMISATION GLOBALE

Après avoir énoncé le programme d'optimisation sous sa forme générale, exprimé les conditions de Kuhn et Tucker et étudié la concavité de la fonction-objectif, on présentera divers résultats selon les hypothèses faites sur la fonction de comportement des douaniers.

a) Présentation du programme

Si l'on considère simultanément des points de contrôle sur la frontière et à l'arrière, on est conduit à résoudre le programme suivant :

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{l}\underset{\{A_i,\,A_j\}}{\mathrm{Max}}\sum_{ij} T_{ij}\,f(\tau_{ij})+\sum_i T_{i0}\,f(\tau_i),\\ A_i \geqq 0,\\ A_j \geqq 0,\\ \sum_i A_i+\sum_j A_j=A.\end{array}\right.$$

Dans ce programme, les contraintes sont linéaires et la fonction-objectif est une somme pondérée de termes de la forme :

$$F(A_i,\,A_j)=f(\tau_{ij})=f(\varphi(A_i)+\varphi(A_j)-\varphi(A_i)\,\varphi(A_j)),$$

$$\overline{F}(A_i)=f(\tau_i)=f(\varphi(A_i)).$$

Les dérivées premières de ces fonctions s'écrivent :

$$\frac{\partial F}{\partial A_i}=f'(\tau_{ij})\,(1-\tau_j)\frac{h(\tau_i)}{T_i},$$

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial A_i}=f'(\tau_i)\frac{h(\tau_i)}{T_i}.$$

Les conditions de Kuhn et Tucker, avec les multiplicateurs respectifs μ_i, μ_j et λ peuvent alors s'écrire :

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{l}h(\tau_i)\left[\sum_j \frac{T_{ij}}{T_i}f'(\tau_{ij})\,(1-\tau_j)+\frac{T_{i0}}{T_i}f'(\tau_i)\right]=\lambda-\mu_i,\\ h(\tau_j)\left[\sum_i \frac{T_{ij}}{T_j}f'(\tau_{ij})\,(1-\tau_i)\right]=\lambda-\mu_j,\\ \mu_i A_i=0,\qquad \mu_i\geqq 0,\\ \mu_j A_j=0,\qquad \mu_j\geqq 0,\\ A=\sum_i A_i+\sum_j A_j,\qquad \lambda\geqq 0.\end{array}\right.$$

b) **Étude de la fonction-objectif**

Les dérivées secondes de $f(\tau_{ij})$ sont les suivantes :

$$a_{ii}=\frac{\partial^2 F}{\partial A_i^2}=\frac{1}{T_i^2}h(\tau_i)\,(1-\tau_j)\,[f''(\tau_{ij})\,(1-\tau_j)\,h(\tau_i)+f'(\tau_{ij})\,h'(\tau_i)]<0,$$

$$a_{jj}=\frac{\partial^2 F}{\partial A_j^2}=\frac{1}{T_j^2}h(\tau_j)\,(1-\tau_i)\,[f''(\tau_{ij})\,(1-\tau_i)\,h(\tau_j)+f'(\tau_{ij})\,h'(\tau_j)]<0,$$

$$a_{ij}=\frac{\partial^2 F}{\partial A_i\,\partial A_j}=\frac{1}{T_i\,T_j}\,h(\tau_i)\,h(\tau_j)\,[f''(\tau_{ij})\,(1-\tau_{ij})-f'(\tau_{ij})]=a_{ji}<0.$$

Le déterminant du hessien de la fonction peut s'écrire :

$$D=a_{ii}\,a_{jj}-a_{ij}^2=\frac{T_{ij}^2}{T_i^2\,T_j^2}h(\tau_i)\,h(\tau_j)\,K,$$

avec

$$K=f'^2(\tau_{ij})\,[(1-\tau_{ij})\,h'(\tau_i)\,h'(\tau_j)-h(\tau_i)\,h(\tau_j)]+f''(\tau_{ij})\,f'(\tau_{ij})\,(1-\tau_{ij})$$
$$\times\,[h(\tau_i)\,((1-\tau_j)\,h'(\tau_j)+h(\tau_j))+h(\tau_j)\,((1-\tau_i)\,h'(\tau_i)+h(\tau_i))].$$

Suivant que l'on suppose Log $(1-\varphi)$ convexe (ou concave), on a $h(\tau)/(1-\tau)$ décroissante (ou croissante) et $(1-\tau)\,h'(\tau)+h(\tau)<0$ (ou >0), ce qui entraîne

$$\left.\begin{array}{l}(1-\tau_i)\,h'(\tau_i)+h(\tau_i)<0\quad(\text{ou}>0)\\(1-\tau_j)\,h'(\tau_j)+h(\tau_j)<0\quad(\text{ou}>0)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\quad(1-\tau_{ij})\,h'(\tau_i)\,h'(\tau_j)-h(\tau_i)\,h(\tau_j)>0\quad(\text{ou}<0).$$

$$\Rightarrow\quad D>0\,(\text{ou}<0)$$

Si l'on pose $\psi(A_i)=F(A_i,\,A-A_i)$, c'est-à-dire si l'on cherche l'intersection de la fonction $F(A_i,\,A_j)$ avec le plan $A_i+A_j=A$, la dérivée de cette fonction s'écrit :

$$\psi'(A_i)=\frac{\partial F}{\partial A_i}(A_i,\,A-A_i)-\frac{\partial F}{\partial A_j}(A_i,\,A-A_i)$$
$$=f'(\tau_{ij})\left[\frac{h(\tau_i)\,(1-\tau_j)}{T_i}-\frac{h(\tau_j)\,(1-\tau_i)}{T_j}\right].$$

