

Revue d'Histoire des Mathématiques



La fonction inaugurale de La Géométrie de Descartes

Alain Herreman

Tome 18 Fascicule 1

2 0 1 2

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

RÉDACTION

Rédacteur en chef :

Norbert Schappacher

Rédacteur en chef adjoint :

Philippe Nabonnand

Membres du Comité de rédaction :

Tom Archibald

Alain Bernard

Frédéric Brechenmacher

Marie-José Durand-Richard

Étienne Ghys

Hélène Gispert

Jens Høyrup

Agathe Keller

Laurent Mazliak

Karen Parshall

Jeanne Peiffer

Sophie Roux

Joël Sakarovitch

Dominique Tournès

Directrice de la publication :

Aline Bonami

COMITÉ DE LECTURE

Philippe Abgrall

June Barrow-Greene

Umberto Bottazzini

Jean Pierre Bourguignon

Aldo Brigaglia

Bernard Bru

Jean-Luc Chabert

François Charette

Karine Chemla

Pierre Crépel

François De Gandt

Moritz Epple

Natalia Ermolaëva

Christian Gilain

Catherine Goldstein

Jeremy Gray

Tinne Hoff Kjeldsen

Jesper Lützen

Antoni Malet

Irène Passeron

Christine Proust

David Rowe

Ken Saito

S. R. Sarma

Erhard Scholz

Reinhard Siegmund-Schultze

Stephen Stigler

Bernard Vitrac

Secrétariat :

Nathalie Christiaën

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré

11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05

Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96

Mél : revues@smf.ens.fr / URL : <http://smf.emath.fr/>

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 67 €; prix public hors Europe : 76 €;
prix au numéro : 38 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

LA FONCTION INAUGURALE DE LA GÉOMÉTRIE DE DESCARTES

ALAIN HERREMAN

RÉSUMÉ. — Cet article introduit les notions de textes et d'énoncés inauguraux pour désigner les textes et les énoncés dont la fonction est d'inaugurer des représentations tenues pour conformes. Ces notions une fois définies, expliquées et discutées, on établit que *La Géométrie* de Descartes est un texte inaugural dont la particularité est d'inaugurer simultanément plusieurs représentations. On montre que la résolution des problèmes sémiotiques inhérents à ces inaugurations rend compte de la progression et de la structure du texte de Descartes. La fonction du problème de Pappus est en particulier reconsidérée dans cette perspective. Les enjeux et conséquences épistémologiques et historiographiques de ces notions et de ces résultats sont ensuite brièvement présentés.

ABSTRACT (The inaugural function of Descartes' *La Géométrie*)

This article introduces the concept of inaugural text, resp. inaugural statement, to designate texts, resp. statements, whose function is to inaugurate representations supposed to be faithful. Having defined, explained, and discussed these concepts, we subsequently establish that Descartes' *La Géométrie* is an inaugural text in our sense, whose characteristic is to inaugurate several representations. We show that solving the semiotic problems inherent in these inaugurations can explain the progress and structure of Descartes' text. For instance, the function of Pappus's problem is reconsidered in this perspective. To conclude, epistemological and historiographical issues and implications of our concepts and results are presented.

Texte reçu le 9 décembre 2010, révisé et accepté le 12 juillet 2011.

A. HERREMAN, Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR).

Courrier électronique : alain.herreman@univ-rennes1.fr

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A45, 01A85.

Mots clefs : *La Géométrie* de Descartes, sémiotique, historiographie, fondements des mathématiques, algèbre, géométrie, textes inauguraux.

Key words and phrases. — Descartes' *La Géométrie*, semiotics, historiography, foundations of mathematics, algebra, geometry, inaugural texts.

1. INTRODUCTION

Cet article introduit les notions de *textes et d'énoncés inauguraux*. *La Géométrie* de Descartes nous servira à les illustrer et à en montrer l'intérêt. Je commencerai par expliquer la notion générale de *fonction inaugurale* relative à l'introduction d'une nouvelle représentation symbolique. J'introduis ensuite cinq conditions qui serviront à préciser le type d'inauguration considérée et à identifier les textes qui accomplissent cette fonction. Cinq autres conditions similaires sont aussi données pour caractériser un type d'énoncé, les *énoncés inauguraux*, qui sont aussi communs à ces textes. L'application de ces conditions sera d'abord illustrée à partir de l'article de Turing qui introduit et soutient la « thèse de Church-Turing », l'article et la thèse étant ainsi des exemples respectivement de texte et d'énoncé inaugural.

La Géométrie est un texte inaugural dans le sens défini ici (voir II.2). Descartes y inaugure la représentation des problèmes de géométrie et des courbes géométriques par les équations algébriques. Reconnaître que *La Géométrie* est un texte inaugural c'est d'abord reconnaître que ce texte répond à une nécessité, qu'il remplit une fonction : l'inauguration de ces représentations. Cela permet de rendre compte de manière uniforme de l'ensemble de la stratégie argumentative déployée dans ce texte par Descartes en la rapportant à cette fonction inaugurale et aux problèmes sémiotiques auxquels toute inauguration est nécessairement confrontée¹. Le problème de Pappus, dont la résolution s'étend sur l'ensemble de *La Géométrie*, peut ainsi être entièrement rapporté à ses diverses fonctions inaugurales. Le recours aux instruments pour définir les courbes géométriques ainsi que l'intervention de la classification de Pappus peuvent aussi être rapportés à cette fonction. Je terminerai par quelques considérations sur l'intérêt de reconnaître en histoire des mathématiques les notions de textes et d'énoncés inauguraux.

¹ Quand il y aura un risque de confusion j'appellerai « problèmes sémiotiques » les problèmes posés par l'inauguration pour les distinguer des problèmes mathématiques reconnus comme tels. Ces problèmes se posent bien à Descartes mais le qualificatif « sémiotique » est bien sûr introduit par l'auteur de l'analyse (AH) qui ne se prononce par sur la perception que Descartes et ses contemporains pouvaient avoir de ces problèmes.

2. FONCTION ET CARACTÉRISATION DES TEXTES ET DES ÉNONCÉS INAUGURAUX

2.1. *La fonction des textes et des énoncés inauguraux*

Un texte mathématique recourt à diverses représentations : pour les nombres, les figures géométriques, les courbes, les fonctions, les énoncés mathématiques eux-mêmes, etc. Ces représentations ont des caractéristiques variées. Elles ont aussi une histoire. Comprendre un texte mathématique c'est notamment comprendre l'usage de ses représentations. Cette compréhension est aussi la condition pour qu'elles puissent être reprises, partagées, enseignées. L'historien des mathématiques se doit, comme le mathématicien, d'en comprendre l'usage, mais il se doit sans doute en plus d'en expliciter les caractéristiques pour en apprécier le rôle et leurs éventuelles implications. Ces représentations ne sauraient en particulier être utilisées sans avoir préalablement été introduites. Comme la maîtrise de l'usage d'une représentation reçue ne peut suffire à faire connaître celui d'une nouvelle, leur variété oblige à des développements spécifiques au moment où elles sont introduites pour la première fois. Une représentation doit ainsi être *inaugurée*. La forme prise par l'inauguration, c'est-à-dire les développements qui accompagnent l'introduction d'une nouvelle représentation vont nécessairement être en rapport avec les caractéristiques de celle-ci, ce qui donne un moyen de les connaître. Je vais ici m'intéresser à un type particulier de représentation dont l'inauguration détermine un type particulier de textes ou, inversement, à un type particulier de textes dont les caractéristiques communes mettent en évidence des caractéristiques communes à diverses représentations au moment de leur inauguration. La notion de *texte inaugural* désigne ici des textes semblables en raison de similitudes entre les représentations qu'ils inaugurent. L'intérêt est de mettre ainsi en évidence que des représentations par ailleurs très différentes, en l'occurrence toujours utilisées mais suivant des usages qui ont évolué, présentaient au moment de leur inauguration une caractéristique remarquable commune. Il est ainsi assez facile de les repérer au moment de leur introduction à partir des caractéristiques des textes qui les inaugurent. La caractéristique remarquable partagée par ces représentations au moment de leur inauguration est leur *conformité* à

ce qu'elles représentent : elles apparaissent pouvoir *tout* exprimer de ce qu'elles représentent et ne rien exprimer d'autre. Turing, par exemple², soutient dans son article de 1936 la conformité de ses machines logiques avec les nombres calculables : toutes les propriétés de ces nombres sont censées pouvoir être représentées par les machines logiques, et cette représentation ne doit pas introduire de propriétés qui ne seraient pas reconnues à ces nombres. Frege soutient de la même manière dans la *Begriffsschrift* la conformité de son idéographie avec les jugements de la pensée pure. Fourier soutient pour sa part dans la *Théorie analytique de la chaleur* la conformité des séries trigonométriques avec les fonctions. Descartes soutient quant à lui dans *La Géométrie* la conformité des équations polynomiales avec les problèmes de géométrie, ce qui l'amène à soutenir aussi la conformité des équations polynomiales (à deux inconnues) avec les courbes géométriques. C'est l'exemple qui sera développé ici. Tous ces textes inaugurent des représentations : machines de Turing, idéographie, séries trigonométriques et équations polynomiales. Leur particularité est de soutenir que la représentation qu'ils introduisent est *conforme* avec ce qu'elle représente : nombres ou fonctions calculables, contenus de jugement de la pensée pure, problèmes et courbes géométriques, fonctions. La représentation introduite doit en particulier être entièrement signifiante et n'excéder en rien ce qu'elle représente : pas de machine logique qui ne représente un nombre calculable, pas de diagramme qui ne représente un contenu de jugement, pas d'équation polynomiale qui ne représente un problème de géométrie ou une courbe géométrique. Chacune représente totalement (il ne manque rien de ce qui doit être représenté), intégralement (elle représente tout de ce qui est représenté) et fidèlement (la représentation n'ajoute pas de propriétés à ce qui est représenté). Mais cette conformité est aussi impossible à établir ; ce qui donne lieu à des textes semblables en grande partie consacrés à soutenir une conformité pour laquelle il n'existe aucun argument circonscrit et définitif.

Les *énoncés inauguraux* sont simplement les énoncés dans lesquels la conformité entre la nouvelle représentation et ce qu'elle représente est

² Ces exemples sont développés dans [Herreman 2010].

énoncée. La thèse de Turing en est un exemple. L'existence d'un type particulier d'énoncés résulte donc de la particularité des représentations considérées. Leur fonction est précisément de donner un énoncé à cette conformité. D'autres textes pourraient inaugurer des représentations avec d'autres caractéristiques communes sans qu'il soit possible de distinguer un type particulier d'énoncés.

Etablir l'existence de ce type de textes et d'énoncés revient à mettre en évidence le rôle récurrent de la *conformité* des représentations dans l'histoire des mathématiques au moment de leur inauguration. Cela met aussi en évidence que différents textes remplissent une même *fonction inaugurale* ce qui peut contribuer à mieux les comprendre en les rapportant aux nécessités inhérentes à cette fonction et aux caractéristiques de la représentation inaugurée. Les textes inaugurant des représentations conformes sont à cet égard des cas particuliers. Ces représentations sont aussi importantes par le fait de donner une expression à la *totalité* de ce qu'elles représentent. Elles permettent ainsi d'énoncer et de démontrer des énoncés généraux. Ce point capital ne sera guère développé ici.

2.2. *Caractérisation des énoncés et des textes inauguraux*

Les cinq conditions suivantes serviront à identifier un *texte inaugural* :

- (1) il met en jeu deux totalités (dualisme) ;
- (2) l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme) ;
- (3) l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
- (4) une fonction du texte est de soutenir que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
- (5) la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité).

De la même manière, les cinq conditions suivantes, semblables aux précédentes, serviront à identifier un *énoncé inaugural* :

- (1) l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
- (2) l'une des totalités est tenue pour pré-établie (réalisme),

- (3) l'autre totalité n'est pas tenue pour pré-établie sous la forme considérée ou dans le rapport considéré à la totalité pré-établie (inauguration) ;
- (4) l'énoncé affirme que la deuxième totalité, celle qui n'est pas pré-établie, est une représentation conforme de la première (conformité) ;
- (5) la démonstration de la conformité des deux totalités est impossible (incommensurabilité³).

La similitude des cinq conditions qui servent à identifier les textes et les énoncés inauguraux⁴ est évidente. Leur distinction se justifie d'abord par le fait que les unes caractérisent des textes, les autres des énoncés et il convient d'observer que l'inauguration conduit dans ce cas particulier à la distinction conjointe de types d'unités relevant de deux niveaux différents : le texte et la phrase. Il aurait été possible de ne donner que celles pour un énoncé inaugural et caractériser un texte inaugural comme étant un texte qui introduit un tel énoncé ; cela aurait fait dépendre l'identification du texte de celle de l'énoncé. Les conditions proposées ont l'intérêt de rendre l'identification d'un texte inaugural indépendante de celle de l'énoncé inaugural.

