

J. ABADIE

**Une méthode de résolution des programmes
non-linéaire partiellement discrets sans
hypothèse de convexité**

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 5, n° V1 (1971), p. 23-38

http://www.numdam.org/item?id=RO_1971__5_1_23_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE METHODE DE RESOLUTION DES PROGRAMMES NON-LINEAIRE PARTIELLEMENT DISCRETS SANS HYPOTHESE DE CONVEXITE

par J. ABADIE (1)

Résumé. — Dans un article précédent, l'Auteur avait exposé une méthode arborescente permettant de résoudre des programmes non-linéaires partiellement discrets. La démonstration de convergence finie reposait sur certaines hypothèses de convexité ou de quasi-convexité.

Une modification est proposée, qui permet d'éliminer toute hypothèse, tout en conservant la propriété de la méthode précédente en ce qui concerne le très petit nombre de groupes de mémoires utilisées pour la mémorisation de l'arborescence engendrée.

Application est faite aux programmes quadratiques partiellement ou totalement entiers, et aux programmes polynomiaux booléens, sans aucune autre hypothèse que celles qu'expriment ces derniers titres.

I. INTRODUCTION

Nous avons proposé (Abadie, 1970) une méthode arborescente pour la résolution du programme partiellement discret :

P : minimiser $\varphi(x)$ sous les contraintes :

$$x \in K \tag{1}$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad \forall j \in J \tag{2}$$

$$x_j \text{ entier}, \quad \forall j \in E, \tag{3}$$

où J est un ensemble de n indices, $E \subset J$ un sous-ensemble de N indices, et x le vecteur de composantes x_j , $j \in J$. Les démonstrations de convergence reposaient sur l'hypothèse que K était une partie convexe de R^n , et que la fonction φ était quasi-convexe. Une attention particulière avait été apportée au cas où la fonction φ était convexe.

La référence précitée contient en réalité une famille de méthodes, dont l'une était appelée M1. Nous présentons ici, une modification de M1, appelée MG1 (G pour : « généralisée »), qui converge quels que soient K et φ . Toutes

(1) Electricité de France

les méthodes de la famille se généralisent de la même façon, et convergent sans aucune hypothèse sur K et φ .

Toutes ces méthodes généralisées ont la propriété essentielle des méthodes de la famille précédente, à savoir que, une fois connu le nombre des mémoires centrales non utilisées par le programme et les différentes servitudes, la machine peut choisir elle-même une méthode à m groupes de mémoires, où m est le maximum compatible avec $1 \leq m \leq 2N$ (un groupe de mémoires correspond, à quelques unités près, à la mémorisation d'un vecteur x).

Après l'exposé de MG1 et la démonstration de convergence, le lecteur trouvera quelques remarques suivies de deux exemples illustratifs.

Les notations sont celles qui ont été exposées avec la méthode M1. Nous n'y revenons pas ici, excepté pour ce qui suit.

Tout sommet S de l'arborescence que l'on construit est associé à une partie $A \subset E$ et à l'attribution à toute variable $x_j, j \in A$, de valeurs numériques entières $\bar{x}_j, a_j \leq \bar{x}_j \leq b_j$. On appelle \bar{x}_A le vecteur de composantes $\bar{x}_j, j \in A$. On identifie alors S à la paire (A, \bar{x}_A) . On appelle *étage* de S , le nombre des éléments de A . L'étage de S est noté t_S .

Au sommet $S = (A, \bar{x}_A)$ correspond le problème $P(S)$:

$P(S)$: minimiser $\varphi(x)$ sous les contraintes :

$$x \in K \quad (1)$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \quad \forall j \in J - A \quad (2)$$

$$x_j = \bar{x}_j, \quad \forall j \in A \quad (4)$$

(on remarquera que toute référence à la condition (3) a disparu).

Lorsque $P(S)$ a une solution, on désigne par $\hat{x}(S)$ l'une d'elles, et par $\hat{\varphi}_S$ la valeur minimale de $\varphi(x)$; lorsque $P(S)$ n'a pas de solution, on pose $\hat{\varphi}_S = +\infty$. Enfin, $\hat{\varphi}$ désigne une borne supérieure du minimum de $\varphi(x)$ sous les conditions (1), (2), (3) ($\hat{\varphi} = +\infty$ si l'on ne connaît pas de borne plus petite).

Nous renvoyons le lecteur à la référence précitée pour le reste des notations.

