Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

J. L. Forcina

Une approche simple de certains problèmes de localisation, de distribution et de transport

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 8, nº V2 (1974), p. 39-50

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1974__8_2_39_0>

R.A.I.R.O.
(8e année, mai 1974, V-2, p. 39 à 50)

UNE APPROCHE SIMPLE DE CERTAINS PROBLEMES DE LOCALISATION, DE DISTRIBUTION ET DE TRANSPORT

par J. L. FORCINA (1)

Résumé. — *Des méthodes analytiques élémentaires permettant une approche simple de nombreux problèmes de localisation, de distribution et de transport sont présentées ici. Ceux-ci, principalement quand ils s'appliquent à des services publics urbains (protection civile, lutte contre le feu, transport de voyageurs, ...), nécessitent la détermination d'un grand nombre de paramètres qui peuvent être représentés comme un ensemble de points dans un espace de faible dimension. Dans beaucoup de cas, la fonction objectif n'est pas très sensible à la localisation exacte de ces points. Il suffit donc de modifier la formulation du problème en recherchant la densité approchée de la collection de points optimale. Trois problèmes sont examinés :*

— *politique de service sur une ligne de transport en commun,*
— *localisation de points de service dans une zone urbaine dense,*
— *implantation des stations le long d'une ligne de transport.*

1. INTRODUCTION

La littérature (particulièrement, anglo-saxonne) a exposé de nombreuses solutions des problèmes de localisation, de distribution et de transport. Ces solutions s'appliquent en particulier à de nombreux services publics urbains tels que lutte contre le feu, ramassage des ordures ménagères, protection civile, organisation des patrouilles de police, planification et gestion d'un système de transport de voyageurs, etc... Indépendamment d'une masse de données considérable, ces problèmes sont mathématiquement très complexes (sur ce point, on peut se reporter utilement à Larson [4] ou à Larson et Chaiken [5]). Des méthodes heuristiques sont fréquemment employées; comme préalable à des études de simulation où à des utilisations de la programmation en nombres entiers, les problèmes sont souvent « discrétisés » (par

(1) Université de Californie, Berkeley.

exemple, le découpage de l'aire urbaine étudiée en zones, chaque zone étant représentée par un centroïde, est une pratique courante des études de transport public de voyageurs; la sélection a priori d'un ensemble fini de solutions, dont on recherchera ensuite le meilleur élément, n'est pas inhabituelle dans les problèmes de localisation).

Il est connu que de tels procédés présentent en général des inconvénients tels que : difficulté de « comprendre qualitativement » le problème soulevé (sauf à procéder à des études sur une plage étendue de variation des paramètres), difficulté de remettre en cause la « discrétisation » initiale (ou la solution de départ, ...) et d'apprécier son effet sur la solution finalement proposée. Par ailleurs, il est commun d'observer des optimums très plats dans de nombreux problèmes du type considéré. En général, il s'agit de minimiser une fonction dépendant d'un grand nombre de variables (exemples : temps d'accès moyen, temps de réponse moyen, coût social total, ...); chacune de ces variables peut être représentée par un point dans un espace de petite dimension (temps, espace physique à une ou deux dimensions); nous allons essayer de déterminer approximativement la *densité* des points solutions en utilisant *explicitement* le fait que l'optimum est peu sensible à leur localisation précise.

Pratiquement, le choix des « meilleures » valeurs des variables (parmi celles qui donnent approximativement la même densité) dépend aussi de considérations et de contraintes (coût du projet, financement, mesures sociales, ...) qu'il serait artificiel de formuler mathématiquement. Par conséquent, trouver un ensemble de solutions approchées peut paraître plus utile que d'obtenir la solution exacte.

Trois problèmes sont traités : politique d'emploi de véhicules de transport en commun, localisation de points de service dans une zone urbaine dense, implantation des stations d'une ligne de transport public. L'objectif est dans chaque cas de minimiser le coût social global de l'opération (coûts supportés par les usagers et coût du service offert).

