Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte

M. Anciaux
P. Hansen

Sur la méthode des compensations successives

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 4, n° V3 (1970), p. 11-14
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1970__4_3_11_0>

R.I.R.O.
(4e année, V-3, 1970, p. 11-14)

SUR LA METHODE DES COMPENSATIONS SUCCESSIVES

par M. ANCIAUX (1) et P. HANSEN (2)

Résumé. — *On montre que la M.C.S. ne donne pas toujours le flot optimal dans un réseau.*

NOTE DE LA REDACTION

Nous avons reçu plusieurs lettres au sujet de l'article de M. F. A. Oprescu. En particulier, les remarques de Mme Anciaux et M. Hansen montrent qu'il est des exemples où l'algorithme proposé ne conduit pas à l'optimum. Nous avons malheureusement appris la mort subite de l'auteur, le 30 janvier 1970 : il ne pourra donc pas développer sa méthode, dont l'élégance et la simplicité ouvrent la voie à des recherches intéressantes. En particulier, la méthode M.C.S. permettrait de générer un bon flot initial à partir duquel l'algorithme de Ford Fulkerson permet d'atteindre l'optimalité, si elle n'est pas déjà obtenue.

Dans un récent article [4], M. F. A. Oprescu a proposé, sous le nom de méthode des compensations successives (M.C.S.), une nouvelle méthode de calcul du flot optimal dans un réseau. M.C.S. commence par le calcul des déséquilibres entre les capacités des arcs entrants et sortants en chacun des sommets du réseau : en tout sommet x_i on calcule la somme l_i des capacités des arcs sortants et la somme c_i des capacités des arcs entrants. Si $l_i \neq c_i$ il y a déséquilibre ; les équations de conservation du flot montrent en effet que tous les arcs entrants et sortants ne pourront être simultanément saturés. Le déséquilibre est mesuré par la quantité

(1) Université libre de Bruxelles.
(2) Université libre de Bruxelles. Chargé de Recherches du Fonds National Belge de la Recherche scientifique.

$l_i - c_i$; on pose $\lambda_i = \max [0, l_i - c_i]$ et $\mu_i = \max [0, c_i - l_i]$. Pour tout réseau $\sum_i \lambda_i = \sum_i \mu_i$. M.C.S. propose de compenser successivement les déséquilibres des sommets du réseau en réduisant les capacités des arcs suivant les règles 1, 2, 2′ ci-dessous. Lorsque tous les déséquilibres auront été compensés les capacités des arcs correspondront à un flot admissible, qui serait optimal.

Règle 1 : Soit x_i un sommet tel que $\lambda_i > 0$, x_j un suivant de x_i tel que $\mu_j > 0$; diminuer la capacité a_{ij} de l'arc joignant x_i à x_j de min $(\lambda_i, a_{ij}, \mu_j)$.

Règle 2 : Supposons que la règle 1 ne puisse plus être appliquée. Soit x_i un sommet tel que $\lambda_i > 0$; x_i n'a plus de suivant tel que $\mu_j > 0$ et $a_{ij} > 0$.

Soit j le premier indice d'un suivant de x_i tel que $a_{ij} > 0$. Diminuer a_{ij} de min (λ_i, a_{ij}).

Règle 2′ : Dans la même situation que pour la règle 2 sélectionner l'indice j du suivant de x_i se trouvant sur le plus court chemin entre x_i et un sommet x_p tel que $\mu_p > 0$. Diminuer a_{ij} de min (λ_i, a_{ij}).

C'est la règle 2 qui a été choisie pour la programmation sur ordinateur. Dans certains cas les règles 1, 2, 2′ peuvent donner un flot non optimal. Considérons le graphe G_1 (fig. 1) ; les chiffres entre crochets sont les capacités maximales des arcs. On voit aisément [2] que le flot maximal a une valeur de 4 (2 unités suivant le chemin x_0, x_1, x_2, x_7, 1 unité suivant le chemin x_0, x_1, x_3, x_4, x_7, 1 unité suivant le chemin x_0, x_5, x_6, x_7). Une coupe minimale est $\{x_0\}$, $\{X - x_0\}$, de capacité 4. Le calcul des déséquilibres donne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_5 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_4 = 1$, les autres λ_i et μ_i étant nuls.