2. EXPOSE DE LA METHODE MG1

Seules sont modifiées, par rapport à la méthode M1, les procédures de refus et les règles de passage d'un état de l'arborescence à un autre.

Procédures de refus

Ref. 1 : Si $\hat{\varphi}_S \geq \varphi$, refuser la descendance de S d'étage supérieur à t_S .

Ref. 2 : Lorsque l'on impose, pour former \bar{x}_A , une variable x_j à sa borne supérieure b_j ou inférieure a_j , refuser le successeur de même étage.

Règles de l'algorithme

Les règles suivantes s'appliquent en succession à chaque itération.

R0. Considérer l'étage le plus élevé t_m (pour la première itération, $t_m = 0$, poser $\hat{\phi} = +\infty$, puis examiner la racine S_0).

R1. Si les descendants d'étage supérieur de S_0 sont tous refusés, FIN du problème : les mémoires réservées à la meilleure solution de (1), (2), (3) contiennent la solution de P si une solution de (1), (2), (3) y a été placée à un moment quelconque; sinon, les contraintes (1), (2), (3) sont incompatibles.

R2. S'il existe dans l'étage t_m un sommet accepté T dont les descendants d'étage supérieur ne sont pas tous refusés, examiner un successeur U de T dans l'étage $t_m + 1$, et accepter ou refuser (Ref. 1) la descendance de U d'étage supérieur à t_U .

R3. Sinon, lorsque cela est possible, examiner, dans l'ensemble des deux ailes opposées qui constituent t_m , le sommet U dont l'éloignement est le plus petit. Accepter ou refuser (Ref. 1) la descendance de U d'étage supérieur à t_U . Refuser si l'on peut (Ref. 2) le successeur de U dans son aile. Si U est le successeur d'un autre sommet dans la même aile, ce dernier sommet est refusé.

R4. Si deux ailes opposées de l'étage $t_m > 0$ sont refusées, refuser également tous les successeurs d'étage supérieur du sommet S dont sont issues ces deux ailes opposées. L'étage t_m se trouve diminué d'une unité.

R5. A la fin de l'itération, on a :

$$\hat{\phi} \text{ nouveau} \leq \hat{\phi} \text{ ancien.}$$

Lorsque

$$\hat{\phi} \text{ nouveau} < \hat{\phi} \text{ ancien,}$$



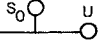
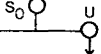
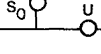
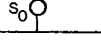
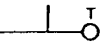
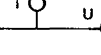
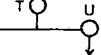
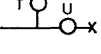
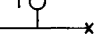
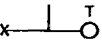
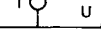
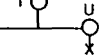
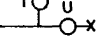
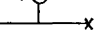
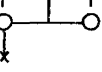
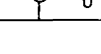
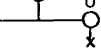
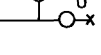
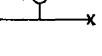
passer en revue tous les $\hat{\phi}_S$ conservés en mémoire, et refuser (avec effacement des mémoires) tous les descendants d'un sommet S chaque fois que :

$$\hat{\phi}_S \geq \hat{\phi} \text{ nouveau.}$$

R6. Si $\hat{x}_j(S)$ est entier pour tout $j \in E$, alors les descendants de S d'étage supérieur à t_S sont refusés. Si en outre $\hat{\phi}_S < \hat{\phi}$, alors $\hat{x}(S)$ devient la meilleure solution courante des contraintes de P , et remplace la précédente dans les mémoires réservées à cet effet, tandis qu'on fait $\hat{\phi} := \hat{\phi}_S$. Si au contraire $\hat{\phi}_S \geq \hat{\phi}$, alors l'ancienne meilleure solution courante reste en place.

Les règles R1 à R4 se résument à une transformation du dernier étage, schématisée ci-après (tableau 1). Les règles R5 et R6, permettent de diminuer le nombre des sommets conservés en mémoire, elles ne sont pas schématisées ci-après. Ri Acc. (Ri Ref. j) signifie que le sommet examiné en application de la règle Ri est accepté (refusé par application de la procédure de refus Ref. j). La notation Ref. 1.2. indique que, les deux procédures de refus sont simultanément

TABLEAU 1

AVANT				APRÈS		
N°	État	Étage	Règle	N°	État	Étage
0		0	R1	FIN		
1		0	R2 Acc.	2		1
			R2 Ref. 1.	6		1
			R2 Ref. 2.	2a		1
			R2 Ref. 1.2.	5		1
2 (ou 2a)		t_m	R2 Acc.	2		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.	6		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 2.	2a		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.2.	5		$t_m := t_m + 1$
3 (ou 3a)		t_m	R2 Acc.	2		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.	6		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 2.	2a		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.2.	5		$t_m := t_m + 1$
4 (ou 4a)		t_m	R2 Acc.	2		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.	6		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 2.	2a		$t_m := t_m + 1$
			R2 Ref. 1.2.	5		$t_m := t_m + 1$