2. GESTION DES VEHICULES SUR UNE LIGNE DE TRANSPORT EN COMMUN

2.1. Le problème

Nous considérons un cas idéalisé inspiré par [6] pour commencer. Une seule ligne de transport relie deux points, sans arrêt intermédiaire. Les passagers arrivent à raison de $a(t)$ par unité de temps à l'instant t en un de ces points. On dispose de n véhicules à l'instant origine, alors qu'aucun passager n'est en position d'attente. Il s'agit de déterminer les instants $\{ t_i \}$ auxquels un véhicule part de cette station de façon à minimiser l'attente totale des passagers

— ou, si l'on veut, l'attente moyenne, puisque le taux d'arrivée $a(t)$ est une donnée. Pour rendre le problème tout à fait élémentaire, on supposera que la capacité des véhicules est telle qu'elle ne constitue pas une contrainte et on se bornera à minimiser le temps d'attente sur une période $[0, T]$ telle que les véhicules ne puissent revenir au point de départ pour être utilisés à nouveau avant T.

Soit $A(t)$ le nombre cumulatif de passagers arrivés avant t. Notre problème étant du type « programmation dynamique » (à tout instant, les seules informations utiles sont le temps de départ du véhicule précédent et le nombre de véhicules restant disponibles) il est naturel de s'intéresser à la relation de récurrence qui lie trois temps de départ successifs. On supposera que $a(t)$ ne varie pas trop brutalement ce qui permet d'utiliser le calcul différentiel suivant : pour t_{p+1} et t_{p-1} donnés, on retarde le départ du $p^{\text{ième}}$ véhicule de $\mathrm{d}t_p$. L'attente supplémentaire supportée par les passagers de celui-ci, en nombre $A(t_p) - A(t_{p-1})$ est donc :

$$(A(t_p) - A(t_{p-1}))\mathrm{d}t_p.$$

Par contre les passagers qui arrivent entre t_p et $t_p + \mathrm{d}t_p$ pourront monter sur le $p^{\text{ième}}$ véhicule, d'où un gain :

$$a(t_p)\mathrm{d}t_p(t_{p+1} - t_p).$$

Une condition nécessaire d'optimalité est que :

$$A(t_p) - A(t_{p-1}) = (t_{p+1} - t_p)a(t_p). \tag{1}$$

Le problème peut maintenant être résolu en choisissant t_1 pour obtenir grâce à (1) $t_2 (t_0 = 0)$, t_3, ..., t_n. D'où une fonction $t_n(t_1)$. La solution est obtenue dès qu'on a découvert la valeur de t_1 telle que $t_n = T$. Supposons cependant que (c'est le cas très souvent) $a(t)$ varie assez lentement pour être considéré comme constant sur chaque intervalle $[t_{p-1}, t_p]$.

Par définition,

$$A(t_p) - A(t_{p-1}) \simeq (t_p - t_{p-1})a(t_p) \tag{2}$$

D'où on déduit en rapprochant (1) de (2) que les deux intervalles successifs $(t_{p+1} - t_p)$ et $(t_p - t_{p-1})$ sont égaux, en première approximation, à l'optimum. Il semble donc intéressant de reformuler le problème de façon à obtenir directement les intervalles $f(t_p) = t_p - t_{p-1}$. Or la fonction objectif se formule très simplement à partir de la fonction d'intervalle $f(t)$: à l'instant t, les $a(t)$ passagers qui arrivent par unité de temps attendent en moyenne $f(t)/2$. L'attente totale W est donc :

$$W = \int_0^T \frac{1}{2} f(t)a(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

La fonction de service étant l'inverse de la fonction d'intervalle, la seule contrainte du problème est :

$$n = \int_0^T \mathrm{d}t/f(t) \tag{4}$$

Nous introduisons le multiplicateur de Lagrange λ pour minimiser (3), (4) étant respectée. Il suffit de minimiser, à tout instant t, l'expression :

$$\frac{1}{2}f(t)a(t) + \lambda/f(t).$$

On obtient facilement que la fonction d'intervalle à l'optimum est :

$$f(t) = \left(\frac{2\lambda}{a(t)}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

où λ est spécifié de façon à satisfaire (4). λ s'interprète comme le coût de service par véhicule. $W + \lambda n$ est le coût social total (coût de l'attente + coût d'utilisation des véhicules). De façon pratique, on aurait pu spécifier λ directement comme le coût de service d'un véhicule, exprimé en unité de temps d'attente, et trouver grâce à (4) le nombre de véhicules à utiliser.