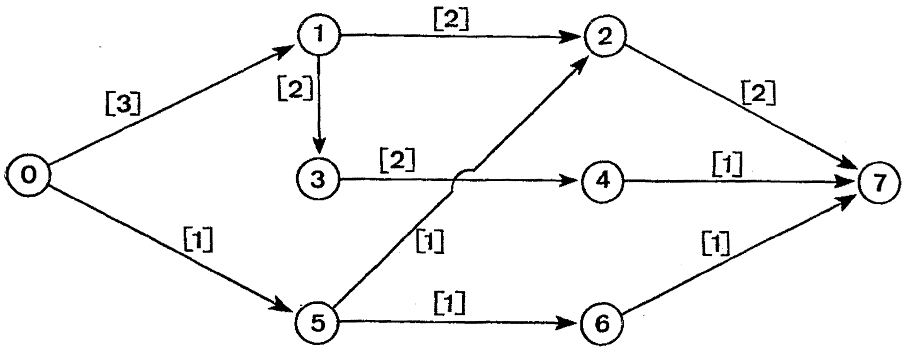

Figure 1

Appliquons la règle 1. Le déséquilibre en x_1 sera compensé en x_2 ; min $(\lambda_1, a_{12}, \mu_2) = \min (1, 2, 1) = 1$. La capacité maximale de l'arc (x_1, x_2) sera donc réduite d'une unité.

Dans le nouveau graphe obtenu, la valeur du flot maximal est 3 (1 unité suivant le chemin x_0, x_1, x_2, x_7, 1 unité suivant le chemin x_0,

x_1, x_3, x_4, x_7 et 1 unité suivant le chemin x_0, x_5, x_6, x_7 ou le chemin x_0, x_5, x_2, x_7). Une coupe minimale est $\{x_0, x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_2, x_5, x_6, x_7\}$, de capacité 3. Comme au cours des itérations ultérieures M.C.S. permet seulement de diminuer les capacités des arcs, on ne pourra obtenir de flot de capacité supérieure à 3.

Considérons le graphe G_2 (fig. 2) ; on voit aisément que le flux optimal est 3 (2 unités suivant le chemin x_0, x_1, x_2, x_3, x_{10} et une unité suivant le chemin x_0, x_1, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}). Une coupe minimale est $\{x_0\}$, $\{X - x_0\}$, de capacité 3.

Le calcul des déséquilibres donne $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\mu_9 = 3$, les autres λ_i et μ_i étant nuls. Comme x_1 et x_3 n'ont pas de suivants avec $\mu_i > 0$ la règle 1 ne peut être appliquée.

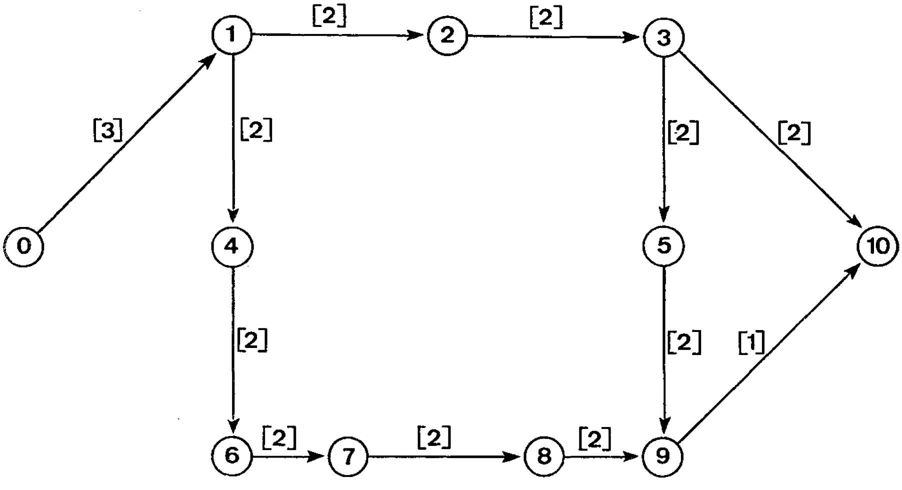

Figure 2

Appliquons la règle 2. Le déséquilibre en x_1 sera reporté en x_2 car 2 est le premier indice d'un suivant de x_1 ; a_{12} sera réduit de min $(\lambda_1, a_{12}) =$ min $(1, 2) = 1$.