5		t_m	R3 Acc.	3		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.	7		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 2.	3a		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.2.	9		$t_m = t_m$
6		t_m	R3 Acc.	4		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.	8		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 2.	4a		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.2.	7		$t_m = t_m$
7		t_m	R3 Acc.	3		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.	7		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 2.	3a		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.2.	9		$t_m = t_m$
8		t_m	R3 Acc.	4		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.	8		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 2.	4a		$t_m = t_m$
			R3 Ref. 1.2.	7		$t_m = t_m$
9		t_m	R4			$t_m = t_m - 1$

Commentaires T , T' , T'' sont les sommets acceptés à l'étage le plus élevé $t_m > 0$ avant application des règles R1 à R4. Le sommet examiné, lorsqu'il y en a un, est U : son nom, n'est pas indiqué lorsqu'il est refusé, pour rappeler qu'on ne conserve pas en mémoire les sommets refusés. Dans les états 7 et 8, U est successeur de T' , et S désigne, s'il y a lieu, le prédécesseur (direct) unique de l'étage t_m . La notation $t_m := t_m + \varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$ ou -1 signifie que l'étage le plus élevé avant l'application d'une des Règles R1 à R4 étant t_m , il est $t_m + \varepsilon$ après son application. Dans l'état 9 pour t_m , on peut détailler les sous-cas, dépendant de l'état de l'étage $t_m - 1$ avant application des Règles R1 à R4 (tableau 2).

TABLEAU 2

AVANT				APRÈS		
N°	État	Étage	Règle	N°	État	Étage
9.1		0 1	R4	0		0
9.2		$t_m - 1$ t_m	R4	6		$t_m := t_m - 1$
9.2a		$t_m - 1$ t_m	R4	5		$t_m := t_m - 1$
9.3		$t_m - 1$ t_m	R4	7		$t_m := t_m - 1$
9.3a		$t_m - 1$ t_m	R4	9		$t_m := t_m - 1$
9.4		$t_m - 1$ t_m	R4	8		$t_m := t_m - 1$
9.4a		$t_m - 1$ t_m	R4	7		$t_m := t_m - 1$

ment appliquées. Les états 2a, 3a, 4a sont des variantes des états 2, 3, 4, correspondant au fait que le successeur *dans son aile* du sommet T dont on examine le successeur d'étage supérieur a été refusé.

Un refus est définitif, et comporte l'effacement dans les mémoires de l'ordinateur. Une acceptation est provisoire, car $\hat{\phi}$ peut diminuer, sans pouvoir jamais augmenter.

3. RESULTATS THEORIQUES

Théorème 1. Si T est un descendant de S d'étage supérieur à t_s , alors $\hat{\phi}_T \geq \hat{\phi}_S$.

Démonstration. Les contraintes de $P(T)$ sont celles de $P(S)$, augmentées de quelques autres du type $x_j = \bar{x}_j$.

Les théorèmes 2, 3, 4, 5 de la référence précitée restent valables, avec des démonstrations analogues, que nous ne répéterons pas, et au changement près

de N en $N + 1$. (Nous nous abstenons d'écrire à nouveau le théorème 2, dont l'énoncé ne varie pas, et qui au surplus ne nous est pas utile.)

Théorème 3. Dans l'application de l'algorithme, l'étage le plus élevé est, au début de toute itération, dans un des états 0 à 9 ci-dessus, l'état 9 étant exclu pour les autres étages.

Théorème 4. A toute itération, l'état de l'arborescence ne compte pas plus de $2N + 1$ sommets acceptés, où N est le nombre des variables entières (c'est-à-dire, le nombre des éléments de E).

Remarquons d'ailleurs que le nombre maximum de sommets figurant dans l'arborescence peut même être considéré comme étant $2N$. En effet, le sommet racine S_0 devient inutile dès que l'examen de deux ailes opposées issues de S_0 a été commencé (noter cependant que la meilleure solution entière est à mémoriser en plus, ce qui nous amène à $2N + 1$ sommets en tout). Ce nombre maximum $2N$ est atteint lorsque $t_m = N$ et que les étages de 1 à $N - 1$ sont dans l'état 4, l'étage N étant dans l'état 8.