L'application de ces conditions peut être brièvement illustrée à partir de l'article de Turing [1936] et de sa « thèse ». L'énoncé inaugural est donné dès l'introduction de l'article et ensuite encore deux autres fois⁵ :

« Dans les sections 9 et 10, j'expose quelques arguments dans l'intention de montrer que les nombres calculables [suivant sa définition, c'est-à-dire par des

³ La notion d'incommensurabilité est ici une notion sémiotique qui ne doit pas être confondue avec celle de Kuhn. Il n'est cependant pas exclu, comme cela pourra apparaître progressivement, de rapporter certains aspects d'une partie des phénomènes considérés par Kuhn à des incommensurabilités sémiotiques.

⁴ Les notions de textes et d'énoncés inauguraux sont dans la suite exclusivement employées conformément aux définitions qui en sont données dans cet article.

⁵ « *Ce que j'affirme, c'est que ces opérations [effectuées par les machines logiques] englobent toutes celles qui peuvent être utilisées pour calculer la valeur d'un nombre.* » [Turing & Girard 1995, p. 52] ; « *It is my contention that these operations include all those which are used in the computation of a number.* » ([Turing 1936], [Davis 1965, p. 118]). « *les nombres "calculables" [nombres dont la représentation décimale peut être engendrée par une machine de Turing] incluent tous les nombres que l'on aurait naturellement tendance à considérer comme calculables.* » ([Turing 1936, p. 249], [Davis 1965, p. 135 ; trad. fr. 76])

machines logiques] incluent tous les nombres que l'on aurait naturellement tendance à considérer comme calculables. »⁶ [Turing 1936, trad. fr., p. 49].

L'enjeu de cet énoncé et de l'article est la représentation des nombres calculables (première totalité) par les « machines logiques », depuis appelées « machines de Turing » (deuxième totalité). L'énoncé et l'article se rapportent bien à deux *totalités*. Il y a bien un dualisme et les nombres calculables ont bien un caractère pré-établi. Cela ressort, entre autres, du fait que c'est à partir d'une analyse de ces nombres, reproduite dans l'article, que Turing nous dit avoir dégagé la définition de ses machines. Les nombres calculables sont ainsi tenus pour une totalité constituée préalablement à leur définition : *il y a* des nombres que « l'on aurait naturellement tendance à considérer comme calculables ». Turing ne considère pas en fixer l'extension. Le « réalisme » ne sert ici qu'à désigner un tel statut, sans aucun parti pris philosophique ; c'est un fait historique⁷. À l'inverse, les machines logiques ne sont pas présentées comme déjà constituées. C'est Turing qui les introduit et qui les met en rapport avec les nombres calculables. Il y a bien inauguration de ces machines. Leur introduction a le statut d'une nouveauté. Elle a une dimension historique reconnue, contrairement aux nombres calculables. L'énoncé et le texte soutiennent que ces machines sont une représentation *conforme* des nombres calculables⁸. Elles sont susceptibles de remplacer les nombres calculables, d'en tenir lieu. L'article est pour l'essentiel consacré à établir cette conformité. Turing déploie pour cela un faisceau d'arguments dont il propose lui-même une typologie :

« Je défendrai mon point de vue au moyen de trois types d'arguments :
(a) en faisant directement appel à l'intuition ;

⁶ « In §§ 9, 10 I give some arguments with the intention of showing that the computable numbers include all numbers which could naturally be regarded as computable. » ([Turing 1936], [Davis 1965, p. 116]).

⁷ C'est un fait historique que les nombres calculables ont ce caractère pré-établi dans le texte du Turing. Rien ne saurait évidemment être ici affirmé au delà de ce texte.

⁸ L'énoncé n'affirme en l'occurrence que l'inclusion des nombres calculables dans les nombres définissables par des machines logiques. Turing soutient bien aussi l'inverse mais il n'énonce ici que la partie qu'il juge non évidente.

(b) en démontrant l'équivalence de deux définitions (au cas où la nouvelle définition aurait un sens intuitif plus évident) ;

(c) en exhibant certaines grandes classes de nombres calculables. » [Turing 1936, trad. fr., p. 77].

Le premier type d'argument consiste à établir que les machines logiques ne font que reproduire les étapes accomplies par une personne lors d'un calcul. Turing expose sur plusieurs pages une analyse circonstanciée de ce qui est nécessaire pour effectuer un calcul et présente ses machines comme une réalisation minimale de ces conditions ([Turing 1936, trad. fr., p. 51–52] ; [Davis 1965, p. 117–118]). Tout suggère que c'est bien ainsi qu'il est lui-même arrivé à sa définition et qu'il rend ainsi compte d'un cheminement heuristique. Le réalisme est ici particulièrement manifeste.

Le deuxième type d'argument fait appel à l'équivalence des définitions candidates. Turing introduit pour cela lui-même une *deuxième* définition au cas où elle « *aurait un sens intuitif plus évident* »⁹ et démontre son équivalence avec celle basée sur les machines logiques¹⁰. Ayant eu ensuite connaissance des travaux de Church et de Kleene, il ajoutera dans un appendice les grandes lignes de la démonstration de l'équivalence entre sa définition et celle par les fonctions λ -définissables de Church [Adams 1983, p. 144].

Le troisième type d'argument consiste à montrer que de vastes classes de nombres tenus pour calculables satisfont la définition proposée. Un paragraphe entier, intitulé « Exemples de grandes catégories de nombres calculables », est consacré à cela. Turing y définit les notions de fonction calculable et de convergence et énonce une série de théorèmes qui en

⁹ « *In case the new definition has a greater intuitive appeal* » ([Turing 1936, trad. fr., p. 77], [Davis 1965, p. 135]).

¹⁰ Il reprend pour cette définition le système logique de Hilbert [Hilbert & Ackermann 1928, p. 73] et construit une formule exprimant dans ce système le prédicat « le nombre x est calculable ». Suivant cette définition, un nombre x est calculable si la formule obtenue en remplaçant x par α dans la formule précédente est démontrable dans ce système logique. Pour établir l'équivalence des deux définitions Turing démontre que pour chaque nombre α calculable en ce sens il existe une machine qui calcule ce nombre et réciproquement que les nombres calculables par une machine le sont aussi en ce sens.

donnent les propriétés attendues (« la composition de deux fonctions calculables est elle-même calculable » etc.). Il peut déduire de ces théorèmes que les nombres π , e , les nombres algébriques et les nombres de Bessel (zéros réels des fonctions de Bessel) sont calculables suivant sa définition.

Mais Turing reconnaît aussi qu'il ne peut démontrer que les machines logiques et les nombres calculables coïncident :

« Les arguments que nous pourrions donner doivent, par principe, faire appel à l'intuition, et seront pour cette raison plutôt insatisfaisants, mathématiquement parlant. » [Turing 1936, trad. fr., p. 76].

La condition d'incommensurabilité est ainsi elle aussi vérifiée et même explicitement reconnue par l'auteur. Cette impossibilité de *démontrer* l'énoncé inaugural oblige Turing à déployer un dispositif argumentatif spécifique afin d'établir au mieux la conformité de sa définition à la notion intuitive de nombre calculable. Pour marquer la différence avec une démonstration, je dirai que les arguments donnés *soutiennent* l'énoncé inaugural. On peut ainsi dire que la fonction d'un texte inaugural est de soutenir un énoncé inaugural. L'inauguration consiste dans ce cas à soutenir ce qui est affirmé par l'énoncé inaugural.

2.3. *Le statut des caractérisations proposées*

Les cinq conditions retenues visent à donner des critères *effectifs* pour identifier des énoncés et des textes inauguraux. Cela requiert de pouvoir les considérer séparément. Ces conditions sont néanmoins étroitement liées et cohérentes. La distinction des deux totalités qui fonde le dualisme est par exemple précisée par la condition portant sur le réalisme et la condition d'inauguration. Cette distinction est elle-même précisée par la condition d'incommensurabilité : les deux totalités en présence sont telles qu'il n'est pas possible de démontrer la correspondance annoncée. La conformité est une exigence très forte, voire exorbitante, qui même si elle n'est pas toujours explicite dans l'énoncé est néanmoins toujours saillante. Elle contribue fortement au caractère exceptionnel de ces énoncés et de ces textes. Elle est à la fois rare et facile à repérer parce que l'impossibilité d'y satisfaire oblige à des développements spécifiques. Elle est de ce fait

très utile pour repérer des textes susceptibles de satisfaire les autres conditions. La condition d'inauguration est aussi précisée par la conformité : nombre de questions sur l'influence possible d'autres travaux antérieurs, comme par exemple celle de Viète sur Descartes, sont ainsi considérablement réduites si l'on tient compte de la conformité, et plus encore de la forme qu'elle prend, c'est-à-dire en particulier de la totalité reçue considérée. La conformité confère aussi une acception très particulière au réalisme¹¹. La condition d'incommensurabilité stipule quant à elle qu'un énoncé inaugural ne saurait être démontré. Il s'agit d'une caractéristique objective. Il se trouve que cette caractéristique a été reconnue et soulignée par Turing, ou encore par Church, Kleene, Post et bien d'autres dans le cas de la thèse de Church-Turing. Il est ainsi sans doute plus facile de la reconnaître, même s'il y a eu aussi ensuite des propositions de démonstration. Néanmoins, l'incommensurabilité ne désigne pas le fait que celui qui énonce un énoncé inaugural le tienne pour indémontrable, mais bien le fait que cet énoncé soit indémontrable en raison du rapport considéré entre les deux totalités. Cette incommensurabilité est néanmoins toujours d'une certaine manière reconnue dans les textes inauguraux puisque c'est elle qui va leur conférer leurs caractéristiques : le caractère inaugural du texte est un indice de cette incommensurabilité parce que le dispositif argumentatif qu'il met en place en est une conséquence directe.

On peut d'emblée distinguer deux causes à l'impossibilité de donner une telle démonstration. Il y a d'abord l'impossibilité liée à la différence entre l'expression donnée, par exemple ici, aux machines logiques et l'expression, multiple et hétérogène, donnée à l'idée intuitive de nombre calculable. L'hétérogénéité rend impossible la démonstration ne serait-ce qu'en raison de l'impossibilité d'établir qu'il est possible de faire correspondre à n'importe quel nombre calculable une machine logique. C'est

¹¹ [Goldstein 2001 ; 2008 ; 2010] donnent des exemples d'expérimentations sur les nombres réalisées par Frenicle de Bessy et Charles Hermite par lesquels les mathématiques s'apparentent à une science naturelle. Ce « naturalisme » conditionne aussi le rapport de ces mathématiciens aux exemples, aux calculs, aux définitions, aux démonstrations, aux fondements, à l'écriture et à la présentation des mathématiques. C'est bien sûr une forme de réalisme (au sens considéré ici), mais il semble, pour ces deux mathématiciens, exclure la possibilité d'arriver à satisfaire la condition de conformité.

à cette impossibilité que renvoie le terme d'*incommensurabilité*. Mais il y a aussi l'impossibilité de considérer *toutes* les propriétés des nombres calculables comme il faudrait pouvoir le faire pour établir la conformité. Cela revient à distinguer deux problèmes dans la conformité : d'une part celui d'une simple *correspondance*, due à l'incommensurabilité, d'autre part celui posé par l'indétermination de ce qui reste encore à établir pour la conformité.

La condition d'incommensurabilité ne suppose pas une conception déterminée, voire figée, de la notion de démonstration. La question n'est pas la caractérisation conventionnelle et historique des démonstrations, mais l'indication d'une différence objective. Cette différence n'est pas proposée comme un critère de démarcation entre ce qui serait et ne serait pas une démonstration. Autrement dit, il est évidemment possible de considérer que le soutien est une forme de démonstration (et l'on peut simplement reformuler en conséquence les conditions d'« incommensurabilité » pour les textes et les énoncés). Le jugement sur ce qu'est ou n'est pas une démonstration, que ce soit par les auteurs des textes inauguraux eux-mêmes ou par tel ou tel historien, n'est pas en cause. Mon propos est, comme cela apparaîtra clairement ensuite, de mettre en évidence des différences objectives entre les arguments qui peuvent être mis en œuvre en raison de l'incommensurabilité et des problèmes posés par la conformité. Décider si ces différences dessinent une frontière pour la notion de démonstration est un autre problème. La reconnaissance de ces différences est indépendante des jugements des uns et des autres sur ce que doit satisfaire une série d'arguments pour être une démonstration.

