

GUY SITRUK

EDITH HEURGON

MANOËLLE PRÉSENT

**Procédure de répartition optimale, pour le métro,  
à un horizon fixé, de l'énergie électrique**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 12, n° 4 (1978),  
p. 351-368

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1978\\_\\_12\\_4\\_351\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_4_351_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROCÉDURE DE RÉPARTITION OPTIMALE, POUR LE MÉTRO, A UN HORIZON FIXÉ, DE L'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE (\*) (PROMÉTHÉE)

par Guy SITRUK, Edith HEURGON, Manoëlle PRÉSENT (1)

Résumé. — *Cet article a pour objet de décrire une procédure conversationnelle, élaborée et utilisée à la R.A.T.P. dans le cadre d'un système plus complet qui aménage le réseau de distribution de l'énergie sur le métro.*

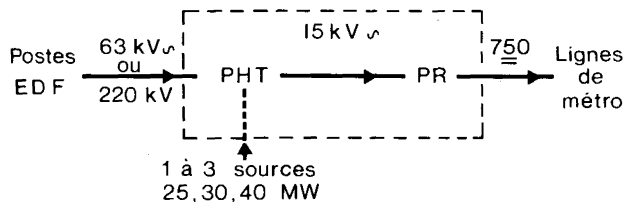
*Par le biais d'un générateur de configurations admissibles, le problème se formule comme un programme linéaire en variables bivalentes (0,1). Pour le résoudre, deux procédures ont été successivement étudiées. La première consiste en l'utilisation jumelée d'un programme linéaire et d'une exploration arborescente PSES. La seconde, par relaxation de certaines contraintes, combine une méthode de décomposition du type Dantzig et Wolfe et une méthode de sous-gradients.*

*Les résultats obtenus mettent en évidence des gains substantiels relativement à la fonction économique choisie comme représentative des coûts réels pour la planification à moyen et long terme.*

### 1. SITUATION DU PROBLÈME

L'alimentation en énergie électrique d'un réseau métropolitain pose un ensemble de problèmes distincts que les techniques de la Recherche Opérationnelle peuvent aider à résoudre.

Soit l'exemple de Paris. Des postes haute tension (PHT) sont alimentés par les postes E. D. F., situés autour de la ville. Chaque PHT se compose de 1, 2 ou 3 transformateurs, appelés « sources », de puissances nominales 25, 30 et 40 MW.



(\*) Manuscrit reçu juin 1977, révisé mars 1978.

(1) Régie Autonome des Transports Parisiens, Groupement de Recherche Opérationnelle.

*Les postes redresseurs (PR)* reçoivent, par l'intermédiaire de câbles enfouis, l'énergie électrique 15 kV alternatif et produisent le courant continu 750 V, qui est acheminé par conduite jusqu'aux rails d'alimentation des lignes de métro. Un PR n'est alimenté que par un seul PHT et n'alimente qu'une seule ligne.

Les PR ont une puissance nominale de 4 500 kW. Comme les PHT, les PR peuvent supporter, pendant deux heures, une surcharge égale à la moitié de leur puissance nominale. En outre, les puissances appelées par les PR ne sont pas uniformes ; elles dépendent des conditions d'exploitation des lignes : nombre de rames, type de matériel, etc.

Il y aura, en 1981, 6 PHT (au total 12 sources) et environ 140 PR alimentés par le réseau R. A. T. P. Selon la longueur des lignes, le nombre de PR de chaque ligne peut varier de 3 à 12.

\*  
\* \*

Pour concevoir un réseau de distribution de l'énergie, il faut, notamment, s'étant fixé un horizon :

- 1) définir le nombre, l'emplacement, la composition (en sources) des PHT ;
- 2) définir, pour chaque ligne, le nombre et l'emplacement des PR ;
- 3) affecter les PR aux sources ;
- 4) définir, sur le terrain, le cheminement exact des câbles, etc.

Naturellement, selon qu'il existe ou non un réseau électrique initial, les problèmes sont très différents. Dans le premier cas, il s'agit de compléter, voire de remettre en cause, *un réseau existant*, en raison du prolongement de certaines lignes, d'un changement de matériel ou du renforcement des fréquences. Dans le second cas, il s'agit de construire *ex nihilo* un réseau d'alimentation électrique pour un nouveau métro. Paris illustre le premier cas, Rio le second.

## II. OBJECTIFS DE LA PROCÉDURE PROMÉTHÉE

Seul le problème 3 fait l'objet de la procédure PROMÉTHÉE. Les PHT et les PR étant définis, elle consiste à *affecter les PR aux sources de manière à minimiser les coûts de câblages, à respecter les contraintes de puissances et à offrir une suffisante stabilité au réseau électrique* en cas de défaillance d'une ou plusieurs sources.

Cette procédure automatique s'inscrit dans un ensemble de travaux dont les trois objectifs principaux sont :

- *la programmation des travaux* pour Paris, dans le cadre du Plan glissant relatif au remaniement des câbles moyenne tension ;
- *l'aide aux études* sur les structures générales du réseau électrique (renforcement ou modification des PHT, secours inter-PHT, etc.) ;
- *la coopération technique* : métro de Rio, Téhéran, Athènes, etc.