2.2. Discussion

Le problème contient de nombreuses caractéristiques qui seront retrouvées dans les cas 3 et 4. Tout d'abord, la fonction objectif a été minimisée en recherchant l'optimum local (on a pu vérifier dans le calcul qui mène à (5) que ce procédé était bien légitime). En effet, en partant d'une expression qui, en fait, est la somme des coûts sur les n départs (le coût associé au $p^{\text{ième}}$ départ étant $\lambda + \frac{1}{2}\, a(t_p)f^2(t_p)$), nous minimisons le coût moyen par unité de temps

$$\frac{\lambda}{f(t)} + \frac{1}{2}a(t)f(t)$$

ou, si on veut, le coût moyen par passager, en divisant l'expression ci-dessus par $a(t)$. Ceci est fait indépendamment pour chaque intervalle, à ceci près que le choix de l'intervalle influence légèrement la valeur donnée à $a(t)$ sur les intervalles voisins. Enfin, il reste à déterminer les $\{ t_i \}$ à partir de la fonction $f(t)$. Divers procédés peuvent être utilisés à cette fin. Par exemple, on peut réintroduire l'aspect discret du problème — au moins en ce qui concerne les véhicules — en considérant la fonction $\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{f(u)}$, qui est le nombre cumulé de véhicules utilisés avant t; on fait partir un véhicule aux instants pour lesquels cette fonction vaut 1/2, 3/2, 5/2, ... n — 1/2. Cependant, le but de cet exercice n'est pas d'obtenir les valeurs exactes $\{ t_i \}$ mais des valeurs approchées : sauf aux bornes, choisies d'ailleurs de façon artificielle, des petites modifications des $\{ t_i \}$ n'affectent que très peu la fonction objectif. Dans des illustrations numériques, on a observé que l'optimum est toujours atteint à moins de 5 % près; ceci excède largement le degré de précision avec lequel n'importe quel modèle peut représenter la réalité.

2.3. Extensions possibles

Il est possible d'obtenir de nombreuses extensions du cas idéalisé discuté jusqu'ici. Nous procédons par ordre de difficulté croissante :

a) En premier lieu, il est commun de considérer que, en pratique, l'usager moyen attend plus que $\frac{1}{2} f(t)$. Ceci est dû en particulier aux difficultés de la circulation rencontrées par les véhicules sur la ligne. Il est immédiat de remplacer le coefficient $\frac{1}{2}$ par toute valeur jugée appropriée et de recommencer le même calcul. La fonction de service reste proportionnelle à la racine cassée du taux d'arrivée $a(t)$.

b) Une deuxième modification intéressante est de réintroduire explicitement la capacité des véhicules, c. Là encore, il est facile de trouver un algorithme du type « programmation dynamique » pour résoudre exactement le problème. Remarquons cependant qu'une solution approchée simple peut encore être proposée : l'expression « coût par unité de temps » est minimisée si à tout instant $f(t)$ vérifie :

$$a(t)f(t) = \text{Min}\,[c,[2\lambda a(t)]^{1/2}] \tag{6}$$

on exprime ainsi le fait que la fonction d'intervalle doit être telle que :

$$f(t)a(t) \leqslant c \tag{7}$$

Ainsi, utilisant (6), on voit que les véhicules seront utilisés pleins dès que $a(t)$, tiré de (5), est supérieure à $c^2/2\lambda$. Si $a(t) < c^2/2\lambda$, on retrouve le cas idéalisé de 2.1. Le nombre optimal de véhicules à utiliser peut encore être trouvé en combinant (6) et (4). Si par contre, n est donné, on trouve λ à partir de l'équation implicite :

$$nc = \int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

avec

$$h(t) = \text{Max}\,\{ a(t), Ka^{1/2}(t) \} \ , \tag{9}$$

où $$K = c/(2\lambda)^{1/2}$$

l'expression $\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de K.