Théorème 5. En un nombre fini d'itérations, l'algorithme trouve une solution de P , ou bien conclut que les contraintes de P sont incompatibles.

REMARQUES

REMARQUE 1. Dans le cas où les N variables entières sont toutes bivalentes ($x_j = 0$ ou 1 pour tout $j \in E$), seules peuvent se rencontrer, dans les états initiaux 1 à 8, les règles R3 Ref. 2., R3 Ref. 1.2., à l'exclusion de R3 Acc., R3 Ref. 1. Il en résulte aisément le résultat suivant, relatif à la méthode de la référence précitée :

Théorème 6. La méthode M1 converge quels que soient K et φ , dans le cas où toutes les variables entières sont bivalentes.

REMARQUE 2. Les résultats précédents sont valables *sans aucune hypothèse*, ni sur l'ensemble $K \subset R^n$, ni sur la fonction φ . Le lecteur devra se garder cependant de tout optimisme excessif. L'algorithme étudié ici ne peut avoir une valeur pratique que si l'on sait résoudre $P(S)$, c'est-à-dire trouver un optimum global de $P(S)$ (et non un optimum dont on ne saurait qu'il n'est que relatif ou local). C'est là un problème que l'on sait effectivement résoudre dans certains cas, dont le plus connu est celui où K est défini par des équations ou inéquations de la forme :

$$f_i(x) = 0, \quad i \in L \quad (5)$$

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in I \quad (6)$$

où les contraintes (5), sont linéaires, où les contraintes (6) définissent un ensemble convexe sur l'intersection de (2) et (5), où la fonction φ est convexe (ou strictement quasi-convexe), et où les fonctions $\varphi, f_i, i \in I$, ont des gradients continus. Ce cas est en fait résolu par M1, et point n'est donc besoin de MG1 ici.

Le lecteur devra aussi se garder d'un scepticisme également excessif. Sans insister sur l'espoir que l'on peut, et doit, avoir de voir naître des méthodes permettant de trouver l'optimum global de classes de problèmes de plus en plus généraux, on sait déjà résoudre, *par exemple*, certains problèmes de *minimisation* à fonction économique *concave* (Zangwill, 1968; Burdet, 1970). On sait aussi résoudre *tous* les problèmes à fonction économique φ du second degré, lorsque les contraintes sont linéaires et que les variables x_j n'ont aucune valeur exclue dans l'intervalle (a_j, b_j) (Ritter, 1966; Cottle et Mylander, 1970).

Il résulte de ce dernier fait que *l'on sait résoudre tous les problèmes P partiellement discrets pour lesquels la fonction économique φ est du second degré et l'ensemble K un polyèdre convexe fermé*. L'intéressant ici est qu'aucune hypothèse de convexité n'est faite sur φ : dans \mathbb{R}^3 , par exemple, les régions $\varphi(x) \leq C$ peuvent être aussi bien l'intérieur que l'extérieur d'un ellipsoïde, d'un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, d'un hyperboloïde, d'un cylindre à sections planes du second degré de nature quelconque, etc...

Nous allons maintenant montrer un autre cas où l'on peut résoudre le problème P sans aucune hypothèse de convexité.

REMARQUE 3. Il existe des cas où l'on peut rendre convexe, s'il ne l'était pas initialement, le problème P_0 obtenu à partir de P en laissant de côté les conditions d'intégrité (P_0 est le problème continu sous-jacent à P). Pour ne citer qu'un exemple, on peut remplacer, *lorsque toutes les variables x_j sont bivalentes* ($x_j = 0$ ou $1, \forall j \in J$), la fonction économique $\varphi(x)$ par

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2} \alpha \sum_{j \in J} x_j (x_j - 1),$$

où α est une constante quelconque. Le problème obtenu \bar{P} est équivalent à P , puisque les fonctions φ et $\bar{\varphi}$ prennent les mêmes valeurs aux sommets du cube unité $0 \leq x_j \leq 1$. On peut en profiter pour rendre $\bar{\varphi}$ convexe sur le cube unité : il suffit de prendre α assez grand. Donnons une démonstration de ce fait, reposant sur l'hypothèse que φ est deux fois continûment différentiable. Soient $H(x), \bar{H}(x)$ les matrices des dérivées secondes de $\varphi, \bar{\varphi}$ respectivement. On a la relation :

$$\bar{H}(x) = H(x) + \alpha I.$$

Soit λ la plus petite de toutes les valeurs propres de toutes les matrices $H(x)$ sur le cube unité, et $\bar{\lambda}$ la quantité analogue relative à $\bar{H}(x)$. On a :

$$\bar{\lambda} = \lambda + \alpha,$$

ce qui montre que l'on aura $\bar{\lambda} \geq 0$ dès que α est assez grand. Pour une telle valeur de α , la fonction $\bar{\varphi}$ est convexe sur le cube unité.