Dans le nouveau graphe obtenu la valeur du flot maximal est 2 (1 unité suivant le chemin x_0, x_1, x_2, x_3, x_{10} et une unité suivant le chemin x_0, x_1, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}). Une coupe minimale est $\{x_0, x_1, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9\}$, $\{x_2, x_3, x_5, x_{10}\}$, de capacité 2. Comme au cours des itérations ultérieures M.C.S. permet seulement de diminuer les capacités des arcs, on ne pourra obtenir de flot de capacité supérieure à 2.

L'emploi de la règle 2' au lieu de la règle 2 conduit au même résultat. En effet, seul le sommet x_9 de G_2 a un $\mu_i > 0$. Deux chemins joignent x_1 à ce sommet : x_1, x_2, x_3, x_5, x_9, de longueur 4 et x_1, x_4, x_6, x_7, x_8, x_9 de longueur 5 ; x_2 est le suivant de x_1 se trouvant sur le plus court chemin de x_1 à x_9. Le déséquilibre de x_1 sera reporté en x_2, comme plus haut. L'application des règles 1, 2 et 2' ne donne donc pas toujours le flot optimal.

Toutefois, il est toujours possible d'arriver au flot optimal par des compensations successives des déséquilibres. En effet, soit G un graphe dont le flot optimal est connu. Soustrayons ce flot des capacités des arcs de G. On obtient un nouveau graphe G' aux arcs duquel sont associées des capacités $a'_{ij} \geqslant 0$. Les déséquilibres aux sommets de G' peuvent être compensés dans un ordre quelconque. Le flot obtenu dans G' sera évidemment nul. Si les compensations effectuées sur G' l'avait été sur G on aurait obtenu le flot optimal.

Il faudrait donc, pour fonder un algorithme de calcul du flot optimal par compensations successives des déséquilibres, trouver des règles pour déterminer les compensations licites. De telles règles peuvent être malaisées à obtenir car elles ne dépendent pas seulement de propriétés locales du graphe. Considérons en effet le graphe G_1. La compensation du déséquilibre du sommet x_1 au sommet x_2 n'est pas licite, comme on l'a montré plus haut. Cependant, si la capacité de l'arc (x_0, x_5) était de 2 au lieu de 1, la valeur de a_{12} pourrait être réduite à 1 sans que la valeur du flot maximal soit réduite (1 unité de flot suivant le chemin x_0, x_1, x_2, x_7, 1 unité suivant le chemin x_0, x_1, x_3, x_4, x_7, 1 unité suivant le chemin x_0, x_5, x_6, x_7 et 1 unité suivant le chemin x_0, x_5, x_6, x_7). Pour montrer qu'une réduction de capacité peut être faite dans un arc, il ne suffit pas d'examiner les déséquilibres en ses extrémités. La capacité d'autres arcs du graphe, éventuellement fort éloignés, peut être déterminante.

Une borne supérieure pour le nombre de chemins augmentant le flot par un algorithme de marquage a été récemment calculée par J. Edmonds et R. M. Karp [1] [3]. Cette borne est de n^3, n étant le nombre de sommets du graphe.

Peut-être est-ce un signe de ce qu'une autre approche des problèmes de flot que celle de Ford et Fulkerson mérite d'être cherchée et le travail de M. F. A. Oprescu poursuivi ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Edmonds and R. M. Karp, *A Labelling Method for Maximal Network Flows which is Bounded by a Polynomial in the Number of Nodes*, to appear as an IBM or NBS report. Voir aussi [3].

[2] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, New-Jersey (1962).

[3] T. C. Hu, *Integer Programming and Network Flows*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, Menlo Park California, London, Don Mills, Ontario (1969).

[4] M. F. A. Oprescu, « Le calcul du flux optimal dans un réseau par la méthode des compensations successives », *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 3e année, nº V-1, pp. 39-59 (1969).