\*  
\* \*

Pour qu'elle puisse répondre à ces différents besoins et s'adapter à divers réseaux, il importe que la procédure mise en œuvre présente *le maximum de souplesse*. Cela explique, d'une part, qu'à chaque niveau de la résolution, *différentes options* soient offertes à l'utilisateur afin qu'il *définisse ses choix en fonction de la spécificité du problème posé* et que, d'autre part, pour un problème particulier, *plusieurs solutions* lui soient fournies lui permettant de fixer la hiérarchie à accorder aux différents critères : coût des liaisons, stabilité du réseau, équilibre des puissances résiduelles, etc.

Sur le plan informatique, la souplesse d'utilisation est assurée par la mise au point *d'un système conversationnel*, exploité en temps partagé, l'opérateur pouvant intervenir, à tout niveau, pour orienter la procédure de résolution (cf. *schéma 2*).

### III. ANALYSE DU PROBLÈME

Le problème consiste donc à *affecter les PR aux sources en minimisant le coût des liaisons*, tout en respectant les diverses contraintes de puissance et en assurant une bonne stabilité au réseau électrique.

#### III.1. Construction d'une fonction économique

*La minimisation du coût des liaisons PR/PHT s'impose, à l'évidence, comme fonction économique*. En effet, en 1977, le coût moyen du kilomètre de fouille est de l'ordre de 400 000 F ; celui du kilomètre de câble de 100 000 F. Des économies substantielles peuvent donc être obtenues par une optimisation du réseau de câblage.

Toutefois, pour le métro parisien, l'évaluation de ces coûts n'est pas simple. Le tracé d'une liaison ne correspond pas, en effet, à l'itinéraire le plus court, car l'état du sous-sol, la réglementation des travaux, etc., imposent diverses contraintes. Une évaluation rigoureuse exigerait donc le calcul des itinéraires de coût minimal pour tous les couples PR – PHT. Aussi, pour ne pas trop s'écarter des objectifs de simplicité de la procédure, a-t-on admis

*d'évaluer les coûts par les distances à vol d'oiseau*, multipliées par un coût moyen au mètre à vol d'oiseau. Cette fonction est assez représentative du coût global des liaisons et permet d'obtenir, pour le moyen et long terme, des solutions proches de la solution optimale. Elle correspond d'ailleurs aux estimations qui sont faites aujourd'hui en l'absence de procédure automatique.

Un autre problème d'envergure est posé, dans le cas d'un réseau existant, par *la réutilisation des câbles*. Naturellement, maintenir une affectation à une source rend nul le coût de cette liaison et il est aisé d'en tenir compte. Mais, un câble libéré peut être utilisé de diverses façons ; il en résulte alors certains coûts conditionnels difficiles à intégrer dans un problème déjà si combinatoire.

Pour apporter une solution simple à ce problème, il a paru intéressant de donner à l'utilisateur la possibilité d'introduire une forme « non conditionnelle » de réemploi des câbles, et cela *de manière conversationnelle*.

### III.2. Les contraintes

Le problème comporte trois types de contraintes : les contraintes d'affectation, de puissance et de stabilité.

#### 1) *Affectation*

Un PR doit être relié à une source et à une seule.

#### 2) *Puissance*

La somme des puissances appelées sur chaque source est inférieure à la puissance disponible. Cette dernière est plus faible que la puissance nominale, en raison des consommations annexes d'éclairage, ateliers, etc.

#### 3) *Stabilité*

La « stabilité » du réseau est son aptitude à faire face à la défaillance d'une ou plusieurs stations électriques. Pour assurer cette stabilité, plusieurs règles peuvent être recherchées, dont il convient d'apprécier l'efficacité et le coût.

Par exemple, pour pallier la défaillance d'une source, *la règle de panachage des sources d'ordre 3 (RPS3)*, est actuellement imposée :

(RPS3) : Dans tout groupe de trois PR consécutifs d'une ligne, il n'y en a pas deux branchés à la même source.

Une autre règle — dite *règle d'alternance des PHT (RPA)* — pourrait être imposée :

(RAP) : Deux PR consécutifs d'une ligne ne doivent pas être branchés au même PHT.

L'application stricte de cette règle est très coûteuse. Aussi, du fait des sommes mises en jeu, on y tolère *un certain nombre d'infractions*, variable selon les lignes.

Cet ensemble de contraintes est commun aux différents problèmes traités. D'autres, plus spécifiques à un problème particulier, ne sont pas décrites ici.

#### IV. MODÉLISATION

Le problème peut se formuler comme un *programme linéaire à variables bivalentes 0, 1*, dans lequel la variable  $x_{ij}$  est telle que :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le PR } i \text{ est affecté à la source } j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour la planification des travaux à l'horizon 1981, avec 140 PR et 12 sources, le nombre de variables est de 1 680, celui des contraintes de 1 520 (dont la plupart concerne la règle RPS3).

Cette formulation présente une difficulté : le nombre élevé des contraintes, élément qui influe fortement sur le temps de résolution des programmes linéaires. Pour lever cet obstacle, il est possible de prendre en compte *implicitement* une grande partie des contraintes, en construisant, au préalable, pour chaque ligne de métro, par l'intermédiaire d'un *générateur*, diverses *configurations* possibles.