Supposons maintenant que les contraintes $x \in K$ s'expriment par :

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in I.$$

Le procédé précédent s'applique à toute fonction f_i qui ne serait pas convexe. Les contraintes peuvent donc, sans perte de généralité, s'exprimer par :

$$\bar{f}_i(x) \leq 0, \quad i \in I,$$

où les fonctions \bar{f}_i sont toutes convexes.

En résumé, en appelant *problème de classe C^2* tout problème P où la fonction économique et les contraintes s'expriment par des fonctions deux fois continûment différentiables, on a le résultat suivant, où \bar{P}_0 désigne le problème continu sous-jacent à P (remarquons immédiatement que si \bar{P}_0 est convexe, il en est de même de tout $\bar{P}(S)$).

Théorème 7. Étant donné un problème P de classe C^2 et totalement bivalent, il existe un problème équivalent \bar{P} tel que le problème continu sous-jacent soit convexe.

Le procédé précédent généralise celui qu'on a donné Hammer et Rubin (1970) pour le cas où φ est une fonction du second degré et les f_i des fonctions du premier degré. Il peut être utile dans la pratique de remarquer que toute fonction convexe $\psi(x)$ peut remplacer la fonction $\frac{1}{2} \sum_j x_j(x_j - 1)$, pourvu qu'elle s'annule aux sommets du cube unité et que les valeurs propres de sa matrice des dérivées secondes soient positives sur le cube unité.

Considérons à titre d'exemple les problèmes polynomiaux totalement bivalents :

P : minimiser $\varphi(x)$

sous les contraintes :

$$f_i(x) \leq 0, \quad i \in I$$

$$x_j = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall j \in J,$$

où les fonctions φ, f_i sont des polynômes en x .

Comme $x_j^k = x_j, \forall k > 0$, pour tout point admissible, on peut toujours supposer, sans perte de généralité, que la seule puissance de x_j qui intervienne est 1, si bien que φ , par exemple, ne contient que des monômes du type :

constante, $x_j, x_j x_k, x_j x_k x_l, \dots$

où les indices j, k, l, \dots relatifs à un même monôme sont distincts (ce que nous indiquons ci-dessous par le symbole * accompagnant le symbole de sommation Σ), et où les divers coefficients, tels que $p_{j,k,l}$, sont invariants par toute permutation des indices (ce qui ne diminue pas la généralité) :

$$\varphi(x) = p_0 + \Sigma_j p_j x_j + \Sigma_{j,k}^* p_{j,k} x_j x_k + \Sigma_{j,k,l}^* p_{j,k,l} x_j x_k x_l + \dots$$

On a alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 2p_{jk} + 6 \Sigma_l^* p_{j,k,l} x_l + \dots,$$

le coefficient correspondant à la dérivée des termes monômes à q variables étant $q(q-1)$.

Il suffit d'ajouter à $\varphi(x)$ le terme :

$$\frac{1}{2} \Sigma_j \alpha_j x_j (x_j - 1)$$

où α_j vérifie :

$$\alpha_j \geq 2 |p_{jk}| + 6 \Sigma_l^* |p_{j,k,l}| + \dots, \quad \forall j \in J,$$

pour que :

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_j^2} \geq \Sigma_k^* \left| \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial x_j \partial x_k} \right|, \quad \forall j \in J,$$

ce qui est une condition suffisante pour que les valeurs propres de $\bar{H}(x)$ soient non-négatives sur le cube unité, donc pour que la fonction $\bar{\varphi}$ soit convexe (la matrice $\bar{H}(x)$ est en effet « à diagonale dominante »).

On procède à des transformations analogues sur les fonctions f_i , pour obtenir le problème :

\bar{P} : minimiser $\bar{\varphi}(x)$ sous les contraintes :

$$\begin{aligned} \bar{f}_i(x) &\leq 0, & i \in I \\ x_j &= 0 \text{ ou } 1, & \forall j \in J, \end{aligned}$$

pour lequel le problème continu sous-jacent \bar{P}_0 est polynomial et convexe.