Les cinq conditions qui ont été données ont, séparément ou ensemble, un intérêt propre mais leur rôle est bien surtout d'aider à l'identification d'un type de texte et d'énoncé. Elles ne sont qu'un moyen pour reconnaître des textes et des énoncés qu'il convient surtout de rapporter à leur *fonction inaugurale*. À cet égard elles aident à établir un fait épistémologique et historiographique, la récurrence d'un type d'énoncé et de texte, dont il importe de comprendre la nécessité éventuelle et les implications. L'attention ne doit pas tant porter sur ces cinq conditions que sur la fonction des textes et des énoncés qu'elles aident à identifier sans en épuiser la description.

2.4. *Ni une définition, ni un théorème...*

Les catégories usuelles de la logique ou de l'épistémologie ne reconnaissent pas la catégorie d'énoncé inaugural. Le fait que ces énoncés soient associés à un type de *texte*, ce qui n'est le cas d'aucune des catégories reconnues dans lesquelles on pourrait vouloir les faire entrer, suffit à l'établir. On peut à nouveau illustrer l'inadéquation de ces catégories à partir de l'exemple de la thèse de Church-Turing. Cette thèse est parfois assimilée à une définition, celle des nombres calculables. C'est là confondre la définition de ces nombres par les machines logiques et le fait de soutenir la conformité de cette définition à une conception considérée comme reçue, intuitive, naturelle, etc. de ces nombres. L'énoncé inaugural ne sert pas à définir mais à préciser le statut spécifique de la définition, et plus précisément celui de la représentation associée. Ce n'est pas non plus un théorème car des deux termes qu'il engage, ici les nombres calculables et les machines logiques, un seul est défini puisque l'un sert justement de définition pour l'autre. Et dans le cas où l'on a plusieurs de ces définitions, par exemple celle de Church et celle de Turing, il devient possible de démontrer leur équivalence comme le fait Turing, mais ça n'est pas une démonstration de l'énoncé inaugural. Il importe d'ailleurs de distinguer les énoncés inauguraux d'un autre type d'énoncés proches, aussi remarquables mais néanmoins distincts, les *théorèmes de représentation*. La conformité et plus encore l'incommensurabilité permettent de ne pas les confondre. Un théorème de représentation peut être caractérisé comme suit :

- (1) l'énoncé met en jeu deux totalités (dualisme) ;
- (2) l'énoncé affirme une équivalence entre ces deux totalités (équivalence) ;
- (3) l'équivalence est démontrée (commensurabilité).

Un théorème de représentation est essentiellement un énoncé inaugural sans l'incommensurabilité et pour lequel la conformité est réduite à une correspondance.

Les énoncés inauguraux ne sont pas non plus des axiomes. La conformité qu'ils soutiennent n'implique rien, elle n'est pas le point de départ d'autres raisonnements mathématiques. Il est facile de constater qu'ils

n'ont pas cette fonction. Invoquer la thèse de Turing pour s'épargner par exemple la vérification que des nombres intuitivement calculables sont des nombres calculables, au sens de la définition adoptée, n'est qu'un expédient. Que tel nombre soit considéré comme calculable n'en est pas une conséquence.

Ainsi, l'une ou l'autre des cinq conditions proposées pour identifier les énoncés inauguraux empêche de les confondre avec des types d'énoncés traditionnellement reconnus en épistémologie ou en logique.

Dans ce qui suit je vais m'attacher à montrer que *La Géométrie* de Descartes est aussi un texte inaugural. Ce texte se distingue par sa richesse inaugurale. Il inaugure principalement la représentation des problèmes de géométrie par les équations polynomiales. Mais cette inauguration amène Descartes à aussi inaugurer la représentation des courbes géométriques par des équations algébriques. Et cette inauguration a aussi besoin de l'inauguration préalable de la représentation des courbes géométriques par des instruments. Il n'est pas difficile de vérifier que c'est un texte inaugural et d'en donner les énoncés inauguraux. L'intérêt n'est pas tant de montrer qu'il vérifie les cinq conditions données que de montrer qu'il est possible de rendre compte de manière cohérente et uniforme de la progression de ce texte apparemment disparate à partir des problèmes spécifiques posés par l'inauguration d'une représentation conforme. Cela fait, je reprendrai quelques-uns des principaux sujets qui parcourent *La Géométrie* en les rapportant à leur fonction inaugurale, proposant ainsi d'en rendre compte par cette fonction.

3. LA GÉOMÉTRIE DE DESCARTES

3.1. Les énoncés inauguraux de La Géométrie

La Géométrie de Descartes commence par l'affirmation selon laquelle :

« Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. » 170¹²

¹² Les citations et les numéros de page suivent l'édition originale de 1637 reprise dans l'édition d'Adam & Tannery.

Tout le livre atteste qu'il s'agit ici d'exprimer les problèmes de géométrie au moyen d'expressions algébriques. Deux totalités sont ainsi en jeu : les problèmes de géométrie et les expressions algébriques. Les problèmes de géométrie forment une totalité constituée d'énoncés, de figures, de méthodes et de solutions reçue par Descartes et ses contemporains. L'Algèbre n'est pas, loin s'en faut, un procédé nouveau¹³. Descartes y fait référence comme à un procédé reconnu : il ne la présente pas, ne s'explique pas sur son recours et ne mentionne aucun ouvrage. Mais son usage des équations algébriques ne suggère pas qu'elles aient d'existence préalable propre, qu'elles seraient des expressions reçues qu'il utiliserait suivant un rapport déjà établi qu'il pourrait se contenter de reprendre et de rappeler¹⁴ : leur introduction se présente comme l'inauguration d'un nouveau rapport entre ces expressions et les problèmes de géométrie. L'énoncé cité fait valoir la possibilité de transformer tout problème de géométrie en une équation algébrique, c'est-à-dire de le mettre en équation de telle sorte que la résolution algébrique de l'équation soit équivalente à la résolution géométrique du problème. La conformité entre les équations algébriques et les problèmes de géométrie est un thème récurrent chez Descartes¹⁵. Elle est aussi impossible à établir : l'impossibilité de parcourir d'une quelconque manière la totalité des problèmes de géométrie, l'hétérogénéité entre leurs expressions et les expressions algébriques interdisent une telle démonstration. Cet énoncé a donc bien toutes les caractéristiques d'un

¹³ [van Egmond 1988] ; [Scholz 1990] ; [Giusti 1992] ; [Cifoletti 1996].

¹⁴ Il ne s'agit évidemment pas ici d'ignorer l'Algèbre arabe ou, plus proche de Descartes, celle de Nicolas Chuquet ([1484]), Pedro Nuñez ([1567]), Paolo Bonasoni ([1575]) et surtout de François Viète ([1591 ; 1593a ; 1593b ; 1593c], etc.). Nous ne considérons ici que le statut des expressions polynomiales que Descartes présente et dont il traite comme si elles n'avaient jamais été introduites auparavant à l'exception des cas où il est amené à considérer des valeurs numériques, par exemple p. 333, qui dénote un usage antérieur des équations. Il ne s'agit pas de se prononcer ici sur l'influence que l'œuvre de Viète a pu exercer sur celle de Descartes. Il s'agit seulement d'observer que cette œuvre n'a pas dispensé Descartes d'écrire un texte *inaugurant* la représentation des problèmes et des courbes géométriques par les équations.

¹⁵ On peut citer par exemple : « *Par ce moyen, non seulement nous ferons l'économie d'un grand nombre de mots, mais, ce qui est plus important, nous présenterons les termes de la difficulté si purs et si dépouillés que, sans rien oublier d'utile, on n'y trouvera jamais rien de superflu et qui occupe inutilement l'esprit, quand la pensée devra embrasser plusieurs choses à la fois.* » Descartes, *Regulae*, Règle XVI, trad. 108.

énoncé inaugural. Toutes ces caractéristiques ressortent aussi clairement du paragraphe qui conclut l'ouvrage :

« Mais mon dessein n'est pas de faire un gros livre, & je tasche plutost de comprendre beaucoup en peu de mots, comme on jugera peutestre que j'ay fait, si on considere qu'ayant reduit a une mesme construction tous les Problemes d'un mesme genre, j'ay tout ensemble donné la façon de les reduire a une infinité d'autres diverses, & ainsi de resoudre chascun d'eux en une infinité de façons ; puis, outre cela, qu'ayant construit tous ceux qui sont plans, etc. » 412–413

Comme cette conformité ne peut être démontrée, *La Géométrie* va être à peu près entièrement consacrée à la soutenir.

Mais *La Géométrie* comprend aussi un deuxième énoncé inaugural relatif celui-ci aux courbes géométriques et aux équations :

« Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. » 322–323

La dualité concerne cette fois la totalité des courbes, et non plus celle des problèmes de géométrie, avec toujours en regard les équations algébriques (de deux variables). Il s'agit bien aussi d'affirmer la conformité de ces deux totalités et d'inaugurer ainsi un nouveau rapport entre elles¹⁶. L'incommensurabilité de leurs expressions respectives rend impossible une démonstration de cette conformité, impossibilité renforcée par l'absence d'une description des courbes qui permettrait de les considérer toutes ce dont une démonstration aurait besoin d'une manière ou d'une autre. Il s'agit bien à nouveau d'un énoncé inaugural à ceci près tout même que les courbes géométriques ne sont pas une totalité constituée. En fait elle le sera au cours de *La Géométrie* parce qu'avant d'introduire cet énoncé Descartes aura lui-même inauguré la totalité des courbes

¹⁶ Cette conformité a déjà été soulignée dans [Panza 2005, p. 42] : « *Le grand défi de la géométrie de Descartes est justement de parvenir à déterminer des procédures permettant de déduire des propriétés géométriques fondamentales de n'importe quelle courbe géométrique à partir de l'équation qui l'exprime, sans passer par l'exhibition de celle-ci.* » En revanche, M. Panza me semble manquer le problème spécifique posé par l'incommensurabilité quand il écrit à propos de la correspondance entre courbes géométriques et équations algébriques : « *Descartes l'affirme davantage qu'il le prouve* » [Panza 2005, p. 35].

géométriques. Cette inauguration se fera au moyen d'instruments. Il y a bien à nouveau deux totalités (dualisme) : celle des instruments et celle des courbes. Les instruments ont, du fait de la matérialité qui leur est associée, un caractère pré-établi (réalisme). Les caractéristiques choisies sont susceptibles de conférer aux courbes leur caractère géométrique (conformité). Et il est impossible de démontrer que les instruments sont conformes aux courbes géométriques (incommensurabilité). Cette inauguration se double d'une autre : celle des équations polynomiales par les instruments. Cela fait deux inaugurations supplémentaires, soit un total de quatre¹⁷.

Le tableau ci-dessous récapitule ces quatre inaugurations.

	<i>Totalité pré-établie</i>	<i>Totalité inaugurée</i>	<i>Énoncé</i>
1	Problèmes de géométrie	Équations polynomiales	Tous les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin, par après, que de connaître la longueur de quelques lignes droites, pour les construire. Livre I, 170
2	Courbes géométriques	Équations polynomiales (deux variables)	Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. Livre II, 322-323
3	Instruments	Courbes géométriques	
4	Instruments	Équations polynomiales	

TABLE 1. Les quatre inaugurations

L'ordre adopté dans le tableau ne correspond pas à l'ordre d'introduction des énoncés inauguraux ou des inaugurations. L'énoncé inaugural

¹⁷ Ces deux dernières inaugurations ne sont pas associées dans le texte à des énoncés inauguraux. Ces inaugurations, on le verra, ne font néanmoins aucun doute, et l'absence d'énoncé inaugural proprement dit se justifie simplement par le caractère secondaire de ces inaugurations. Néanmoins, pour qu'il n'y ait pas de confusion j'utiliserai un astérisque et parlerai d'« énoncé* inaugural ».

de la première est bien, comme on l'a vu, introduit en premier. Le début et la fin de son inauguration coïncide avec le début et la fin de *La Géométrie*. Mais les deux dernières inaugurations se font avant que ne soit énoncé le deuxième énoncé inaugural qui a besoin de l'inauguration préalable des courbes géométriques. L'ordre retenu, qui sera utilisé pour faire référence aux énoncés inauguraux et aux inaugurations, est conforme à l'« ordre inaugural », c'est-à-dire qu'il rend compte de l'implication de ces énoncés dans le soutien des autres. Ainsi, les énoncés* 3 et 4 participent au soutien de l'énoncé 2 qui participe au soutien de l'énoncé 1. En notant « B participe au soutien de A » par $A \Leftarrow B$, on a :

$$\text{Énoncé 1} \Leftarrow \text{Énoncé 2} \Leftarrow \text{Énoncé* 3, Énoncé* 4}$$

3.2. Un texte inaugural

3.2.1. Représentation d'ensemble de l'inauguration

La Géométrie est un texte bien connu et sa structure a déjà maintes fois été présentée¹⁸. Je me propose dans cette partie de montrer que l'on peut rendre compte de manière cohérente du déroulement de celle-ci en la rapportant aux étapes nécessaires pour soutenir la possibilité de représenter les problèmes de géométrie et les courbes géométriques par des équations algébriques. Le schéma ci-dessous en propose une représentation d'ensemble qui sera établie ensuite à partir du texte.