##### IV.1. Générateur de configurations de lignes

Une *configuration-sources de ligne* consiste en l'affectation de tous les PR d'une ligne donnée aux diverses sources, en respectant les contraintes de stabilité. Seules donc, les contraintes de puissance, relatives à l'ensemble du réseau, ne sont pas introduites à ce niveau.

Le *générateur* envisage successivement toutes les lignes du réseau. Pour chacune d'elles, il recherche *toutes* les configurations admissibles et les *évalue*.

On imagine aisément que, dans ces conditions, le nombre de configurations engendré soit considérable et qu'il convienne de le maintenir à une grandeur acceptable en opérant certaines réductions.

###### a) Réduction par les coûts

L'utilisateur indique le nombre  $n$  de configurations qu'il souhaite conserver pour une ligne donnée et le générateur choisit les  $n$  « meilleures » d'entre elles.

###### b) Autre mode de réduction

Engendrer systématiquement, pour une ligne, toutes les *configurations-*

sources conduit à un grand nombre de configurations de même coût et de structure voisine. Aussi, pour limiter la taille du générateur et accélérer la procédure du calcul, a-t-on admis, compte tenu de la faiblesse relative des coûts de branchement par rapport aux coûts de câblage, de décomposer le problème en deux phases :

- affectation des PR aux PHT ;
- à partir des résultats obtenus, désignation précise des sources, pour chaque liaison.

Pour chaque ligne du réseau, on peut ainsi engendrer un certain nombre de « configurations-PHT ». On obtient alors une *solution globale* au problème posé en choisissant une configuration par ligne de sorte que la somme des puissances consommées sur les divers PHT par les configurations retenues soit inférieure aux puissances disponibles pour la traction. Une telle solution est dite « *configuration de réseau* ».

#### IV.2. Formulation mathématique

Le problème se formule encore comme un *programme linéaire à variables bivalentes*. Cependant, dans un tel programme,  $x_k$  est la variable caractéristique de la  $k$ -ième « configuration-PHT », valant 1 si elle est retenue, 0 sinon.

Appelons :

- $J$  : l'ensemble des PHT ;
- $b_j$  : la puissance disponible pour la traction au  $j$ -ième PHT ;
- $K$  : l'ensemble des configurations-PHT ;
- $L$  : l'ensemble des lignes du réseau ;
- $K(l) \subset K$  : le sous-ensemble des configurations-PHT de la ligne  $l$  ;
- $a_{kj}$  : la puissance appelée par le  $k$ -ième configuration sur le  $j$ -ième PHT ;
- $c_k$  : le coût de la  $k$ -ième configuration ;
- $x_k$  : la variable valant 1 si la  $k$ -ième configuration est retenue, 0 sinon.

Le problème est alors formulé de la manière suivante :

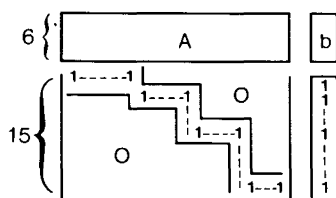
$$(P) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Minimiser } Z = \sum_{k \in K} c_k x_k \\ \text{Sous les contraintes :} \\ (1) \quad \sum_{k \in K} a_{kj} x_k \leq b_j \quad j \in J \\ (2) \quad \sum_{k \in K(l)} x_k = 1, \quad l \in L \\ (3) \quad x_k = 0 \text{ ou } 1 \quad k \in K \end{array} \right.$$

Les contraintes (1) exigent que les puissances disponibles ne soient pas dépassées.

Les contraintes (2) imposent qu'une configuration, et une seule, soit retenue par ligne.

Les contraintes (3) imposent à la solution obtenue d'être entière.

Pour le même exemple de planification des travaux à l'horizon 1981, le nombre des variables est un *paramètre* dont l'utilisateur peut déterminer la valeur et le nombre de contraintes est 21 (15 lignes et 6 PHT). La structure de la matrice est la suivante :



## V. RÉOLUTION

En raison, d'une part, des exigences de souplesse formulées à l'égard de la procédure PROMÉTHÉE et, d'autre part, des nombreux travaux déjà réalisés à la R. A. T. P. dans le domaine de la programmation en nombres entiers ((4), (5), (6)), il a paru souhaitable de mettre au point des programmes spécifiques pour la résolution de ce problème.

Il n'est pas douteux que l'utilisation de programmes généraux, établis par les constructeurs, soit parfois utile. Mais, outre un coût sensiblement plus élevé, elle impose certaines *contraintes d'utilisation et diverses dépendances* qu'il peut être bon d'éviter, surtout s'agissant de l'élaboration d'un outil destiné à un emploi fréquent et varié.

### V.1. Programmation linéaire et procédure arborescente (PL. ARBO) (1)

L'utilisation jumelée d'un programme linéaire et d'une procédure arborescente a donné des résultats intéressants dans les problèmes de partitionnement, rencontrés à l'occasion de l'habillage automatique des horaires du réseau routier ((5), (6)).

L'objectif est d'exploiter au mieux les résultats de la solution optimale continue du programme (*P*). D'abord, les *coûts marginaux* de la dernière



itération du programme linéaire permettent d'élaborer une *fonction d'évaluation* qui présente les particularités suivantes :

- elle tient compte des contraintes ;
- elle permet de calculer, à chaque niveau  $i$  de l'arborescence, une borne inférieure satisfaisante du coût d'une solution complète qui comporterait, jusqu'au niveau  $i$  inclus, les configurations choisies ;
- elle permet d'extraire du générateur un sous-ensemble restreint de configurations comportant de bonnes solutions.