Si le problème P possédait des équations $f_i(x) = 0$, on les remplacerait au préalable par la paire d'inéquations $f_i(x) \leq 0, -f_i(x) \leq 0$ et l'on ferait subir à chacune de ces inéquations, séparément, le traitement ci-dessus.

On peut donc dire que *l'on sait dès maintenant résoudre tous les problèmes polynomiaux totalement bivalents.*

Le cas où un programme polynomial est totalement bivalent est intéressant en soi. Il y a mieux, puisqu'il a été montré que *tout programme totalement bivalent peut être ramené à un problème polynomial du même type* : en effet, étant donné une fonction $\varphi(x)$ quelconque, définie en un nombre fini de points (ici, ces points sont les sommets du cube unité), il existe un polynôme prenant les mêmes valeurs que $\varphi(x)$ en ces points. Le théorème de Gaspar affirme d'ailleurs que toute fonction de variables bivalentes s'exprime par un polynôme par rapport à ces mêmes variables. Pour un procédé constructif, voir Hammer et Rudeanu, 1968 (Part 1, § 1).

Il y a même mieux encore, puisque *tout programme totalement bivalent est équivalent à un programme linéaire du même type* (Hammer et Rudeanu, 1968; le lecteur pourra éclaircir ce point en notant que l'enveloppe convexe d'un ensemble de sommets du cube unité ne contient aucun autre sommet de ce cube).

Nous ignorons cependant jusqu'à quel point la réduction d'un programme totalement bivalent à un programme du même type, soit polynomial, soit linéaire, peut être considérée comme une méthode applicable dans la pratique.

REMARQUE 4. La méthode à N groupes de mémoires s'étend sans peine (elle devient une méthode à $N + 1$ groupes de mémoires), ainsi que les méthodes à m groupes de mémoires ($1 \leq m \leq 2N$).

REMARQUE 5. C'est uniquement en vue de la simplification des notations que nous avons supposé que l'ensemble des valeurs permises pour chaque variable x_j , $j \in E$, était l'ensemble des entiers de l'intervalle (a_j, b_j) . La méthode M1 aussi bien que la méthode MG1 sont naturellement applicables lorsque l'ensemble des valeurs permises pour chaque variable x_j est un ensemble fini quelconque.

REMARQUE 6. Il existe d'autres méthodes permettant de résoudre au moins certaines classes de problèmes non-linéaires totalement entiers (Lawler and Bell, 1966; Dragan, 1968), ou même des problèmes très généraux (Korte, Krelle und Oberhofer, 1969, 1970). Il serait intéressant d'étendre les expériences numériques publiées par ces derniers auteurs.

4. EXEMPLES ILLUSTRATIFS

EXEMPLE 1

On traite complètement ci-après par la méthode MG1 le problème P suivant :

$$P : \text{minimiser } \varphi(x) \\ = (65x_1^2 - 202x_1 - 120x_2 + 216)(20x_1^2 - 74x_1 - 27x_2 + 66)$$

n° V-1, 1971.

sous les contraintes :

$$0 \leq x_j \leq 2, j \in J = \{1, 2\} \quad (2)$$

$$x_j \text{ entier, } j \in E = J. \quad (3)$$

L'ensemble K est ici l'espace R^2 tout entier. La fonction φ n'est pas convexe dans le rectangle défini par (2) (elle possède même un col pour $x_1 = 0.700\dots$, $x_2 = 0.887\dots$).

Si les seuls problèmes à résoudre étaient aussi petits, la méthode raisonnable serait de procéder à une énumération exhaustive, ce qui n'exige le calcul de $\varphi(x)$ que pour $3^2 = 9$ points.

La solution du problème $P(\emptyset)$ obtenu en négligeant (3), c'est-à-dire en traitant les variables comme variables réelles et non comme variables entières, est :

$$\hat{x}(\Phi) = (2 ; 0,26), \quad \varphi(\hat{x}(\Phi)) = -368.$$

La solution de P est :

$$\hat{x} = (0 ; 2), \quad \varphi(\hat{x}) = -288.$$

La solution obtenue par le plus proche arrondi de $\hat{x}(\Phi)$ est :

$$x^0 = (2 ; 0), \quad \varphi(x^0) = -37.$$

Les autres « arrondis voisins » (à une unité près) donnent de moins bons résultats encore.

La méthode M1 donne également x^0 , qui, sans être optimale, est obtenue par MG1 à la deuxième itération.