Ce schéma fait apparaître les diverses totalités en jeu et met en correspondance les inaugurations avec les trois Livres de *La Géométrie*. Le soutien du premier énoncé inaugural s'étend sur les trois Livres. Le deuxième énoncé inaugural, introduit au Livre II, fait partie de l'inauguration du premier et son soutien s'achève, avec celui du premier, à la fin du texte. Les troisième et quatrième énoncés* inauguraux, qui interviennent dans le Livre II, servent à leur tour au soutien du deuxième et du premier.

De nombreux thèmes sont abordés dans *La Géométrie* : le problème de Pappus et sa résolution, la construction point par point des courbes, la classification de Pappus des problèmes de géométrie, la définition des courbes géométriques, la méthode algébrique pour déterminer la normale à une

¹⁸ [Tannery & Loria 1926, p. 530–536] ; [Boyer 1956] ; [Jullien 1996] ; [Bos 1998], [Bos 2001, p. 291].

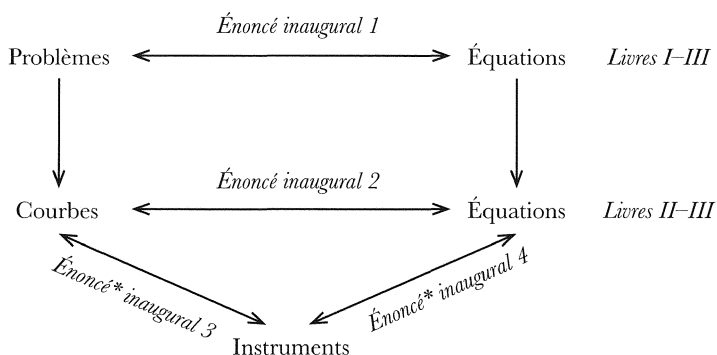


FIGURE 1. Relations entre les énoncés inauguraux

courbe, les ovales, la réduction des équations polynomiales, etc. La simplicité de ce schéma au regard du nombre et de la variété de ces thèmes laisse entrevoir une certaine adéquation entre l'analyse inaugurale de *La Géométrie* et son découpage en trois Livres. Nous verrons de quelle manière tous ces thèmes y trouvent leur place.

Les deux figures suivantes donnent le schéma du dispositif inaugural qui soutient les deux principaux énoncés inauguraux.

Le soutien du premier énoncé inaugural peut être représenté comme suit (pour la correspondance) :

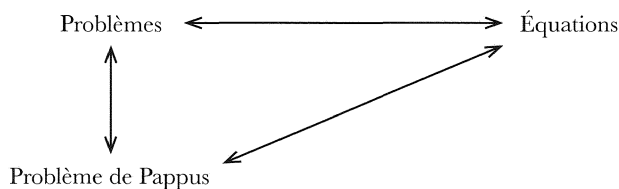


FIGURE 2. Soutien de la correspondance entre problèmes et équations

Ce schéma, qui sera établi progressivement et discuté, met en évidence le rôle essentiel du problème de Pappus dans cette inauguration. Nous verrons que ce problème sert à représenter tous les problèmes de géométrie (flèche verticale vers le bas). Sa mise en équation (flèche oblique montante vers la droite) conduit à une équation à la fois *générale* puisqu'elle dépend du nombre de lignes considérées et *particulière* puisqu'elle n'est

en définitive l'équation que d'un problème. La résolution de ces équations qui parcourt toute *La Géométrie* soutient la possibilité de résoudre ainsi tous les problèmes. Inversement, dans la mesure où Descartes considère que toute équation polynomiale s'obtient par la mise en équation du problème de Pappus pour un certain nombre de droites dans une certaine configuration (flèche oblique descendante vers la gauche), toute équation correspond inversement à un problème de géométrie.

Le soutien du deuxième énoncé inaugural peut être représenté comme suit :

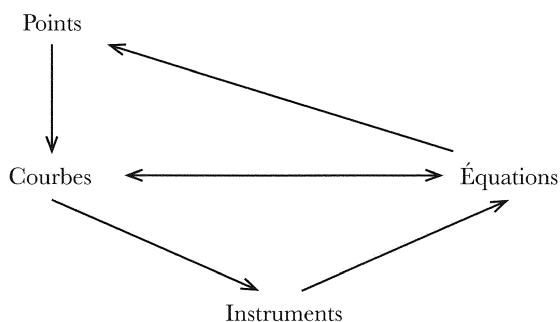


FIGURE 3. Soutien de la correspondance entre problèmes et équations

Ce schéma indique que la possibilité de faire correspondre une équation polynomiale à une courbe géométrique est soutenue par le tracé de cette courbe au moyen d'un instrument et ensuite par la « mise en équation » de celui-ci (partie inférieure du schéma). Nous verrons que le système d'équerres introduit par Descartes joue vis-à-vis des instruments et des courbes (rapportées à leur genre) le même rôle que le problème de Pappus vis-à-vis des problèmes et de leurs équations.

La possibilité de faire correspondre une courbe géométrique à une équation polynomiale est inversement soutenue par la possibilité de tracer point par point les solutions d'une telle équation et d'obtenir ainsi une courbe géométrique (partie supérieure du schéma), c'est-à-dire admissible, ce qui doit aussi être soutenu. Les troisième et quatrième énoncés* inauguraux interviennent dans l'inauguration représentée dans la partie basse du schéma, mais aussi dans celle représentée dans la partie

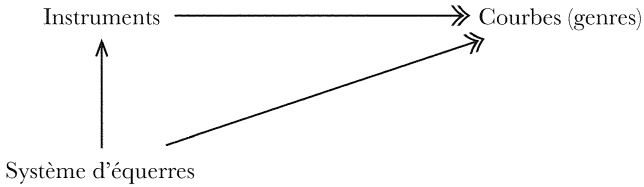


FIGURE 4.

haute pour assurer que les courbes tracées point par point sont bien géométriques.

Ces schémas ne concernent que le soutien des *correspondances* entre les totalités concernées. Or c'est leur *conformité* qu'il s'agit de soutenir. En particulier, la résolution des équations doit être conforme à la résolution des problèmes de géométrie représentés par ces équations. Les courbes trouvées à partir des équations doivent pour cela correspondre aux courbes trouvées sans recourir aux équations. Soutenir la *correspondance* du deuxième énoncé participe du soutien de la *conformité* du premier. Les deux schémas entrent dans la description de l'inauguration du premier énoncé inaugural.

3.2.2. L'inauguration dans le texte

Je vais maintenant considérer successivement les trois Livres de *La Géométrie* pour établir et préciser les schémas qui ont été donnés des énoncés inauguraux, des inaugurations et de leurs rapports mutuels. Je vais montrer qu'il est possible de rapporter le découpage et la progression de ce texte aux étapes requises par ces inaugurations. Je montrerai en particulier que l'ensemble du texte se développe avec le souci constant de garantir la *conformité* des représentations introduites. Nous pourrions constater, et j'y reviendrai encore ensuite un peu plus précisément, que les différents sujets traités contribuent tous à résoudre les problèmes posés soit par l'incommensurabilité des représentations considérées soit par le souci d'en établir la conformité, et qu'ils se suivent en raison du rôle qu'ils y jouent.

3.2.2.1. Livre I : « Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites »

Le premier Livre de *La Géométrie* est consacré aux problèmes qu'il est possible de résoudre uniquement au moyen de droites et de cercles, c'est-à-dire aux problèmes plans. Descartes commence par introduire le premier énoncé inaugural, déjà cité, puis construit la différence de deux segments, leur somme, leur produit, leur rapport et la racine carrée d'un segment (en précisant qu'il reviendra sur les racines cubiques). Il tire ici parti du fait qu'il dispose d'une description des *expressions algébriques* en tant que combinaisons d'additions, de soustractions, de divisions et de racines carrées. Cette description est telle que ces expressions peuvent être *toutes* parcourues¹⁹. Il est ainsi possible, *contrairement aux problèmes de géométrie plans*, d'en disposer dans leur totalité. Cela lui permet d'établir que *toutes* les expressions algébriques composées à partir de ces opérations peuvent être interprétées géométriquement. De plus, la construction *algébrique* de l'expression algébrique est *conforme* à la construction *géométrique* de l'expression géométrique, c'est-à-dire du segment associé. Les opérations algébriques sont géométriquement constructibles et il n'y a pas d'expression algébrique qui n'ait été ainsi préalablement pourvue d'un contenu géométrique²⁰. Il ne s'agit évidemment pas, et il ne saurait s'agir pour Descartes de se contenter de présupposer, comme nous pourrions être enclins à le faire aujourd'hui, qu'une expression algébrique représente un *nombre* et qu'à tout nombre est associé un segment. Ce serait là un autre énoncé inaugural qui n'est ni énoncé ni moins encore mis en œuvre par Descartes.

Cette interprétation géométrique des expressions algébriques introduite d'emblée servira aussi bien pour construire, point par point, une courbe à partir de son équation (par exemple p. 314), que pour garantir *a priori* que toutes les expressions algébriques qui interviendront dans la mise en équation d'un problème de géométrie ou dans sa résolution

¹⁹ « Et comme toute l'Arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations, qui sont : l'Addition, la soustraction, la Multiplication, la Division, & l'Extraction des racines, etc. » (297).

²⁰ Ce point a été particulièrement souligné et étudié par H. Bos. Voir aussi Panza [2005, p. 23–43].

ont bien un contenu géométrique. Elle participe donc au soutien des deux énoncés inauguraux (bien que seul le premier ait, à ce moment, été introduit).

Descartes explique ensuite comment obtenir l'équation correspondant à un problème (« *comment il faut venir aux équations qui servent à résoudre les problèmes* », 300). Ce faisant il soutient le premier énoncé inaugural dans le sens *problèmes* → *équations*.

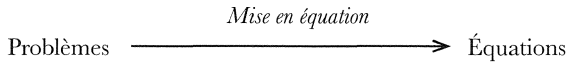


FIGURE 5. Tout problème de Géométrie peut être représenté par une équation. Livre I (301).

La description de la procédure de mise en équation ne dépend pas du genre du problème (plan, solide, etc.). Mais Descartes ne peut ici qu'indiquer les règles à suivre : supposer le problème résolu, donner un nom à toutes les lignes, etc. Il ne peut faire mieux car il n'a pas d'expression générale, géométrique ou dans la langue naturelle, pour les problèmes de laquelle il pourrait dériver l'équation. Il a ici un *problème d'expression*. Il ne peut pas en particulier établir que l'on arrive nécessairement à une équation algébrique et *a fortiori* à une équation d'un degré déterminé.

Après avoir ainsi indiqué avec les moyens d'expression dont il dispose la méthode pour mettre un problème en équation, il ne peut en définitive que réaffirmer pour les problèmes plans l'énoncé inaugural général selon lequel « *on peut toujours réduire ainsi toutes les quantités inconnues à une seule, lorsque le Problème se peut construire par des cercles & des lignes droites, ou aussy par des sections coniques, ou mesme par quelque autre ligne qui ne soit que d'un ou deux degrés plus composée* » (301).

Descartes se restreint ensuite à nouveau au premier rang de la hiérarchie des problèmes : les problèmes plans. Il soutient alors qu'en réduisant correctement l'équation obtenue « *il n'y restera, tout au plus, qu'un quarré inconnu esgal à ce qui se produit de l'addition, ou soustraction, de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussi connue.* » (302). Il soutient ici que les problèmes plans correspondent exactement aux équations du second degré. Puis, changeant à nouveau de sens de lecture de l'énoncé inaugural, il peut *démontrer* cette fois que les solutions de

ces équations sont constructibles à la règle et au compas (302–304). Il peut alors soutenir à nouveau qu'« on peut construire tous les Problèmes de la Géométrie ordinaire [plans], sans faire autre chose que le peu qui est compris dans les quatre figures que j'ay expliquées » (304). Il soutient ainsi que les équations représentent les problèmes de géométrie, mais aussi, dans le cas des problèmes plans, qu'il est possible de retrouver à partir d'elles l'attribut principal des problèmes : leur solution. Les équations du second degré donnent de ce fait une représentation *conforme* des problèmes plans. À ce stade, le soutien du premier énoncé inaugural *pour les problèmes plans* est en grande partie achevée (si l'on excepte ce qui passe par le soutien du deuxième).

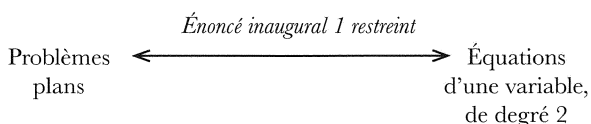


FIGURE 6. Le premier énoncé inaugural est soutenu pour les problèmes plans et les équation d'une variable de degré 2.