De plus, certaines variables arbitrées à 1 peuvent, éventuellement, être *initialisées* dans l'arborescence. Les valeurs prises par les variables à l'optimum continu permettent d'établir un ordre de saturation des lignes du réseau.

Chaque niveau de l'arborescence correspond ainsi à une ligne de métro pour laquelle on doit choisir une configuration. Ce choix est soumis à plusieurs conditions :

- ne pas amener la fonction d'évaluation à prendre une valeur supérieure à une borne calculée ;
- respecter les contraintes de puissance.

Il s'agit donc d'une exploration de type PSES (\*). Toutefois, à la suite d'une première série d'expériences, la méthode, ne permettant pas de mettre en évidence dans tous les cas une solution réalisable, a paru peu adaptée à ce problème. Comme nous le verrons plus loin, ce jugement a été quelque peu révisé par la suite.

## V.2. Méthode de relaxation

Dans la résolution du problème ( $P$ ) par une méthode arborescente, la difficulté principale tient à la stricte prise en compte des contraintes de puissance. En effet, si ces contraintes n'existaient pas, la solution optimale du problème serait donnée par le choix, pour chaque ligne de métro, de la configuration de coût minimal.

Cette remarque nous a conduit à étudier plus précisément *les méthodes de relaxation*. Elles consistent, en effet, à substituer à la résolution d'un programme mathématique complexe, la résolution, plus simple, du dual d'un autre problème. Pour qu'une telle procédure soit efficace, il faut cependant que le programme initial, dans lequel certaines contraintes sont omises (relaxées), soit facile à résoudre. Nous avons vu que, si l'on supprimait les contraintes de puissance, tel était le cas pour notre problème.

---

(\*) Procédure par Séparation et Évaluation Séquentielles.

En outre, un argument supplémentaire milite en faveur du choix d'une méthode de relaxation : les valeurs des puissances disponibles ne sont connues qu'à quelques kilowatts près. Les contraintes correspondantes peuvent donc être l'objet de *quelques violations limitées*. Or, comme la résolution s'effectue dans le dual, il est possible d'obtenir des solutions qui, sans être strictement primales-admissibles, soient néanmoins acceptables et apportent même des améliorations sensibles de la fonction économique.

Analysons, de manière plus précise, comment on peut obtenir de bonnes solutions du programme (P) par une méthode de relaxation des contraintes de puissance.

V.2.1. Analyse

Soit ( $\tilde{P}$ ) le programme linéaire continu associé à (P).

Les contraintes du programme (P) peuvent s'écrire ainsi :

- (I) Contraintes de puissance :  $Ax \leq b$  ;
- (II) Couverture des lignes et intégrité de  $x$  :  $x \in X$  ;
- (II)' Couverture des lignes et vecteur  $x \geq 0$  :  $x \in \tilde{X}$ .

Les problèmes (P) et ( $\tilde{P}$ ) se formulent alors :

$$(P) \begin{cases} \min z = cx \\ Ax \leq b & \text{(I)} \\ x \in X & \text{(II)} \end{cases} \quad (\tilde{P}) \begin{cases} \min z = cx \\ Ax \leq b & \text{(I)} \\ x \in \tilde{X} & \text{(II)'} \end{cases}$$

En associant à chaque contrainte  $j$  de (I) le multiplicateur de Lagrange  $\pi_j$ , on définit alors la fonction de Lagrange qu'il convient de maximiser :

$$L(\pi, x) = -\pi b + (c + \pi A) \cdot x \quad x \in \tilde{X}$$

Soit :

$$\begin{aligned} L(\pi) &= \text{Min}_{x \in \tilde{X}} L(\pi, x) \\ L(\pi) &= \text{Max}_{\pi \in \mathbb{R}^{|J|+}} L(\pi) \end{aligned} \quad (S)$$

Alors  $\pi^*$  est la *solution optimale du programme dual de ( $\tilde{P}$ )*.

Soit  $z^*$  l'optimum de (P). Comme  $L(\pi^*)$  est la solution optimale du dual de ( $\tilde{P}$ ), on a seulement :

$$L(\pi^*) \leq z^* .$$

REMARQUE 1 : Dans notre problème, on l'a vu, quel que soit le vecteur coût  $d$ , il est facile de calculer la solution  $x^*$  du programme suivant :

$$(R) \begin{cases} \text{Min } dx \\ x \in X \end{cases}$$

Il suffit, en effet, pour chaque ligne de métro, de choisir la configuration de valeur minimale selon la fonction  $d$ .

REMARQUE 2 : 
$$\text{Min}_{x \in X} dx = \text{Min}_{x \in \bar{X}} dx$$

car, dans  $(R)$ , il n'est pas nécessaire de postuler l'intégrité des variables, elle est acquise de fait.