Pour $K = 0$, elle vaut $A(t) - A(0)$ (le minimum de places nécessaires). Si $K > [\max a(t)]^{1/2}$, elle devient

$$K \int_0^T a^{1/2}(t)\, \mathrm{d}t$$

Dans ce cas, la contrainte (7) ne joue plus et aucun véhicule ne sera jamais complètement rempli. L'expression (8) peut également servir à évaluer diverses combinaisons possibles de n et de c : à toute valeur de λ, il est possible d'associer une valeur nc. Newell a discuté le cas rapporté ici et présenté une illustration (cf. [6], p. 103 et 104).

c) L'extension qui est de loin la plus importante (et la plus difficile) est le relâchement de la contrainte qui stipule que sur la période $(0, T)$ seuls les n véhicules sont utilisés. Ceci peut être associé à une extension du type b), permettant d'assurer qu'aucun véhicule ne sera complètement rempli (i.e. que tous les passagers prennent le premier véhicule qui se présente) sur un certain itinéraire (et non plus sur l'interstation unique du cas 2.1). Hurdle [3] a résolu ce problème sur une interstation unique. Hors pointe, alors que $a(t)$ reste peu élevé, la fonction de service reste proportionnelle à la racine carrée de $a(t)$; pendant certaines parties de la période de pointe, où $a(t)$ atteint son maximum, les véhicules sont renvoyés en service complètement remplis dès qu'ils sont de retour. La partie délicate consiste à relier ces parties de la période de pointe entre elles et avec la période hors pointe.

Or on peut prouver que les périodes de temps ci-dessus mentionnées peuvent être construites de telle façon que les politiques de service optimales sur chacune d'entre elles puissent y être déterminées indépendamment.

Ce résultat remarquable montre que la pratique coutante qui permet de déterminer les capacités d'un parc de véhicules en affectant les coûts de maintenance et l'amortissement à une période de pointe fixée a priori (par exemple de 17 h à 19 h ou telle que ce soit bien la période au cours de laquelle le maximum de véhicules est effectivement utilisé) peut n'être pas optimale.

3. LOCALISATION DE POINTS DE SERVICE DANS UNE ZONE URBAINE DENSE

Le cas évoqué ici est une version particulière du problème de localisation de dépôts où le sous-problème de la distribution physique des produits stockés (en particulier, constitution des tournées) est peu important, le service délivré (protection civile, lutte contre le feu,...) nécessitant en général un déplacement spécial pour chaque point de demande. Le réseau de transport est spécifié. Il faut localiser n dépôts (appelés ici « points de service ») de façon à minimiser le coût de transport total (ou moyen, puisque la demande est donnée). Le

« coût » de transport n'est pas nécessairement exprimé en unités monétaires et peut être une distance de trajet ou un temps de réponse.

La théorie économique de la localisation contient de nombreuses références à ce problème dans le cas où la densité des points de demande est uniforme. Newell [7] a rapporté des résultats obtenus par Slama [9] montrant que le réseau de transport étant donné, les dispositions géométriques des implantations des points de service ont peu d'effet sur le coût moyen de transport. Par exemple une région d'aire A étant allouée à chaque point de service, on peut calculer la distance moyenne à parcourir. Le point de service étant placé au centre de A et la demande étant uniforme, les résultats dans un réseau idéalisé à métrique euclidienne sont les suivants (multiplier par deux pour avoir la distance aller-retour) :

0,376 $A^{1/2}$ pour une région circulaire;

0,377 $A^{1/2}$ pour une région hexagonale;

0,387 $A^{1/2}$ pour une région carrée;

0,403 $A^{1/2}$ pour une région triangulaire équilatérale.