Si l'on recherche la dérivée seconde de $\psi(A_i)$ au point A_i^* où $\psi(A_i)$ s'annule, on obtient :

$$\psi''(A_i^*)=\frac{\partial^2 F}{\partial A_i^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial A_i\,\partial A_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial A_j^2}$$
$$=\frac{f'(\tau_{ij})}{T_i\,T_j}[h(\tau_j)\,((1-\tau_i)\,h'(\tau_i)+h(\tau_i))+h(\tau_i)\,((1-\tau_j)\,h'(\tau_j)+h(\tau_j))].$$

Si l'on suppose que Log $(1-\varphi)$ est convexe (ou concave), on voit alors que $\psi''(A_i^*)$ est négatif (ou positif).

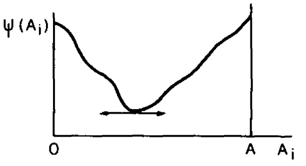
Enfin, si l'on pose $\Phi(A_i)=F(A_i, k A_i)$, $k>0$, c'est-à-dire si l'on cherche l'intersection de la fonction $F(A_i, A_j)$ avec le plan $A_j=k A_i$, la dérivée seconde de cette fonction s'écrit :

$$\Phi''(A_i)=\frac{\partial^2 F}{\partial A_i^2}+2k\frac{\partial^2 F}{\partial A_i \partial A_j}+k^2\frac{\partial^2 F}{\partial A_j^2}<0.$$

On peut donc tirer les conclusions suivantes :

si Log $(1-\varphi)$ est convexe, D est >0, ce qui implique (avec a_{ii} et $a_{jj}<0$) que $f(\tau_{ij})$ est concave globalement;

si Log $(1-\varphi)$ est concave, D est <0, ce qui implique (avec a_{ii} et $a_{jj}<0$) que $f(\tau_{ij})$ est concave dans tout plan $A_j=k A_i$ et a l'allure suivante dans un plan $A_i+A_j=A$ (car elle est convexe en tout extremum).



Par ailleurs, $f(\tau_i)$ est concave puisque

$$\frac{d^2 \overline{F}}{d A_i^2}=\frac{1}{T_i^2}h(\tau_i)\,(f''(\tau_i)h(\tau_i)+f'(\tau_i)h'(\tau_i))\leqq 0.$$

c) **Cas où** Log $(1-\varphi)$ **est convexe**

Dans le cas où Log $(1-\varphi)$ est convexe, la fonction-objectif est concave car elle est une somme de fonctions concaves. Dans ce cas, les conditions de Kuhn et Tucker sont des conditions nécessaires et suffisantes.

On peut alors montrer qu'il existe des cas où il ne faut pas regrouper les douaniers à l'avant. Si l'on suppose, par exemple, que $T_{i0}=T_{0j}=0$, ce qui entraîne que:

$$\sum_i T_{ij}=T_j,$$

$$\sum_j T_{ij}=T_i.$$

les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_j \frac{T_{ij}}{T_i} h(\tau_i) f'(\tau_{ij}) (1-\tau_j) = \lambda - \mu_i, \\ \sum_i \frac{T_{ij}}{T_j} h(\tau_j) f'(\tau_{ij}) (1-\tau_i) = \lambda - \mu_i, \\ \mu_i A_i = 0, \qquad \mu_i \geqq 0, \\ \mu_j A_j = 0 \qquad \mu_j \geqq 0, \\ A = \sum_i A_i + \sum_j A_j, \qquad \lambda \geqq 0\end{array}\right.$$

et admettent pour solution (unique) $\tau_i = \tau_j = \tilde{\tau}$. En effet, si l'on tient compte que $\mu_i = \mu_j = 0$, les deux premières équations sont identiques et permettent de calculer λ :

$$\lambda = h(\tilde{\tau}) f'(2\tilde{\tau} - \tilde{\tau}^2)(1-\tilde{\tau}) > 0$$

et la dernière donne la valeur de $\tilde{\tau}$ en fonction de A :

$$\tilde{\tau} = \varphi\left(\frac{A}{2T}\right) \qquad \text{avec} \quad T = \sum_i T_i = \sum_j T_j.$$

d) **Cas où** Log $(1-\varphi)$ **est concave**

Dans le cas où Log $(1-\varphi)$ est concave, on peut montrer que le regroupement de tous les effectifs sur la frontière avec un taux de contrôle constant est solution des conditions de Kuhn et Tucker. En effet, si l'on pose $\tau_j = 0$ et $\tau_i = \hat{\tau}$, les conditions de Kuhn et Tucker peuvent s'écrire (moyennant $\mu_i = 0$) :

$$\left\{\begin{array}{l} h(\hat{\tau}) f'(\hat{\tau}) = \lambda, \\ h(0) f'(\hat{\tau})(1-\hat{\tau}) \sum_i \frac{T_{ij}}{T_j} = \lambda - \mu_j, \\ \varphi^{-1}(\hat{\tau}) \sum_i T_i = A. \end{array}\right.$$