En conclusion, compte tenu de ces deux remarques, il est facile de calculer la quantité :

$$L(\pi) = -\pi \cdot b + \text{Min}_{x \in X} (c + \pi \cdot A) \cdot x$$

### V.2.2. Intérêt du programme dual

L'intérêt du programme dual est double :

- il est plus facile à résoudre ;
- sa résolution donne *généralement* comme résultats intermédiaires des solutions admissibles ou quasi-admissibles de  $(P)$ , souvent proches de l'optimum et parfois optimales.

Le multiplicateur de Lagrange  $\pi_j$  peut être considéré *comme une pénalité associée à la consommation d'une unité de puissance* sur le  $j$ -ème PHT. Ainsi, pour une solution  $x$  donnée, l'expression  $(c + \pi \cdot A)x$  est la somme du coût  $cx$  de cette solution et d'une pénalité  $\pi \cdot (Ax)$ . Cette dernière est induite par le vecteur  $\pi$  et par les puissances consommées sur les divers PHT par la solution  $x$ .

### V.2.3. Procédure

La procédure adaptée ici consiste à résoudre le dual de  $(\tilde{P})$  pour obtenir une borne inférieure de  $z^*$ . Au cours des calculs, apparaissent des solutions primales-admissibles (ou quasi primales-admissibles) et entières. Il suffit de retenir la plus petite d'entre elles comme borne supérieure de  $z^*$ . La méthode permet donc de trouver :

- une bonne solution ;
- un encadrement de  $z^*$ .

Dans (8), Minoux démontre que la résolution du programme dual  $(S)$  se ramène à l'optimisation d'une fonction concave non différentiable. Il étudie diverses méthodes approchées (extension des méthodes de sous-gradients classiques), ou exactes (apparentées au principe de décomposition de Dantzig et Wolfe en programmation linéaire).

Toutes travaillent selon l'algorithme général suivant, qui consiste en un ajustement successif du vecteur  $\pi$ .

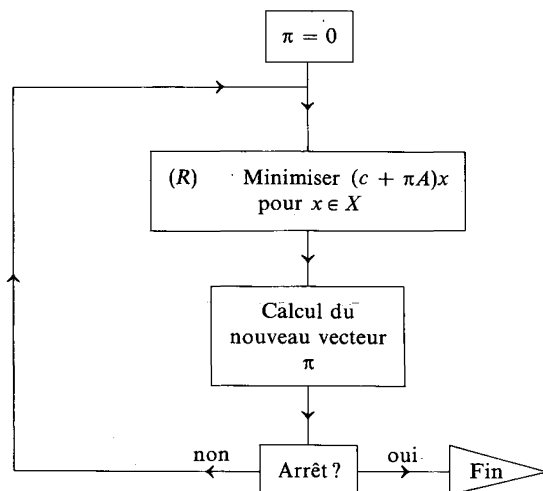
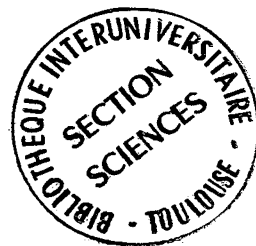


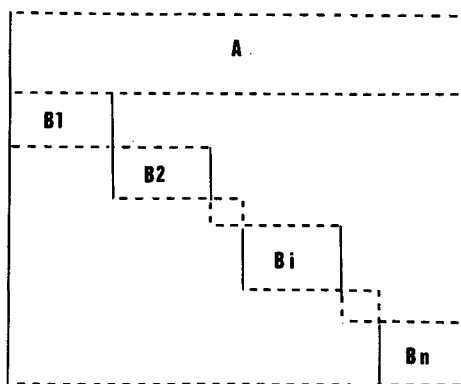
Schéma 1

Ces méthodes se distinguent par le mode de calcul du vecteur  $\pi$ .

La procédure, finalement retenue, combine une *décomposition* — de même nature que celle proposée par Dantzig et Wolfe — et, pour la phase d'initialisation, une *méthode de sous-gradient*.

a) *Méthode de décomposition*

Minoux a perçu la ressemblance entre la formulation, dans l'algorithme ci-dessus, du calcul d'un nouveau vecteur  $\pi$  et celle du programme maître utilisé par Dantzig et Wolfe pour la résolution des programmes linéaires continus présentant la forme suivante par décomposition :



C'est précisément la forme de la matrice de notre problème.

Rappelons que la formulation du programme « maître », correspondant à  $(\bar{P})$  dans la méthode de décomposition de Dantzig et Wolfe (cf. (7), p. 149), est :

$$(Q) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min } \sum_{h \in H} cx^h \cdot \lambda_h \\ \text{Sous les contraintes :} \\ \sum_{h \in H} Ax^h \lambda_h \leq b \\ \sum_{h \in H} h = 1 \\ \lambda_h \geq 0 \end{array} \right.$$

où  $x^h$  est une solution extrême de  $R$  et  $H$  l'ensemble des solutions considérées à cette phase du calcul.

$(\bar{Q})$ , avec  $H = X$ , est aussi la formulation du programme dual associé à  $(S)$ .

Les vecteurs  $\pi$  successifs sont calculés de la manière suivante : soit  $x$  la solution du programme  $(R)$  associé à un vecteur  $\pi$  donné.  $Ax$  est donc le vecteur des puissances consommées par la solution  $x$  sur les divers PHT. La colonne :

$$\begin{pmatrix} Ax \\ 1 \end{pmatrix}$$

est alors introduite dans la matrice du programme maître (d'où le nom de « génération de colonnes ») et ce dernier est ensuite résolu. La solution optimale duale de ce programme devient le nouveau vecteur  $\pi$ .