Dans les problèmes réels, on multiplie la distance moyenne par un coefficient qui tient compte de la métrique du réseau de transport (de 1,20 à 1,30), ce qui conserve la conclusion qui se dégage des chiffres ci-dessus : la distance moyenne de transport est proportionnelle à $A^{1/2}$, le coefficient de proportionalité ayant toujours une valeur comprise entre 0,4 et 0,5. Ces résultats sont bien observés dans la pratique : à New York, le temps de réponse moyen à un incendie est inversement proportionnel à la racine carrée de la « densité » (empiriquement définie) des casernes de pompiers au lieu de l'incident. De notre point de vue, il suffit de calculer la densité des points de service $q(M)$ au point M, sachant que la densité de la demande est $p(M)$ dans le voisinage du point M. La « taille » du point de service (demande totale dans la zone qu'il dessert exclusivement) étant $p(M)/q(M)$ et C étant le coût associé au point de service (coût de fonctionnement, par exemple), il reste à minimiser en tout point M une expression du type :

$$qC/p + K/q^{1/2} \tag{10}$$

qui représente le coût moyen par unité de demande desservie. K est une constante appropriée pour que le deuxième terme représente la distance moyenne parcourue. L'unité de coût choisie est la dépense supportée par unité de distance. La donnée de n détermine un multiplicateur de Lagrange et inversement, comme dans le premier cas étudié. Pour adopter un exemple simple on peut prendre C tel que

$$C = a + bp/q$$

On obtient alors :

$$q = (Kp/2a)^{2/3} \qquad (11)\,(^1)$$

— Ajustant les valeurs des paramètres (p, K, a, ...) suivant la zone étudiée, on peut calculer approximativement par des méthodes élémentaires la « taille » des points de service dans une zone donnée et le nombre total optimal. Ceci n'est valable que si les paramètres varient assez lentement ce qui peut ne pas être le cas si la densité de la demande, par exemple, est très faible (et change relativement vite sur des petits déplacements de M). Quant à la localisation approximative des points de service, on pourra procéder par toute méthode appropriée au problème particulier traité, la plus simple étant la plus recommandable.

Par exemple, on peut superposer sur le plan de la zone des disques de rayon calculé grâce à une formule du type (11). Il reste ensuite à essayer d'améliorer les dispositions obtenues par de petits déplacements de chacune des implantations. Les zones où la densité de la demande est relativement faible demanderont relativement plus d'attention, le coût total moyen étant proportionnel à $p^{-1/3}$ (dans le cas illustratif retenu). Tout ceci est légitime du fait que le coût total moyen par unité de surface n'est pas très sensible à de petites déviations de la forme ou de la taille des zones (ainsi, il est proportionnelle à $q^{-1/2}$ dans notre cas). Les quelques applications numériques effectuées ont donné des résultats à moins de 5 % du minimum réel.

— Le même type d'approche a été tenté sur des problèmes de localisation dynamique où la demande croît au cours du temps. Les points de service ne sont pas nécessairement mis en service à l'instant origine. Malheureusement, les résultats sont beaucoup moins simples (cf. [2]). En effet, il faut réaliser un compromis entre ce qu'il serait optimal de faire à chaque instant si la demande devait se maintenir indéfiniment (ou au moins pour une très longue période) au niveau atteint en cet instant (2) : autrement dit, tout en réalisant une bonne répartition des ressources à tout instant, il faut se donner les moyens de ne pas (trop) hypothéquer le futur. La réponse dépend de la croissance de la demande (en particulier, type de croissance : exponentielle, linéaire,...) et, évidemment, du taux d'actualisation.

Aucune approche générale du problème n'a encore été trouvée. L'enseignement qualitatif retiré des cas résolus montre que l'optimum (l'ensemble des implantations adoptées au cours du temps) peut ne pas se réduire à une suite d'optimums statiques entre lesquels il suffirait de cheminer. Bien au

(1) L'exposant 2/3 obtenu en (11) est simplement illustratif : ainsi si le coût de transport est proportionnel à la puissance $m^{\text{ième}}$ de la distance parcourue, il devient $2/m + 2$. Les résultats concordent avec ceux obtenus par Palmer [8] qui utilise une autre méthode.

(2) Ceci est désigné par optimum statique dans ce qui suit.

contraire, il se peut qu'aucun optimum statique n'apparaisse sauf pour des sous-parties de la zone étudiée.