Livre I (304)

Descartes introduit ensuite le problème de Pappus²¹. La fin du premier Livre lui est consacrée. Ce problème demande de déterminer le lieu des

²¹ A & T, VI, 721 ; [Vuillemin 1960, p. 99–112] ; [Bos 1992] ; [Bos 2001, p. 313–334] ; [Maronne 2007, p. 43–151] ; [Maronne 2008]. Descartes cite le problème de Pappus à partir de l'édition latine de la *Collection* par Commandino [Pappus 1588–1589] puis le réénonce de la manière suivante : « *La question donc, qui avoit esté commencée a résoudre par Euclide & poursuivie par Apollonius, sans avoir esté achevée par personne, estoit telle. Ayant trois, ou quatre, ou plus grand nombre de lignes droites données par position, premierement, on demande un point duquel on puisse tirer autant d'autres lignes droites, une sur chacune des données, qui facent avec elles des angles donnés ; & que le rectangle contenu en deux de celles qui seront ainsi tirées d'un mesme point, ait la proportion donnée avec le carré de la troisième, s'il n'y en a que trois ; ou bien avec le rectangle des deux autres, s'il y en a quatre. Ou bien, s'il y en a cinq, que le parallelepipedé composé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipedé composé des deux qui restent, & d'une autre ligne donnée. Ou, s'il y en a six, que, que le parallelepipedé composé de trois ait la proportion donnée avec le parallelepipedé des trois autres. Ou, s'il y en a sept, que ce qui se produit lorsqu'on en multiplie quatre l'une par l'autre, ait la raison donnée avec ce qui se produit par la multiplication des trois autres, & encore d'une autre ligne donnée. Ou, s'il y en a huit, que le produit de la multiplication de quatre ait la proportion donné avec le produit des quatre autres. Et ainsi cete question se peut estendre a tout autre nombre de lignes. Puis, a cause qu'il y a toujours une infinité de divers poins qui peuvent satisfaire a ce qui est icy demandé, il est aussy requis de connaître & de tracer la ligne dans laquelle ils doivent tous se trouver (...).* » Livre I, 306–307

points dont le rapport des produits des distances, considérées sous des angles donnés à des droites données, est égal à un nombre donné (en distinguant selon que le nombre des droites est pair ou impair). Il l'énonce d'abord pour un nombre quelconque de lignes puis procède à sa mise en équation. Il décrit l'équation obtenue plus qu'il ne l'écrit se contentant de déterminer le degré maximal atteint par les deux variables en fonction du nombre de lignes considérées²². Néanmoins, il peut tout de même dans ce cas esquisser la mise en équation et obtenir des indications sur le degré de l'équation obtenue, ce qu'il ne pouvait pas faire en considérant un problème quelconque pour lequel il n'a aucune expression.

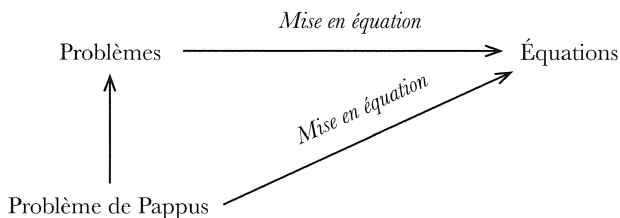


FIGURE 7. Mise en équation du problème de Pappus. Livre I (313)

Il entame la résolution du problème jusqu'à cinq lignes qui conduit à un problème plan (pour la construction *des points*)²³. En « *prenant une quantité connue pour y* », la quantité x est alors déterminée par une équation du second degré à une seule inconnue qui peut être construite au moyen de droites et de cercles, sans qu'il soit nécessaire de donner une expression algébrique de y en fonction de x . Il obtient ainsi une construction *géométrique* mais *point par point* de la courbe (304–314). Cette construction laisse entière la question de l'identification de la courbe, c'est-à-dire de la solution du problème, et en particulier la détermination de son genre et de sa

²² « *Puis vous voyés aussi que, multipliant plusieurs de ces lignes l'une par l'autre, les quantités x & y , qui se trouvent dans le produit, n'y peuvent avoir que chascune autant de dimensions qu'il y a eu de lignes, a l'explication desquelles elles servent, qui ont esté ainsi multipliées. En sorte qu'elles n'auront jamais plus de deux dimensions, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de deux lignes, ny plus de trois, en ce qui ne sera produit que par la multiplication de trois; & ainsi a l'infini.* » 312–313.

²³ Le genre de la construction point par point ne doit pas être confondu avec celui du problème.

nature. Le Livre I s'achève, ou plutôt s'interrompt, à ce stade de la résolution du problème de Pappus jusqu'à cinq lignes.

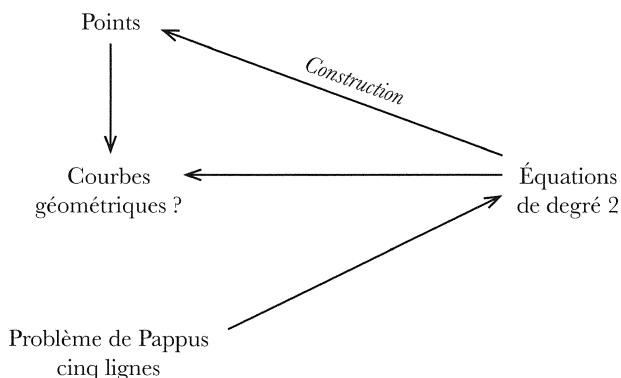


FIGURE 8. Soutien du deuxième énoncé inaugural pour les équations dérivées du problème de Pappus jusqu'à cinq lignes. Construction point par point des solutions. La nature des courbes reste indéterminée. Livre I (314)

3.2.2.2. Livre II : « De la nature des lignes courbes »

Le livre II s'ouvre sur les considérations sur « *la nature des lignes courbes* » (315–323). Descartes rappelle la classification des problèmes de géométrie présentée par Pappus, déjà mise en œuvre au Livre I. Celle-ci distingue d'une part les problèmes plans qui peuvent être résolus avec des droites et des cercles, d'autre part les problèmes solides qui ne requièrent que les trois sections coniques (paraboles, hyperboles, ellipses) et enfin les problèmes linéaires, qui requièrent l'introduction d'autres courbes comme la spirale, la quadratrice, la conchoïde ou la cissoïde. Il revient ensuite sur la distinction entre courbes mécaniques et géométriques. Au lieu d'une démarcation simplement fondée sur le recours ou non à des instruments pour les tracer, dont il fait remarquer qu'elle devrait de toute façon conduire à compter les droites et les cercles parmi les courbes mécaniques, il propose de prendre en compte les caractéristiques des instruments utilisés (315–323) et de considérer comme géométriques toutes les courbes « *descrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précédent* » (316). Les arguments donnés servent à soutenir que toutes les

courbes ainsi tracées sont des courbes géométriques et qu'on les obtient ainsi toutes. C'est le troisième énoncé* inaugural.

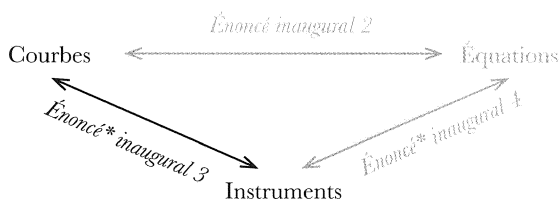


FIGURE 9. Le troisième énoncé* inaugural est soutenu. Livre II (323)

Descartes soutient ensuite que le dispositif instrumental permet aussi d'obtenir l'équation de la courbe qu'il sert à tracer, c'est le (premier sens du) quatrième énoncé* inaugural.

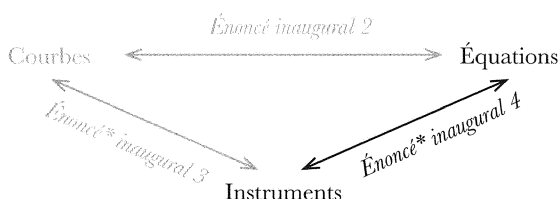


FIGURE 10. Le quatrième énoncé* inaugural (soutenu dans le sens instruments → équations). Livre II (323)

Le deuxième énoncé inaugural est *énoncé* ici (déjà cité) :

« Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvu qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. » 322–323

Cet énoncé affirme que les courbes géométriques sont exactement les courbes que l'on peut construire point par point à partir d'une équation algébrique. Une construction point par point se fait à partir d'une équation, ce qui suppose qu'une équation puisse être associée à la courbe, puis que l'on retrouve ainsi la courbe à partir de son équation. Descartes considère que l'on obtient ainsi *toutes* les équations (de 2 variables).

La caractérisation instrumentale des courbes (troisième énoncé* inaugural) et la description par une équation des rapports entre les parties

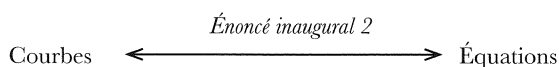


FIGURE 11. Le deuxième énoncé inaugural. Livre II (323)

d'un instrument (premier sens du quatrième énoncé* inaugural) permettent d'associer à chaque courbe géométrique une équation, et ainsi de soutenir le premier sens de la correspondance du deuxième énoncé inaugural.

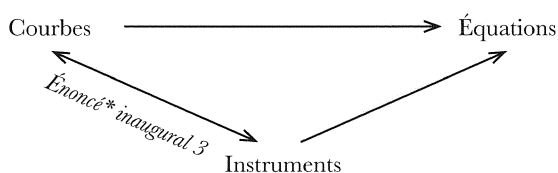


FIGURE 12. Soutien du premier sens du deuxième énoncé inaugural. Livre II (323)

Descartes reprend alors la résolution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes interrompue avec le Livre I. Il était arrivé à la fin de ce Livre à une construction géométrique des courbes solutions mais seulement point par point. Il en donne à présent la construction géométrique globale en identifiant les coniques solutions à partir de leurs équations et en en déterminant les paramètres à partir de leurs coefficients de telle sorte à pouvoir les construire suivant les procédés établis par Apollonius (329, 331, 332). Il transforme pour cela l'équation obtenue de manière à exprimer y en fonction de x , en distinguant différents cas selon la position des droites données (parallélisme), puis en identifiant et en caractérisant la conique correspondant à chaque équation (en montrant que les caractérisations géométriques données par Apollonius conduisent aux mêmes équations). Ceci achève la résolution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes (334), puisque la construction algébrique des solutions (passant par les équations) a été ressaisie et rendue conforme à la construction géométrique habituelle.

Descartes remarque, réciproquement, que *toutes* les coniques (cercles compris) s'obtiennent comme solution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes (334).

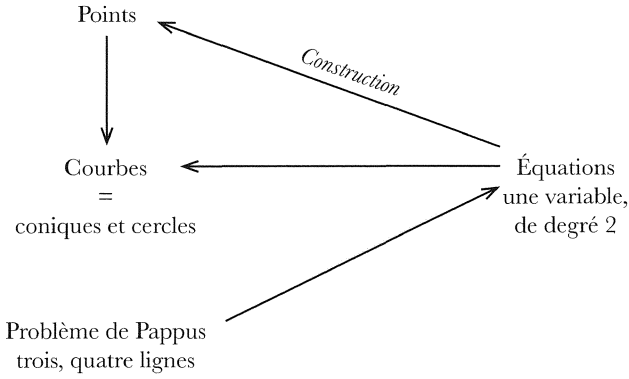


FIGURE 13. Soutien du deuxième énoncé inaugural pour les équations dérivées du problème de Pappus pour trois et quatre lignes. Les courbes sont des coniques ou des cercles. Livre II (334)

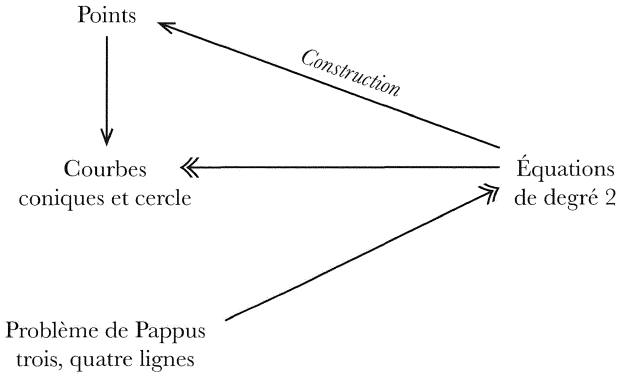


FIGURE 14. Soutien du deuxième énoncé inaugural pour toutes les coniques et le cercle. Livre II (334)

Du point de vue inaugural, la correspondance du *deuxième énoncé inaugural*, entre les courbes et les équations, a ainsi été soutenue pour les coniques (cercles compris) et les équations de degré 2.