Les calculs de MG1 sont présentés dans le tableau 3. On y verra que l'algorithme trouve la solution optimale en 6 itérations, après la minimisation initiale à 2 variables (résolution de $P(\emptyset)$). Ces 6 itérations correspondent à 3 minimisations à une variable et 3 calculs de $\varphi(x)$. Encore faut-il remarquer que des 3 minimisations à une variable, l'une (itération 1), consiste à simplement copier, sans aucun calcul, les résultats de la minimisation à deux variables (itération 0).

Les calculs sont présentés sous forme d'un tableau à neuf colonnes.

Colonne 1 : nom du sommet $T = (B, \bar{x}_B)$ examiné dans l'arborescence (0, 1, 2, ...); ce nom coïncide avec le numéro de l'itération.

Colonne 2 : ensemble B ; pour simplifier, B est toujours l'un des trois suivants : \emptyset , (1), (1, 2).


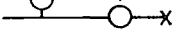
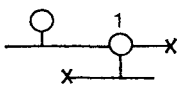
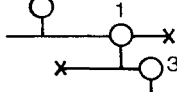
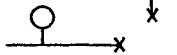
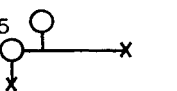

Colonne 3 : la notation $i.g$ signifie que le sommet étudié est le successeur du sommet i dans son aile, qui est une aile gauche; la notation $i.sg$ signifie que le sommet étudié est le successeur d'étage supérieur de i , et qu'il est le

début d'une aile gauche (*i. d* et *i. sd* ont les mêmes significations, au remplacement près de « gauche » par « droite »).

Colonnes 4.1, 4.2 : valeurs des composantes x_1, x_2 pour la solution optimale de $P(T)$; lorsque une valeur de x_j est soulignée, cela signifie qu'elle a été fixée à une valeur entière parce que $j \in A$; lorsqu'en outre elle est accompagnée d'un astérisque, c'est que $j = \beta$; l'écriture $x_j = 2^{\circ}$ signifie que la contrainte $x_j \leq 2$ est effective à l'optimum (le symbole $^{\circ}$ est mis pour « obstacle »); même interprétation pour $x_j = 0^{\circ}$, avec la borne inférieure zéro).

Colonnes 5, 6 : $\hat{\phi}_T, \hat{\phi}$, comme ils ont été définis ci-dessus; le meilleur point entier correspondant au nombre figurant dans la colonne 6.

TABEAU 3

1	2	3	4.1		4.2	5	6	7	8
			x_1	x_2					
T	B	Préd.	$\hat{x}(T)$		$\hat{\phi}_T$	$\hat{\phi}$	État de l'arborescence	t_m	
0	\emptyset		2°	0.26^-	$- 368^-$	$+ \infty$		0	
1	1	0. sd	<u>2^*</u>	0.26^-	$- 368^-$			1	
2	1,2	1. sg	<u>$2.$</u>	<u>0^*</u>	$- 144$	$- 144$		2	
3	1,2	1. sd	<u>$2.$</u>	<u>1^*</u>	1 392			2	
4	1,2	3. d	<u>$2.$</u>	<u>2^*</u>	9 408			1	
5	1	0. sg	<u>1^*</u>	0.551^-	$- 37^-$			1	
6	1	5. g	<u>0^*</u>	2°	$- 288$	288		0 FIN	
Solution : $T = 6$									

Colonne 7 : état de l'arborescence à la fin de l'itération en cours (le nom de la racine de l'arborescence est omis; lorsque l'état de l'étage le plus élevé est l'état 9, on va directement en l'un des états 0, 5, 6, 7, 8 qu'il engendre).

Colonne 8 : valeur de l'étage le plus élevé, t_m .

Tous les nombres sont exacts, excepté ceux qui sont accompagnés du signe $-$: ces derniers sont approchés à moins d'une unité près du dernier chiffre écrit, par défaut de la valeur absolue.

REMARQUE 1. Le tableau relatif à la méthode M1 s'obtient en omettant les sommets 4 et 6 du tableau 3. Le meilleur point trouvé correspond au sommet 2, qui n'est pas optimal.

REMARQUE 2. On peut éviter certains calculs en remarquant que, pour tout x_1 fixé, la fonction φ est convexe en x_2 . On évite alors le calcul correspondant du sommet 4.