4. IMPLANTATION DES STATIONS LE LONG D'UNE LIGNE DE TRANSPORT

4.1. Le problème

Une ligne de transport en commun ayant reçu un certain tracé, il s'agit de localiser les stations en service omnibus. Bien entendu, en pratique, tracé et implantations des stations ne sont pas indépendants, surtout en zone urbaine; mais il s'agit simplement d'examiner ici la relation qui existe entre un tracé donné et la meilleure disposition possible des arrêts qui lui correspond. La densité de la demande varie peu sur une interstation (1).

Les passagers utilisent toujours la station la plus proche. Ce problème présente beaucoup d'analogies avec le problème de la gestion des véhicules : à chaque arrêt, le coût total augmente de la perte de temps des usagers qui, déjà sur les véhicules, ne descendent pas et du coût de construction de la station qu'il faut aménager ce qui est analogue au coût de service λ. Inversement, tout nouvel arrêt bénéficie aux usagers qui n'ont pas encore embarqué (ou qui, se trouvant sur les véhicules voudraient en descendre) en réduisant le coût d'accès (supposé proportionnel à la distance parcourue) des stations, ce qui est analogue à la réduction du coût d'attente causé par l'envoi d'un nouveau véhicule. Le problème est élémentaire sauf pour les complications introduites par la considération des différents mouvements d'origine-destination d'une part et d'un réseau d'accès qui peut être complexe d'autre part. On considèrera la version simple suivante : le tracé retenu est rectiligne et les usagers le rejoignent en droite ligne sur la direction perpendiculaire pour se rabattre ensuite sur les stations. Cette simplification n'affecte pas la nature du problème, la méthode d'approche et la forme des résultats par rapport à une formulation plus réaliste. Avec les mêmes remarques, on supposera que les usagers embarquent tous et se rendent tous dans la même direction dans la zone étudiée.

Ceci étant, soit $p(x)$ le nombre d'usagers qui se sont rabattus sur la ligne sur une unité de longueur (la densité de la demande) et $F(x)$ les usagers déjà sur les véhicules en $M(x)$. v est la vitesse d'accès moyenne aux stations, t le temps perdu par les véhicules à chaque arrêt (temps de décélération, d'arrêt en station et d'accélération), C le coût d'aménagement de la station (C est exprimé en unité de temps). Il faut déterminer $S(x)$, interstation en $M(x)$.

(1) S'il y a sur le tracé une station où la demande ponctuelle est relativement très importante (gare terminale d'une ligne ferrée), cette hypothèse est en défaut.

4.2. Résolution et discussion

Le coût d'accès moyen par unité de longueur, exprimé en unité de temps, est le produit de la densité de la demande par le temps nécessaire à parcourir la distance moyenne à la station la plus proche, c'est donc :

$$p(x)S(x)/4v.$$

Dans les mêmes conditions, la perte de temps due aux arrêts :

$$tF(x)/S(x).$$

Il suffit donc de minimiser en tout point $M(x)$ l'expression :

$$p(x)S(x)/4v + tF(x)/S(x) + C/S(x), \tag{12}$$

d'où :

$$S(x) = 2\left(\frac{v}{p}(tF + C)\right)^{1/2}. \tag{13}$$

Si les usagers cherchent à minimiser leur temps de parcours total, ils n'iront pas nécessairement à la station la plus proche. En effet un passager ne se rend à la station en amont que si le temps d'accès augmenté du temps de trajet par un véhicule sur l'interstation est inférieur au temps d'accès direct à la station aval. Ceci a pour effet de modifier les deux premiers termes de (12) mais pas la forme du résultat (13). Donnons-le à titre illustratif :

$$S(x) = 2\left[1 - \left(\frac{v}{w}\right)^2\right]^{1/2}\left[\frac{v}{p}(tF + c) - \left(\frac{vt}{2}\right)^2\right]^{1/2},$$

w étant la vitesse des véhicules.

Le terme $\left(\frac{vt}{2}\right)^2$ est en général négligeable devant $\frac{v}{p}(tF + c)$. Ainsi (13) constitue donc une bonne approximation si $(v/w)^2$ est faible devant 1 ce qui est souvent le cas (marche à pied et autobus, rabattement en voiture et liaison ferrée suburbaine, ...).