Cette méthode garantit l'obtention de  $\pi^*$ . De plus, et contrairement aux méthodes de sous-gradients, on ne rencontre pas deux fois la même solution entière de  $(P)$ . Cela permet une exploitation plus systématique de l'ensemble des solutions admissibles.

#### b) Méthode de sous-gradient

La phase de génération de colonnes ne peut cependant débiter qu'après la constitution du premier programme maître. A cette fin, Minoux propose d'initialiser la procédure par quelques itérations de méthodes de sous-gradients. Ces dernières permettent de calculer des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} Ax \\ 1 \end{pmatrix}$$

qui constituent le premier programme maître. Dans notre cas, le programme maître comporte 7 lignes au plus, 30 colonnes principales et l'optimum est atteint en moins de 20 pivotages.

Pour calculer le vecteur  $\pi$  selon une méthode de sous-gradients, on peut distinguer deux versions :

— *la version classique*, proposée par Held, Wolfe et Crowder (2). Il s'agit d'une procédure approchée, qui ne garantit pas l'obtention du vecteur  $\pi$  optimal, noté  $\pi^*$ .

Les vecteurs  $\pi$  successifs sont calculés de la manière suivante. Soit  $x$  la solution du programme (R) associé à un vecteur  $\pi$  donné. Le nouveau vecteur  $\pi$  est alors calculé en ajoutant à son ancienne valeur une fonction croissante du vecteur  $Ax - b$ . Si, dans la solution  $\bar{x}$ , le  $i$ -ième PHT est non saturé, la  $i$ -ième composante du vecteur  $Ax - b$  est négative et la pénalité  $\pi_i$  sera diminuée. Inversement, si la puissance consommée par  $x$  sur le  $i$ -ième PHT excède la puissance disponible, alors la  $i$ -ième composante de  $Ax - b$  est positive et la pénalité  $\pi_i$  sera augmentée.

— *la version italienne* : une variante dans le calcul des vecteurs  $\pi$  a été proposée par Camerini, Fratta et Maffioli (3). Elle est présentée par ses auteurs comme une amélioration de la version classique.

#### 4.2.4. Mise en œuvre de la procédure D. W.

La résolution par la méthode des sous-gradients (S. G.) a donc été introduite comme phase initiale de la procédure de décomposition (D. W.).

##### a) Paramètres

L'initialisation est importante : il s'agit d'une *procédure heuristique* pour laquelle il convient de *bien choisir* certains paramètres. De plus, dans la phase de génération de colonnes, ces paramètres influent sur le déroulement de la procédure : nombre de colonnes simultanément introduites, etc.

L'ensemble de ces paramètres dépend de la nature du problème ; *il n'existe pas de « bons paramètres a priori »*. Il a donc été nécessaire de les calibrer. Il semble qu'ils soient sensibles à la nature même de la fonction économique.

##### b) Recherche de solutions réalisables

*L'obtention du vecteur  $\pi$  optimal ne garantit pas la mise en évidence de solutions réalisables*. En outre, il est possible et fréquent de trouver plusieurs vecteurs  $x$  qui optimisent le programme (R) (cf. *schéma 1*). Aussi, afin d'obtenir plus facilement des solutions réalisables, *un certain nombre d'heuristiques* ont été introduites. Sept critères ont été testés simultanément. Finalement, quatre ont été jugés pertinents. De plus, dans certaines phases de la procédure, *une recherche arborescente*, très simple, est utilisée afin de mettre en évidence une solution réalisable qui optimise (R).

c) *Contraintes de puissance*

Comme nous l'avons signalé plus haut, *les contraintes de puissance ne sont pas impératives*. Aussi, nous avons admis des solutions quasi-réalisables, la *marge d'irréalabilité* (éventuellement nulle) étant un *paramètre déterminé par l'utilisateur* en fonction du problème.

V.2.5. *Expérimentation*

Le tableau suivant fournit diverses indications sur le comportement de la procédure mise en œuvre :

Problème n°	Optimum continu	Meilleure solution par sous-gradients	Meilleure solution par génération de colonnes
1	2 233.6	—	2 160 (*)
2	2 323.3	—	2 308 (*)
3	2 327.8	—	2 350
4	8 269.3	8 277	8 270 (*)
5	8 549.8	8 573	8 555
6	9 749.3	9 819	9 752 (*, .)
— pas de solution réalisable (ou quasi-réalisable) obtenue ; * solution quasi-réalisable ; . il existe de plus une solution réalisable à 9 756.			

La première remarque concerne la fiabilité insuffisante de la phase de relaxation. D'une manière générale, cette phase ne permet pas d'exhiber des solutions réalisables satisfaisantes du point de vue coût, sauf lorsque les contraintes de puissance sont « peu contraignantes ».

La seconde remarque souligne que le fait d'accepter des solutions quasi-réalisables permet d'exhiber davantage de solutions et parfois d'améliorer la fonction économique. Ainsi, pour les problèmes 1 et 2, on obtient une solution meilleure que l'optimum continu.