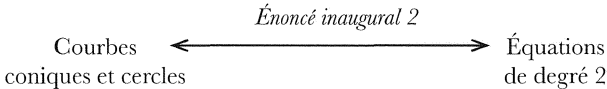


FIGURE 15. Soutien de la correspondance du deuxième énoncé inaugural pour toutes les coniques et le cercle. Livre II (334)

Mais comme le problème de Pappus est un problème de géométrie, sa résolution contribue à établir sur un cas exemplaire la *conformité* de la représentation des problèmes par les équations. Elle relève ainsi du soutien du *premier* énoncé inaugural.

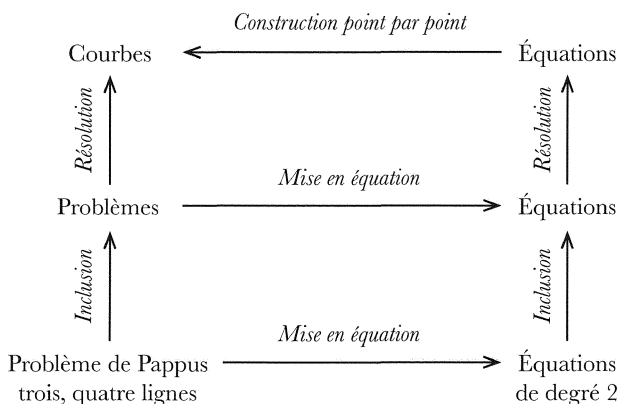


FIGURE 16. Conformité des résolutions algébrique et géométrique du problème de Pappus pour trois et quatre ligne. Livre II (334)

Or d'après ce qui précède, la résolution algébrique du problème de Pappus pour trois et quatre lignes couvre en définitive la résolution algébrique de *tous les problèmes solides* (et *a fortiori* celle de tous les problèmes *plans* associés aux équations de degré 2 d'une seule variable). Sa résolution vient soutenir que la résolution algébrique de *tous les problèmes solides* est *conforme* à leur résolution géométrique habituelle. Ainsi, le premier énoncé inaugural entre les problèmes et les équations a été soutenu dans le cas des problèmes *solides* et des équations de degré 2 (en exceptant à nouveau ce qui passe par le soutien du deuxième).

Descartes aborde ensuite le problème de Pappus pour 5 lignes, d'abord supposées parallèles, puis pour le cas qu'il juge le plus simple, quatre droites parallèles équidistantes et une droite perpendiculaire et un angle droit, dont la solution est aussi considérée être la courbe la plus simple du genre suivant celui des coniques (« parabole de Descartes »). Ce cas a déjà été résolu au Livre I au moyen d'une construction *point par point* de son équation de degré trois, et dont il a aussi déjà été établi et remarqué

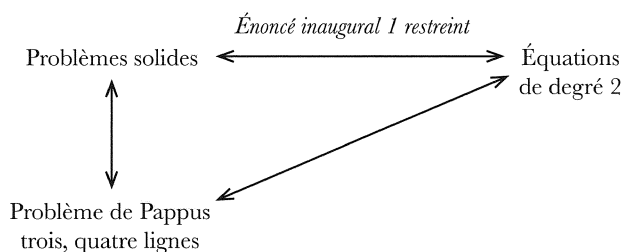


FIGURE 17. Soutien du premier énoncé inaugural pour tous les problèmes solides et les équations de degré 2. Livre II (334)

qu'elle pouvait se faire au moyen d'une section conique (314). Descartes en donne ici une construction par son deuxième système articulé. Il a déjà fait allusion à cette construction lors de la présentation de ce système qui s'obtient en remplaçant la ligne/tige KC par une parabole dont le diamètre est sur KA (337).

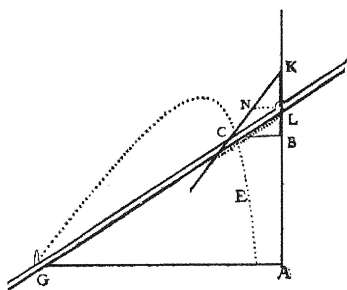


FIGURE 18.

Ce dispositif permet de tracer une courbe dont la construction garantit le caractère géométrique. Pour établir qu'il s'agit de la solution du problème considéré, Descartes n'a qu'à mettre en équation ce système articulé et vérifier qu'il retrouve l'équation de la courbe. Pour d'autres configurations du problème à cinq lignes il se contente de donner des indications sur la nature de la ligne solution et conclut en faisant valoir qu'« *ayant expliqué la façon de trouver une infinité de points par où [les lignes solution] passent, [il] pense avoir assés donné le moyen de les décrire* » (339). Ses derniers mots sont donc pour dire que la solution *donnée à la fin du Livre I* devrait à présent être tenue pour suffisante. Il est ainsi le premier à bénéficier de cette

partie de l'inauguration. Il va dès lors pouvoir se contenter de donner au Livre III les constructions *point par point* des solutions des équations.

Cette reprise du problème de Pappus aura donc permis de ressaisir les constructions point par point des solutions qui avaient été données par des constructions qui établissent que les courbes obtenues sont bien géométriques²⁴.

Le deuxième sens de la correspondance du deuxième énoncé inaugural a dès lors été soutenu pour toutes les équations (sans restriction sur le degré), le premier sens l'ayant d'emblée été pour tous les degrés :

« Et pource que cete façon de trouver une ligne courbe [donnée par une équation], en trouvant indifferemment plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'a celles qui peuvent aussy estre descrites par un mouvement regulier & continu, on ne la doit pas entierement rejeter de la Geometrie. » 340

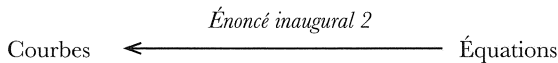


FIGURE 19. Soutien du deuxième sens de la correspondance du deuxième énoncé inaugural. Livre II (340)

Mais il ne suffit pas pour que les équations soient une représentation conforme des courbes géométriques de pouvoir construire les unes à partir des autres. Il faut encore que tous les autres attributs des courbes puissent être obtenus à partir de leur représentation algébrique. C'est bien ce que soutient Descartes :

« Que, pour trouver toutes les propriétés des lignes courbes, il suffit de savoir le rapport qu'ont tous leurs poins à ceux des lignes droites, & la façon de tirer d'autres lignes qui les coupent en tous ces poins a angles droits », 341.

L'absence d'expression générale pour ces attributs l'oblige à recourir à une énumération :

« Or, de cela seul qu'on sçait le rapport qu'ont tous les poins d'une ligne courbe à tous ceux d'une ligne droite, en la façon que j'ay expliqué, il est aysé

²⁴ Rappelons que la construction point par point d'une courbe est aussi une construction géométrique dans laquelle interviennent aussi des courbes dont le genre est aussi pris en compte. Pour une autre analyse de l'introduction des constructions point par point dans *La Géométrie*, voir Mancosu [1996, p. 72–77].

de trouver aussy le rapport qu'ils ont a tous les autres points & lignes données ; & en suite, de connoistre les diametres, les aissieux, les centres, & autres lignes ou points a qui chasque ligne courbe aura quelque rapport plus particulier, ou plus simple, qu'aux autres ; & ainsi, d'imaginer divers moyens pour les descrire, & d'en choisir les plus faciles. Et mesme on peut aussy, par cela seul, trouver quasi tout ce qui peut être déterminé touchant la grandeur de l'espace qu'elle comprennent, sans qu'il soit besoin que j'en donne plus d'ouverture. Et enfin, pour ce qui est de toutes les autres propriétés qu'on peut attribuer aux lignes courbes, elles ne dependent que de la grandeur des angles qu'elles font avec quelques autres lignes. (...) C'est pourquoy je croyray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les elements des lignes courbes, lorsque j'auray generalement donné la façon de tirer des lignes droites qui tombent a angles droit sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. Et j'ose dire que c'est cecy le problemes le plus utile & le plus general, non seulement que je fçache, mais mesme que j'aye jamais désiré de fçavoir en Geometrie. » 341–342

La méthode algébrique pour déterminer la normale ou la tangente à une courbe en un point, que Descartes expose dans le Livre II, participe du soutien du deuxième énoncé inaugural. Et il est en effet tout à fait remarquable, même si cela nous est devenu familier, que l'on puisse uniquement à partir de l'équation algébrique de la courbe déterminer l'équation de la normale à cette courbe.

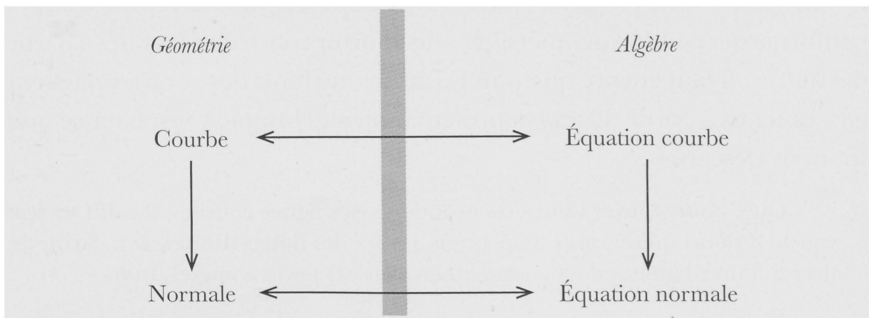


FIGURE 20.

Montrer que cela est possible est donc aussi un argument en faveur de la possibilité de remplacer les courbes par leurs équations, autrement dit d'éliminer les courbes et de ne garder que les équations, de considérer pour elles-mêmes les expressions algébriques et d'en faire ainsi un système d'expressions constitué et autonome. De la même manière, la conformité

du degré de l'équation algébrique au genre de la courbe associée participe du même soutien.

Le Livre II se termine par l'étude d'ovales et de leurs propriétés de réfraction et de réflexion. Il s'agit à nouveau de montrer la nécessité de dépasser l'étude des coniques et de soutenir l'extension opérée en montrant leur utilité pour la catoptrique et la dioptrique : « *Au reste, affin que vous fçachiés que la consideration des lignes courbes, icy proposée, n'est pas sans usage, & qu'elles ont diverses propriétés qui ne cedent en rien a celles des sections coniques, je veux encore adjouster icy l'explication de certaines Ouales, que vous verrés estre très utiles pour la Theorie de la Catoptrique & de la Dioptrique* » (352). Tout ceci contribue à soutenir la conformité de la représentation des courbes par des équations de degré quelconque.

La conformité suppose que les relations entre grandeurs géométriques puissent être traduites par des relations algébriques de telle sorte qu'il n'y ait pas de propriété géométrique pertinente qui ne soit rendue par l'équation. Mais il faut distinguer ici le fait que l'on puisse traduire une à une des relations géométriques (que tel segment soit dans tel rapport avec tel autre, etc) et le fait qu'en ayant ainsi traduites certaines on aurait traduit *toutes* les propriétés géométriques en quelque sorte à notre insu. La détermination de la normale en est un exemple très favorable : quand on détermine l'équation d'une courbe, on ne met pas en équation ses normales (on peut déterminer cette équation sans savoir ce qu'est une normale...), mais un raisonnement algébrique permet néanmoins de l'en déduire grâce à la possibilité d'une traduction algébrique de la relation entre la courbe et sa normale en un point. Même si de nombreux exemples peuvent être ajoutés, la conformité voudrait qu'il en soit ainsi de toutes les propriétés et relations.

3.2.2.3. Livre III : « De la construction des problèmes qui sont solides, ou plus que solides »

Le Livre III est celui dans lequel Descartes expose « *quelque chose en général de la nature des équations* » (371). C'est là que sont présentés tous les résultats et les règles d'Algèbre sur le nombre de racines et la réduction des équations [Bos 2001, chap. 27]. Ces développements sont motivés par le sentiment que ce serait une faute d'utiliser pour construire la solution

des courbes plus composées qu'il n'est nécessaire (« *ce serait une faute en Geometrie que (...) d'employer* » des courbes d'un genre supérieur à celui requis). Descartes en donne plusieurs exemples. Ses équerres, par exemple, permettent de construire toutes les moyennes proportionnelles. Mais la construction ainsi obtenue pour deux moyennes proportionnelles fait intervenir une courbe du deuxième genre alors qu'il est possible d'y parvenir avec des sections coniques, c'est-à-dire des courbes du premier genre (371). Ces développements soutiennent ainsi la conformité de la représentation des problèmes de géométrie par des équations algébriques. En effet, il ne suffit pas d'associer à un problème de géométrie une équation algébrique. Pour qu'il y ait conformité, il faut encore que l'équation restitue les caractéristiques du problème comme elle devait, pour le deuxième énoncé inaugural, restituer les caractéristiques de la courbe. Or, outre sa solution, la principale caractéristique d'un problème est son genre, c'est-à-dire le genre des courbes nécessaires à sa résolution. La conformité commande donc que le genre d'un problème puisse être déterminé à partir de son équation. Comme la mise en équation d'un problème donné peut conduire à une équation d'un degré aussi élevé que l'on veut, Descartes se doit d'établir qu'il est possible, par les moyens propres du système d'expressions considéré (équations algébriques), de réduire ensuite l'équation obtenue à une expression susceptible de faire connaître directement le genre du problème (371–389). Pour qu'il y ait conformité, il est nécessaire de pouvoir réduire à l'intérieur du système d'expressions la pluralité des équations exactement comme il est nécessaire de pouvoir déterminer (l'équation de) la normale à partir de l'équation de la courbe. Tous ces développements algébriques participent de la vérification de la conformité et ils participent directement à l'inauguration de la représentation des problèmes de géométrie par des équations algébriques.