Il est facile de généraliser le calcul et son résultat en considérant tous les mouvements origine destination possibles autour de $M(x)$. Pour obtenir la localisation précise des stations, on pourra considérer la fonction $\int \frac{du}{S(u)}$ et procéder par analogie avec le cas de 1.

G. Clarens a résolu dans [1] un cas particulier du problème plus général où le service assuré le long de la ligne n'est plus omnibus. Il faut alors déterminer les portions de la ligne où le service est omnibus et les intervalles entre les trains qui les desservent. Il n'est alors plus possible de dissocier le choix des implantations des stations de la politique de desserte des trains qui s'y arrêteront. De plus, les intervalles varient avec la période de la journée. Pour appliquer notre approche, il faut cependant que la densité de la demande ne varie pas beaucoup sur les zones où le service omnibus est assuré par le même train, ce qui est plus restrictif que précédemment. Il est possible de considérer ce problème à deux dimensions sans modification de la méthode en s'inspirant des résultats de 3; il peut alors s'énoncer comme suit : on se propose de diviser une région en un certain nombre de zones, chaque zone est desservie par des véhicules assurant une liaison directe avec un point d'attraction commun à tous les déplacements dans la région (un centre-ville, un aéroport, ...); trouver ces zones et le niveau de service qui devrait y être assuré (intervalle, capacité des véhicules...). On a reconnu le problème des « autobus à la demande » (l'autobus vient chercher les usagers qui ont prévenu un centre de service de leur désir de se déplacer). Alors que la généralisation à deux dimensions de résultats tels que (13) est assez facile (il suffit de trouver la densité des zones); d'autres approches plus classiques (comparer directement les différents tracés des lignes d'autobus) seraient non triviales.

5. CONCLUSION

Il existe nombre de problèmes de la catégorie de ceux qui ont été examinés où il est possible d'obtenir sans trop de difficulté des résultats approchés. Les contraintes inhérentes aux secteurs d'activité concernés (transport public, ...), d'une part, l'incertitude qui est attaché aux données les plus importantes (demande, coût de l'infrastructure,...), d'autre part, peuvent rendre illusoire la précision affichée par des méthodes plus « exactes ». De plus, celles-ci nécessitent en général une discrétisation « a priori » (découpage de la région en zones, de la journée en périodes,...) et quelquefois des procédures heuristiques qui peuvent obscurcir la signification de la politique optimale. Enfin, il n'y est jamais tenu compte de ce que l'optimum est relativement insensible à la position exacte des « points » solutions (implantation, temps de départ, ...). C'est pourquoi, pourvu que les simplifications requises ne faussent pas trop la réalité, il est justifié d'employer l'approche simple proposée ici si la nature du problème examiné s'y prête. Les résultats approchés tirés de la connaissance de la densité optimale peuvent ensuite, si besoin est, être affinés. Si on juge nécessaire d'employer quand même une méthode « exacte », on disposera d'un ensemble de solutions de départ déjà très proche de l'optimum. La sophistication de l'approche ne doit pas faire préjuger de la valeur du résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Clarens, *Operating strategies for public transportation systems*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1972.

[2] J. L. Forcina, *Dynamic location Strategies for Public Facilities*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1973.

[3] V. F. Hurdle, *Minimum cost schedules for a public transportation route*, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley, 1971.

[4] R. C. Larson, *Urban Police Patrol Analysis*, MIT Press 1972.

[5] R. C. Larson et J. M. Chaiken, *Methods for allocating urban emergency units : a survey*, Management Science 19, n° 4, December part 2, 1972, pp. 111-129.

[6] G. F. Newell, *Dispatching policies for a transportation route*, Transportation Science, 5, 1971, pp. 91-105.

[7] G. F. Newell, *Scheduling, location, transportation and continuum mechanics;* article à paraître dans SIAM, Journal of Applied Mathematics.

[8] D. S. Palmer, *The placing of service points to minimize travel*, Operational Research quaterly, vol. 24, n° 1, pp. 121-123. 1973.

[9] R. Slama, *Optimal location of public facilities, graduate Report*, University of California, Berkeley 1971.