V.3. **Amélioration de la procédure PL. ARBO**

Les travaux exécutés pour la mise au point de la procédure précédente ont permis d'améliorer, de diverses manières, la première méthode envisagée (P. L.-ARBO). En effet, d'une part, il est possible d'admettre une marge d'irréalabilité sur les contraintes de puissance; d'autre part, on ne recherche pas systématiquement la solution optimale mais plutôt un ensemble de bonnes solutions; enfin, il est possible de réduire le nombre de configurations retenues dans l'exploration arborescente.

Ces améliorations, apportées à la procédure P. L.-ARBO, permettent de disposer de deux procédures fiables pour l'affectation des PR aux PHT. La seconde est généralement préférée en raison de sa souplesse et des facilités d'utilisation qu'elle permet.

#### V.4. Affectation des PR aux sources

L'affectation des PR aux PHT étant réalisée, il convient de préciser à *quelles sources* les différents PR sont branchés. Un tel problème est susceptible de traitements mathématiques complexes. Cependant, nous avons assez vite opté pour une *procédure heuristique*.

#### V.5. Programmation des travaux

Il s'agit là de l'amorce d'un programme visant à *définir les dates de modification du réseau initial*. En première analyse, un tel programme doit tenir compte des perturbations relativement aux règles de panachage que crée l'insertion d'un nouveau PR sur une ligne, s'assurer qu'aux différentes dates considérées les contraintes de puissance sont vérifiées et, enfin, basculer les PR sur les nouvelles sources le plus tôt possible de manière à alléger les autres sources. Actuellement, seules les deux dernières fonctions sont assurées par un programme rudimentaire (RELICA).

#### V.6. Traitement informatique

##### V.6.1. Organisation du système

Ainsi, le problème est résolu à l'aide de quatre programmes :

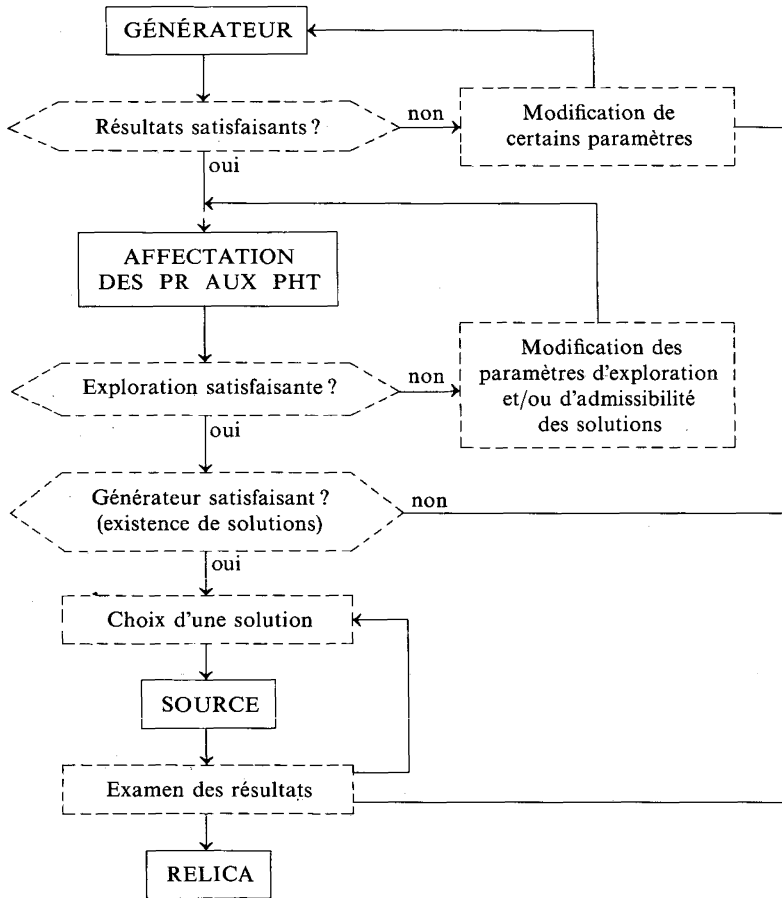
- un générateur de configurations-PHT de lignes (GÉNÉRATEUR);
- une procédure mathématique de construction d'une configuration de réseau « optimale » (P. L.-ARBO ou D. W.);
- une procédure heuristique d'affectation des PR aux sources, une fois connue l'affectation PR-PHT calculée par le module précédent (SOURCE);
- enfin, l'amorce d'une programmation des travaux (RELICA).

L'ensemble du modèle a été programmé en FORTRAN IV et est exploité sur un terminal de temps partagé relié à un I. B. M. 370.158. Les programmes qui le composent sont de taille moyenne. En effet, le nombre d'instructions est environ de 500 pour le générateur, 900 pour D. W. et 400 pour SOURCE. De plus, la place maximale requise en mémoire centrale est de 120 K octets. Enfin, si le coût de l'exécution du générateur est pris comme référence, alors celui de D. W. est au plus de 1,5 et celui de SOURCE de 0,5. Il s'agit donc d'une *procédure peu coûteuse*.



Le schéma 2 illustre le système de résolution.

PROCEDURE PROMETHEE



: intervention de l'opérateur.

Schéma 2

## VI. RÉSULTATS

Les résultats obtenus pour divers problèmes laissent espérer des gains supérieurs à 30 %. Ces gains sont bien sûr relatifs à la fonction économique retenue et non pas aux coûts réels des liaisons, qui devront être estimés plus précisément par les réalisateurs.