Cela étant, une chose est la possibilité de réduire à une seule toutes les équations qui résultent de toutes les mises en équation possibles d'un problème, sans laquelle aucune conformité n'est soutenable, une autre que l'équation réduite donne le genre du problème. Il faut bien distinguer ce qui est susceptible d'être *démontré* de ce qui ne saurait l'être en raison notamment de l'incommensurabilité des problèmes et des équations. Descartes peut établir des règles pour la réduction des équations, qu'il donne

d'ailleurs sans démonstration, mais il ne peut que *soutenir* la conformité revendiquée en la vérifiant au cas par cas. C'est bien ce qu'il fait en considérant un autre problème à nouveau extrait de la *Collection* de Pappus ([Descartes 1637, p. 387] ; [Brigaglia & Nastasi 1986, p. 125–127] ; [Bos 2001, p. 393–396]). Ce problème est connu pour avoir un énoncé faisant intervenir une *neusis*, et pour apparaître de ce fait comme un problème solide, alors que sa solution peut néanmoins être construite au moyen de droites et de cercles, ce qui en fait donc, en dépit des apparences, un problème plan. La résolution algébrique la plus naturelle conduit aussi à une équation du quatrième degré. Ce qui le fait à nouveau apparaître, d'un point de vue algébrique cette fois, comme un problème solide. Mais cette équation se décompose en un produit de deux polynômes de degré deux, ce qui montre qu'il est plan. La conformité est totale : les équations sont en mesure aussi bien de reproduire l'illusion que de la dissiper !

Pour que l'équation reflète le genre du problème, la mise en équation ne doit faire intervenir aucune opération géométrique susceptible de le modifier. L'équation dépendrait sinon de ces opérations géométriques. Comme le tracé de droites et de cercles interviennent dans tous les genres, ces constructions peuvent être utilisées lors de la mise en équation sans modifier le genre. Ce sont exactement celles que Descartes s'autorise pour la réduction des équations [Bos 2001, p. 390].

Le soutien du premier énoncé inaugural a commencé au Livre I. Descartes a exposé dans ce Livre la méthode générale pour mettre un problème en équation, méthode ensuite appliquée au problème de Pappus dont la mise en équation conduit à des équations de tous les degrés, sinon à toutes les équations comme il le croit. Dans le même Livre, Descartes a soutenu la correspondance entre les problèmes plans et les équations de degré 2. Dans le Livre III il soutient la même correspondance mais cette fois entre les problèmes *solides* et les équations de degré 3 à une inconnue :

« Il seroit superflus de je m'estasse a donner icy d'autres exemples ; car tous les Problemes qui ne sont que solides se peuvent reduire a tel point, qu'on n'a aucun besoin de cete regle pour les construire, sinon en tant qu'elle sert a trouver deux moyenes proportionnelles, ou bien a diviser un angle en trois parties esgales ; ainsi que vous connoistrés, en considerant que leurs difficultés peuvent toujours estre comprises en des Equations qui ne montent que jusques au quarré de quarré ou au cube ; et que toutes celles qui montent au quarré de

quarré se reduisent au quarre, par le moyen de quelques autres qui ne montent que jusques au cube : et enfin qu'on peut oster le second terme de celles cy. En sorte qu'il n'y en a point qui ne se puisse reduire a quelqu'une de ces trois formes :

$$z^3 = * - pz + q$$

$$z^3 = * + pz + q$$

$$z^3 = * + pz - q \gg 398.$$

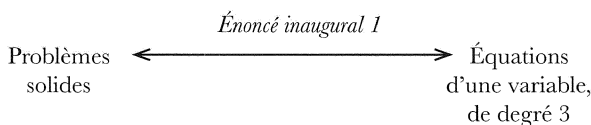


FIGURE 21. Premier énoncé inaugural pour les problèmes solides et les équations d'une variable de degré 3

Ainsi, *tous* les problèmes *solides* sont exprimés par ces trois seules expressions (comme tous les problèmes plans ont pu aussi l'être par les trois équations du deuxième degré)²⁵.

Descartes achève de soutenir cet énoncé par la construction d'abord des équations de degré trois et quatre associées aux problèmes solides (les problèmes plans ayant été traités au Livre I), en s'appuyant sur des *exemples cruciaux* comme la double moyenne proportionnelle et la trisection de l'angle (389–403 ; [Bos 2001, p. 364–368]), puis des équations de degré cinq et six (403–413 ; [Bos 2001, p. 368–372]). Exactement comme il l'a fait au Livre I pour les problèmes plans, il montre comment construire les solutions de ces équations puis affirme que la méthode proposée s'étend aux autres degrés. Ainsi s'achève le soutien du premier et du deuxième énoncé inaugural et *La Géométrie*.

3.3. La fonction inaugurale du problème de Pappus

La Géométrie a pu être présentée dans son ensemble comme une inauguration de la représentation des problèmes de géométrie par des équations

²⁵ Remarquons tout de même qu'ils l'étaient déjà dans la classification de Pappus, non par des équations, mais par les trois coniques. Mais les modes d'expression ne sont évidemment pas les mêmes.

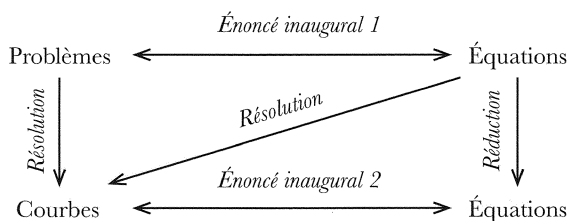


FIGURE 22. Fin du soutien du premier et du deuxième énoncé inaugural pour tous les problèmes et toutes les équations. Livre III (fin)

algébriques. Je voudrais à présent reprendre quelques-uns des principaux thèmes de ce texte et préciser leur rôle dans cette inauguration. Je commencerai avec le problème de Pappus.

La méthode générale pour mettre un problème en équation est décrite dans le Livre I. C'est une étape qui participe évidemment au soutien du premier et principal énoncé inaugural. Mais Descartes a ici un problème : il ne dispose pas d'expression qui lui permettrait de considérer *tous* les problèmes de géométrie. S'il avait une telle expression, *démontrer* que tout problème de géométrie peut être mis en équation serait envisageable. Il a un *problème d'expression*. À cela s'ajoute l'incommensurabilité entre les problèmes et les équations. Il est donc dans l'impossibilité de parcourir le chemin qui va de l'expression d'un problème *quelconque* à l'expression de son équation²⁶. Ce chemin ne peut être parcouru que pour un problème particulier. En même temps il s'agit de soutenir qu'il peut l'être pour *tous*. Nous allons voir que *le problème de Pappus résout en partie ces problèmes d'expression*.

En introduisant le problème de Pappus Descartes se donne en premier lieu un *énoncé* de problème. Une mise en équation devient possible. Il a besoin pour soutenir son énoncé inaugural d'*exemples* qui puissent d'une manière ou d'une autre représenter tous les problèmes. C'est une nécessité dans une inauguration. À cet égard, le problème de Pappus joue un rôle

²⁶ C'est l'impossibilité à laquelle se heurte, par exemple, Church quand il veut montrer comment une fonction intuitivement calculable peut être transformée en une fonction satisfaisant la définition d'une fonction récursive ou d'une fonction λ -définissable ([Church 1936] ; [Davis 1965, p. 100–103]).

comparable aux familles de nombres ou de fonctions calculables que Turing et Church considèrent pour établir leur calculabilité au sens de leurs définitions respectives. Il s'agit aussi d'un problème reconnu indépendamment de la représentation algébrique proposée mais que celle-ci va permettre de résoudre. Descartes ne manque pas de faire valoir que ce problème n'avait été complètement résolu ni par les anciens ni par les modernes, ce qui en fait une pierre de touche pour sa méthode (AT, I, 478). Il ne s'agit pas ici de conformité, mais d'efficacité de la représentation introduite. Le problème de Pappus a cette fois un rôle comparable au « problème de décision » (*Entscheidungsproblem*) dans les articles de Turing et de Church.

Le problème de Pappus est en l'occurrence l'énoncé d'un problème mais il est aussi, puisqu'il fait intervenir un nombre indéterminé de droites pouvant avoir toutes les positions possibles, l'énoncé d'un ensemble de problèmes. C'est donc une sorte d'*expression générale de problèmes* puisqu'il est à la fois un énoncé unique et l'énoncé d'une infinité de problèmes. Or, la mise en équation d'un énoncé unique est possible. Et en l'occurrence, elle conduit à *tous les degrés* possibles d'équations. Descartes considère même, à tort, qu'il obtient ainsi *toutes les équations* possibles²⁷ (324–325). Le problème de Pappus intervient donc comme *une expression générale* de tous les problèmes de géométrie considérés à partir de leur mise en équation. Il s'agit donc, pour Descartes, d'une expression qui est à la fois l'énoncé d'un

²⁷ Dans le Livre II, Descartes a montré que les solutions du problème de Pappus pour 3 et 4 lignes pouvaient être n'importe quelle conique : « *Au reste, a cause que les equations qui ne montent que jusques au quarré sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer, non seulement le problemes des anciens en 3 & 4 lignes est icy entierement achevé, mais aussy tout ce qui appartient a ce qu'ils nommoient la composition des lieux solides, &, par consequent, aussy a celle des lieux plans, a cause qu'ils sont compris dans les solides.* » 334. Il étend ensuite ce résultat aux autres genres : « *il est impossible d'en [ligne] imaginer aucune qui ne soit utile à cete question [problème de Pappus]* » (308). Cette extension sera notamment dénoncée par Newton ([Newton 1971, p. 341] ; [Bos 1981, p. 332–338]). Pour une discussion de cette extension à partir du fait qu'en raison de l'absence de coordonnées négatives une équation ne se rapporte qu'à une partie du plan, voir Maronne [2007, p. 66–76, 85–89].

problème de géométrie et une expression de *tous* les problèmes de géométrie (rapportés à leur équation)²⁸. Cette erreur a une incidence sur la valeur et la réception de cette inauguration. Elle n'en a pas sur la fonction de ce problème dans celle-ci. Par ailleurs, ce problème donne bien de toute façon une expression générale de *tous* les problèmes rapportés à leur *genre*, ce qui est tout à fait remarquable et permet de supporter des développements généraux relatifs à la *totalité* des genres. Il est évidemment impossible de démontrer cette propriété puisque les problèmes de géométrie n'ont pas d'expression uniforme. L'intérêt du problème de Pappus est justement d'y pallier.

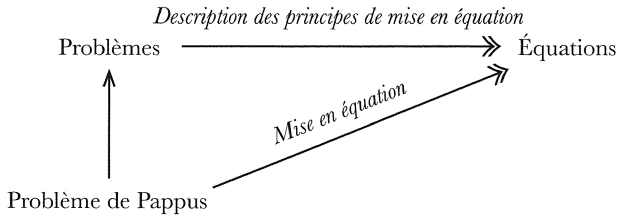


FIGURE 23. Le problème de Pappus : une expression générale des problèmes de géométrie

Résoudre le problème de Pappus c'est donc résoudre un problème de *chaque* genre, et ce serait en définitive résoudre *tous* les problèmes dans la mesure où leur résolution ne dépend que de leur genre. Mais s'il en était vraiment ainsi, il ne serait plus nécessaire de *soutenir* l'énoncé inaugural au cas par cas, il suffirait de le faire uniquement à partir du problème de Pappus. L'énoncé inaugural serait susceptible d'une démonstration et ne serait plus un énoncé inaugural. Si ça n'est pas le cas, c'est d'abord parce que la résolution géométrique du problème de Pappus se fait elle-même au cas par cas suivant le nombre et la configuration des droites : le problème posé

²⁸ Le problème de Pappus nous donne un exemple d'expression d'invariante génératrice pour les genres de problèmes [Herreman 2005] : c'est une expression pour des problèmes de n'importe quel genre qui est elle-même l'expression d'un problème. Remarquons incidemment que le problème de Pappus n'entre lui-même dans aucun genre. Il constitue une sorte d'argument diagonal (sans négation) et il introduit d'emblée la nécessité d'une extension de la classification des problèmes et de leur représentation algébrique

par l'expression de tous les problèmes de géométrie se retrouve en partie dans la description de toutes les configurations possibles d'un nombre quelconque de droites. De plus, la résolution à partir des équations du problème de Pappus ne résout tous les problèmes de géométrie que pour autant que ces problèmes peuvent être mis en équation, ce qui est une partie de ce qu'il s'agit de soutenir, et que la résolution des problèmes et celle des équations soient conformes.