REMARQUE 3. Plus généralement, soit $E_1 \subset E$: supposons que, quelles que soient les valeurs entières données aux variables x_j , $j \in E_1$, la section résultante K_1 de K soit convexe, et la fonction résultante φ_1 quasi-convexe ou convexe : on pourra utiliser MG1 jusqu'à fixation complète des valeurs de x_j , $j \in E_1$, puis M1 dans les étages ultérieurs (passant ainsi de MG1 à M1 et réciproquement, évitant ainsi des calculs chaque fois que l'on applique M1).

EXEMPLE 2

Résolvons maintenant le problème totalement bivalent :

$$P : \text{minimiser } x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - x_1$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_1x_2x_3 &= 1 & (1) \\ x_j &= 0 \text{ ou } 1, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un programme polynomial, auquel s'applique par conséquent le procédé indiqué dans la remarque 3 du paragraphe 3. Cela permet de remplacer P par le problème équivalent suivant


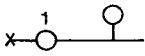
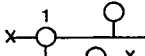
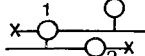
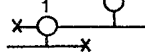


$$\bar{P} : \text{minimiser } 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 - 3x_1 - 2x_2 - 2x_3$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_1x_2x_3 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 &\leq 1 \\ 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1x_2x_3 - 4x_1 - 4x_2 - 3x_3 &\leq -1 \\ x_j &= 0 \text{ ou } 1, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Le problème continu sous-jacent \bar{P}_0 , ainsi que tous les problèmes continus $\bar{P}(S)$ sont convexes (la fonction économique est même strictement convexe). L'application de la méthode M1 donne le tableau 4. La solution du problème P est obtenue, après la minimisation initiale à 3 variables, en 6 itérations. Elles correspondent à deux minimisations à 2 variables, deux minimisations à une variable, et deux calculs de fonctions.

TABLEAU 4

1	2	3	4.1	4.2	4.3	5	6	7	8
T	B	Préd.	$\hat{x}(T)$			$\hat{\phi}_T$	$\hat{\phi}$	État de l'arborescence	t_m
			x_1	x_2	x_3				
0	\emptyset		0.5	0.5	0.5	-1.75	$+\infty$		0
1	1	0.sg	<u>0.*</u>	0.666-	0.666-	-1.333-			1
2	2	1.sd	<u>0.</u>	<u>1.*</u>	0.5	-1			2
3	3	2.sg	<u>0.</u>	<u>1.</u>	<u>0.*</u>	0	0		3
4	4	2.sd	<u>0.</u>	<u>1.</u>	<u>1.*</u>	-1	-1		2
5	5	1.sg	<u>0.</u>	<u>0.*</u>		$+\infty$			1
6	6	0.sd	<u>1.*</u>	0.333-	0.333-	-0.333-			0 FIN
Solution : $T = 4$									

REFERENCES

- J. ABADIE, « Une méthode arborescente pour les programmes partiellement discrets », *R.I.R.O.*, 3^e année, V-3, 1969, p. 24-50.
- C. A. BURDET, « Deux modèles de minimisation d'une fonction économique concave », *R.I.R.O.*, 4^e année, V-1, 1970, p. 49-84.
- R. W. COTTLE and W. C. MYLANDER, « Ritter's cutting plane method for nonconvex quadratic programming », chap. 11, *Integer and Nonlinear Programming* (J. Abadie, ed.), North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1970.

- I. DRAGAN, « Un algorithme lexicographique pour la résolution des programmes polynomiaux en variables entières », *R.I.R.O.*, 2^e année, V-3, 1968, p. 81-89.
- P. L. HAMMER and A. A. RUBIN, « Some remarks on quadratic programming with 0-1 variables », *R.I.R.O.*, 4^e année, V-3, 1970, p. 67-79.
- P. L. HAMMER and S. RUDEANU, *Boolean methods in operations research and related areas*, Springer, New York, 1968.
- B. KORTE, W. KRELEE and W. OBERHOFER, « Ein lexikographischer Suchalgorithmus zur Lösung allgemeiner ganzzahliger Programmierungsaufgaben », *Unternehmensforschung*, Band 13, 1969, Heft 2 (p. 72-98) und Heft 3 (p. 171-192); Nachtrag in Band 14, 1970, Heft 3, p. 228-234.
- E. L. LAWLER and M. D. BELL, « A method for solving discrete optimization problems », *Operations Research*, vol. 14, 1966, p. 1098-1112.
- K. RITTER, « A method for solving maximum problems with a nonconcave quadratic objective function », *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.*, vol. 4, 1966, p. 340-351.
- W. I. ZANGWILL, « Minimum concave cost flows in certain networks », *Management Science*, vol. 14, n° 7, 1968, p. 429-450.