S'agissant de comparer les travaux de câblage entre avril et décembre 1977, période durant laquelle divers événements étaient attendus (fermetures et ouverture de sources), les résultats obtenus sont présentés sur le tableau suivant. Il s'agit d'un problème pour lequel les décisions avaient déjà été prises et certains travaux déjà engagés.

Solution	Distance à vol d'oiseau (en mètres)	Nombre de changements de sources	Nombre de changements de PHT	NSUCCT	ECART
S 1	33 361	1	15	8	0 %
S 2	23 841	2	10	7	- 28,6 %
S 3	23 390	2	12	7	- 29,9 %
S 4	21 450	3	8	6	- 35,8 %
S 5	25 658	2	26	7	- 23,1 %

NSUCCT = nombre total d'infractions admises à la règle RAP dans la solution.  
 ECART = variation des coûts par rapport à la solution manuelle.

La solution S 1 est la solution manuelle. S 2 et S 3 sont deux solutions obtenues par D. W. S 4 correspond à une préoccupation à la fois mathématique et pratique. Du point de vue mathématique, on ne résout pas par D. W. le programme linéaire en *nombres entiers* ( $P$ ), mais bien le *dual* du programme linéaire *continu* associé à ( $P$ ). De ce fait, la recherche d'une solution duale optimale ne garantit pas l'obtention de l'optimum de ( $P$ ).

Il nous a semblé intéressant de contraindre davantage ( $P$ ) en limitant les puissances disponibles pour la traction d'une part, et d'augmenter la tolérance d'irréalisabilité dans D. W. d'autre part. Ainsi, le dual est perturbé sans supprimer de solutions admissibles du primal. Cela a permis de mettre en évidence la solution S 4, meilleure que S 3. Du point de vue pratique, cet essai traduit le fait qu'un utilisateur averti peut parfois améliorer les résultats de D. W.

Enfin, lors de l'examen des résultats, il a été demandé que la répartition des puissances résiduelles sur les divers PHT soit proche de celle réalisée dans la solution manuelle. Un nouvel essai a été effectué; il a permis d'exhiber onze solutions parmi lesquelles S 5 occupait le troisième rang par ordre de coûts croissants : elle a été retenue en raison de la répartition des puissances et de son coût.

A la suite de cette première étude, la procédure PROMÉTHÉE a été utilisée, à diverses reprises, de manière opérationnelle.

## VII. CONCLUSION

Il semble, après quelques mois d'expérimentation, que *la modélisation et les méthodes de résolution* soient maintenant *bien adaptées au problème*. Une procédure *fiable* est donc aujourd'hui disponible pour traiter diverses études relatives à la distribution de l'énergie sur un réseau ferré.

Si la procédure PROMÉTHÉE avait pour objectif initial la planification proprement dite des travaux à effectuer sur le réseau électrique du métro parisien, elle tend maintenant à être utilisée aussi à *des fins d'études* (étude de stabilité du réseau, définition des règles d'alternance, effet de la fermeture/ouverture d'un PHT, etc.) et, même, dans le cadre de la coopération technique, se prête volontiers à la résolution des problèmes liés à la distribution de l'énergie *des métros étrangers* (Rio, par exemple).

Pour chaque étude particulière, une *analyse préliminaire* doit cependant être faite avec les services utilisateurs pour définir avec précision les différents *tests* à effectuer et la *stratégie d'utilisation* du système informatique. En effet, à chaque fois, compte tenu des objectifs précis de l'étude et de la nature du problème, il convient d'adapter non seulement la fonction économique et divers paramètres, mais aussi, le cas échéant, de modifier certaines parties du générateur de configurations.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Ph. BERTHOUX, *Affectation optimale des postes redresseurs alimentant le réseau ferré de la R.A.T.P.* Rapport de stage, 1975.
2. M. HELD, P. WOLFE et H. CROWDER, Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, vol. 6, 1974, n° 1.
3. P. M. CAMERINI, L. FRATTA et F. MAFFIOLI, On improving relaxation methods by modified gradient techniques. *Mathematical Programming Study* 3, November 1975.
4. J. DELORME, *Contribution à la résolution du problème de recouvrement : méthodes de troncature*. Thèse de docteur-ingénieur, Université de Paris VI, juin 1974.
5. J. DELORME and E. HEURGON, *Set covering problems by linear programming with equality constraints*, VIII<sup>e</sup> Symposium de programmation mathématique, Stanford, août 1973.
6. J. DELORME et E. HEURGON, Problèmes de partitionnement : exploration arborescente ou méthode de troncatures ?, *R.A.I.R.O.*, vol. 2, p. 53 à 65.
7. L. S. LASDON, Optimization theory for large systems. *Macmillan Series for Operations Research*, 1970.
8. J.-P. LEGENDRE et M. MINOUX, Modèle de sélection et affectation optimales d'une flotte d'avions : Neptune. *R.A.I.R.O.*, 1977.
9. G. SITRUK et Ph. BERTHOUX, *Affectation optimale des postes redresseurs alimentant le réseau métropolitain de la Régie Autonome des Transports parisiens; EURO II*, North-Holland, 1976.