La dernière condition donne la valeur de $\hat{\tau}$ en fonction des effectifs totaux et du trafic. La première condition donne alors la valeur de λ dont on vérifie qu'il est positif. Enfin, la seconde condition donne la valeur de μ_j :

$$\mu_j = f'(\hat{\tau}) \left[h(\hat{\tau}) - h(0)(1-\hat{\tau}) \sum_i \frac{T_{ij}}{T_j} \right] > 0$$

car $h(\tau)/(1-\tau)$ est croissante.

Mais les conditions de Kuhn et Tucker n'étant plus généralement suffisantes, ce maximum peut être un maximum local et non global et l'on ne peut conclure. Cependant, si l'on fait l'hypothèse que les effectifs doivent tous être regroupés soit à l'avant, soit à l'arrière, la fonction-objectif étant concave localement, on peut conclure dans ces deux cas que la répartition des douaniers doit se faire proportionnellement aux trafics.

De plus, on peut alors comparer directement la valeur de la fonction-objectif relative à ces deux hypothèses :

- regroupement uniforme à l'avant :

$$\tau_i = \hat{\tau} = \varphi\left(\frac{A}{\sum_i T_i}\right), \qquad \tau_j = 0,$$

$$J_1 = f(\hat{\tau})\left[\sum_{i,j} T_{ij} + \sum_i T_{i0}\right] = f\left(\varphi\left(\frac{A}{\sum_i T_i}\right)\right)\sum_i T_i;$$

- regroupement uniforme à l'arrière :

$$\tau_j = \hat{\hat{\tau}} = \varphi\left(\frac{A}{\sum_j T_j}\right), \qquad \tau_i = 0,$$

$$J_2 = f(\hat{\hat{\tau}})\sum_{i,j} T_{ij} + f(0)\sum_i T_{i0} = f\left(\varphi\left(\frac{A}{\sum_j T_j}\right)\right)\sum_i (T_i - T_{i0}) + f(\varphi(0))\sum_i T_{i0}$$

et, d'après la concavité de la fonction $f \circ \varphi$:

$$J_2 \leqq f\left[\varphi\left(\frac{A\sum_i (T_i - T_{i0})}{\sum_j T_j \sum_i T_i}\right)\right]\sum_i T_i \leqq f\left[\varphi\left(\frac{A}{\sum_i T_i}\right)\right] = J_1,$$

car

$$\sum_i (T_i - T_{i0}) = \sum_{i,j} T_{ij} \qquad \text{et} \qquad \sum_j T_j = \sum_{i,j} T_{ij} + \sum_j T_{0j}.$$

La solution du regroupement à l'avant est donc toujours meilleure que celle du regroupement à l'arrière.

* * *

Les deux méthodes de résolution du problème posé s'avèrent en fait complémentaires dans la mesure où la première (analyse directe des effets d'un report d'effectifs) permet de conclure là où la seconde (optimisation par programmation non linéaire) ne donne que des résultats partiels. Par contre, la seconde donne des résultats complémentaires sous des hypothèses qui ne peuvent être explorées par la première.

Quant à ces résultats, ils mettent en évidence qu'on ne peut affirmer dans tous les cas qu'il faut regrouper les douaniers à l'avant. Cette conclusion n'est démontrée que sous une condition analytique [Log $(1-\varphi)$ concave] difficile à interpréter (le rendement des douaniers n'est pas trop décroissant). Si cette condition n'est pas vérifiée, on ne peut conclure et on peut même exhiber des contre-exemples [si Log $(1-\varphi)$ convexe] où le regroupement à l'avant n'est pas optimal.

Les conclusions sont donc particulièrement sensibles à la forme de la fonction de comportement des douaniers qu'il est difficile de bien valider expérimentalement. De plus, ces conclusions ne sont évidemment valables qu'avec les spécifications relativement restrictives adoptées pour la fonction-objectif et les fonctions de comportement et ne peuvent être généralisées sans précautions.

BIBLIOGRAPHIE

D. Himmelblau, *Applied non linear programming*, McGraw Hill, 1972.

P. Huard, *Mathémathiques des programmes économiques*, Dunod, Paris, 1965.

E. Malinvaud, *Leçons de théorie micro-économique* (annexe), Dunod, Paris, 1975.

R. Pallu de la Barrière, *Cours d'automatique théorique*, Dunod, Paris, 1966.