Il faut sans doute remarquer ici que la méthode de résolution proposée par Descartes transforme tous les problèmes de géométrie auxquels elle s'applique en problèmes de lieu. Sa méthode consiste en effet à mettre un problème en équation, puis à construire les solutions du problème à partir de la construction des solutions de l'équation, le problème se trouve ainsi ramené, même si son énoncé d'origine ne le faisait pas apparaître comme tel, à un problème de lieu : le lieu des solutions de l'équation qui lui correspond. Que le problème de Pappus soit un problème de lieux ne saurait dès lors l'empêcher d'être *une expression générale* de tous les problèmes de géométrie.

Le problème de Pappus est un expédient pour résoudre un des principaux problèmes sémiotiques que doit résoudre toute inauguration : parcourir une *totalité*, ici celle des problèmes de géométrie, qui ne peut l'être, afin de soutenir la possibilité de la remplacer par une autre représentation, ici les équations algébriques, qui peut l'être.

Dans la mesure où Descartes pense que toute équation provient de la mise en équation d'un cas particulier du problème de Pappus, il est pour lui possible d'associer à toute équation un problème de géométrie, à savoir un problème de Pappus pour un certain nombre de lignes dans une configuration particulière. De ce fait, le problème de Pappus soutient aussi le sens inverse de la correspondance entre problèmes et équations : il n'y a pas d'équation qui ne soit l'expression d'un problème de géométrie. Toutes ont ainsi un sens géométrique. Il n'y a pas d'équation « symbolique » ou qui aurait un « contenu formel » [Granger 1980].

Le soutien de la *correspondance* entre problèmes et équations, c'est-à-dire la possibilité d'associer à tout problème de géométrie une équation algébrique et inversement, est achevé dès le Livre I. Il reste encore à soutenir la *conformité*, c'est-à-dire le fait que les équations reproduisent aussi toutes les

autres caractéristiques attribuées aux problèmes. Il faut en particulier que les solutions de ces équations soient bien celles que l'on obtient par une résolution purement géométrique des problèmes. Le deuxième énoncé inaugural relatif aux courbes et aux équations intervient ici. Le problème de Pappus joue à son égard aussi le rôle « d'énoncé général » requis pour son soutien et intervient donc, à travers celui-ci, une deuxième fois dans le soutien du premier. Reprenons le schéma du soutien du deuxième énoncé (fig. 24).

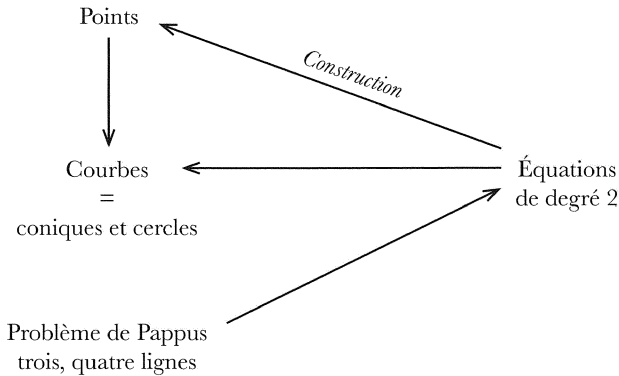


FIGURE 24. Livre II (334) Soutien du deuxième énoncé inaugural pour les équations dérivées du problème de Pappus pour trois et quatre lignes. Les courbes sont des coniques ou des cercles

Soutenir la conformité de la résolution des problèmes de géométrie à partir de leurs équations oblige Descartes à soutenir que les courbes solutions des équations algébriques, construites *point par point*, sont des courbes géométriques. Une fois résolues les équations correspondant au problème de Pappus pour trois et quatre lignes, il doit encore identifier les courbes trouvées qu'il ne connaît que par leurs équations et pour lesquelles il n'a qu'une construction point par point. La résolution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes a été interrompue au Livre I à ce moment, pour être ensuite reprise au Livre II une fois la caractérisation des courbes géométriques au moyen d'instruments introduite. Descartes montre alors que les solutions données pour ce nombre de lignes sont les équations de coniques ou de cercles, dont il a montré le caractère géométrique.

La poursuite au Livre III de la résolution du problème de Pappus pour un nombre plus grand de lignes remplit trois fonctions. La première est simplement de poursuivre la résolution de ce problème, pierre de touche pour sa méthode. Le problème a alors le rôle d'un problème *exemplaire*. Mais résoudre ce problème c'est aussi, on l'a vu, résoudre tous les problèmes de géométrie. Le problème de Pappus intervient alors comme une expression *générale* de la totalité des problèmes de géométrie (soutien du premier énoncé inaugural). Enfin, troisième fonction, le nombre de lignes, groupées par paires, donne à Descartes une *série* d'énoncés de problèmes qui permet, selon lui, de parcourir cette fois *toutes les équations* et de soutenir ainsi de proche en proche que leurs solutions sont des courbes géométriques (soutien du deuxième énoncé inaugural, en même temps que poursuite du soutien du premier). Le problème de Pappus sert à nouveau d'expression pour une totalité, mais cette fois en tant que *série d'énoncés* qui permet de parcourir *toutes les équations* et de soutenir que leurs solutions sont des courbes géométriques. *La Géométrie*, et avec elle le soutien du premier et du deuxième énoncé inaugural, progresse en suivant cette série. L'inauguration se fait par induction sur les problèmes de Pappus, par quoi il faut comprendre que les problèmes de Pappus donnent les *moyens* de soutenir ces deux énoncés inauguraux. Cette induction permet notamment de soutenir la conformité du genre algébrique et géométrique des problèmes. Le problème de Pappus n'est pas seulement un problème auquel Descartes appliquerait sa méthode, c'est aussi un *moyen* pour soutenir la possibilité de représenter les problèmes de géométrie par des équations algébriques. L'erreur commise par Descartes sur le problème de Pappus et les équations n'a aucun rôle dans la résolution de ce problème, elle en a revanche dans le soutien du deuxième énoncé inaugural et à travers lui, dans celui du premier²⁹.

²⁹ Pour une étude de la solution donnée par Descartes du problème de Pappus et des critiques dont elle a été l'objet voir Maronne [2007].

3.4. *L'inauguration des courbes par les instruments*

3.4.1. *Un instrument général*

Après avoir considéré le rôle inaugural du problème de Pappus, reprenons la question de la caractérisation des courbes géométriques par des instruments d'un point de vue inaugural.

Le Livre I, on l'a déjà vu plusieurs fois, se termine sur la construction point par point de la courbe solution du problème de Pappus pour trois et quatre lignes. Le cours de *La Géométrie* change brusquement avec le Livre II. Descartes termine le Livre I en disant « *qu'il est besoin que [il] dise quelque chose en general de la nature des lignes courbes* » (314). Au moment de reprendre la résolution du problème de Pappus au cours de Livre II il précise :

« Or, après avoir ainsi réduit toutes les lignes courbes a certains genres, il m'est aysé de poursuivre en la demonstration de la response que j'ay tantost faite a la question de Pappus. » 323

Les considérations sur la nature des lignes courbes (315–323) étaient donc semble-t-il nécessaires pour poursuivre la résolution du problème de Pappus. Il convient d'apprécier ce qui les rendait nécessaires et de déterminer leur rôle dans l'inauguration des équations polynomiales et des courbes géométriques.

La discussion sur la nature des lignes courbes commence par l'introduction de la classification de Pappus. Descartes y dénonce l'absence de distinction au sein des courbes définissant les problèmes linéaires et le fait qu'elles soient indistinctement qualifiées de mécaniques et à ce titre toutes rejetées. Invoquant les droites et les cercles tracés au moyen d'une règle et d'un compas, il fait valoir que l'usage d'un instrument ne saurait être une raison suffisante pour qualifier une courbe de mécanique et la rejeter. Il peut alors donner une première caractérisation des courbes géométriques :

« Et il n'est besoin de rien supposer, pour tracer toutes les lignes courbes que je pretens icy d'introduire, sinon que deux ou plusieurs lignes puissent estre meües l'une part l'autre, & que leurs intersections en marquent d'autres » 316

Remarquons qu'il s'agit bien ici de justifier l'*introduction* de courbes et qu'il s'agit de les introduire dans leur *totalité*. Il ne s'agit pas de justifier

l'usage d'une ou deux courbes nouvelles, mais bien d'une *totalité*. Cette totalité n'est pas introduite comme une nouveauté. Faisant valoir ensuite que ce qui est « *précis & exact* » est géométrique il soutient qu'il faut tenir pour géométriques toutes les courbes tracées avec des instruments décrits par « *un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entresuivent & dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent* » (316).

Les courbes reçues de la tradition grecque ont à l'évidence un caractère pré-établi. Mais elles ne suffisent pas à résoudre comme le veut Descartes tous les problèmes (voir 3.4.4 ci-dessous). Descartes se doit donc d'introduire de nouvelles courbes qui étendent les courbes reçues. L'inauguration de cette nouvelle totalité suppose une totalité pré-établie à laquelle elle soit aussi conforme. Ni les courbes de la tradition (par défaut de conformité), ni les équations algébriques (qui ne sont pas alors pré-établies), ne satisfont ces conditions. Les instruments considérés par Descartes eux les satisfont.

Leur totalité n'est évidemment pas pré-établie au sens où le sont les courbes ou les problèmes hérités de la tradition grecque : ce n'est pas une totalité déjà considérée en tant que telle en mathématiques. Descartes n'en appelle pas ici à l'autorité d'un illustre prédécesseur. Mais la matérialité des instruments leur confère une existence qui apparaît de ce fait indépendante de l'imagination du mathématicien. Leur matérialité semble *établir* leurs caractéristiques et leur extension sans avoir à les désigner autrement. Elles échappent de ce fait à la fantaisie du mathématicien, et sont ainsi, et en ce sens, *pré-établies*. La condition selon laquelle les mouvements doivent être continus et entièrement réglés par ceux qui les précèdent, par laquelle Descartes ne retient que certains instruments, revient à éliminer la fantaisie qui pourrait s'introduire dans l'agencement de leurs parties et ainsi assure le caractère *pré-établi* de cette totalité que la caractérisation qu'il en donne constitue bien en totalité.

Les divers instruments présentés par Descartes vont contribuer à soutenir la conformité des courbes définies par des équations avec les instruments.

Le premier de ces instruments est son système d'équerres (317; [Vuillemin 1960]; [Serfati 1993]; [Bos 2001, p. 338–342]) (voir figure 25).

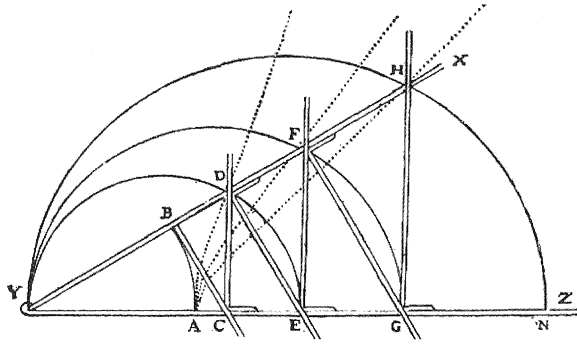


FIGURE 25.

Ce système d'équerres est simultanément *un* instrument et *plusieurs* instruments. Il est une pluralité d'instruments qui au lieu de n'être qu'un ensemble disparate d'instruments se (re)compose en *un* instrument (comme *plusieurs* figures géométriques peuvent composer *une* figure géométrique).

C'est bien sûr aussi un exemple de système articulé qui trace des courbes géométriques. Mieux : c'est *un* instrument qui permet de tracer des courbes de *tous* les genres. Il a vis-à-vis des instruments et des courbes géométriques les mêmes caractéristiques que le problème de Pappus vis-à-vis des problèmes de géométrie et des équations : c'est l'expression d'un « instrument général » comme le problème de Pappus est l'expression d'un « problème général ». Il a aussi la même fonction : il sert à soutenir que la totalité des instruments considérés est conforme aux courbes géométriques. Il sert à l'inauguration des courbes par les instruments.

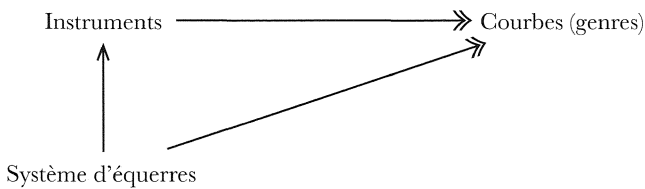


FIGURE 26. Le système d'équerres : une expression générale des instruments pour les genres des courbes

Le deuxième dispositif permet aussi d'établir l'extension infinie des courbes géométriques.

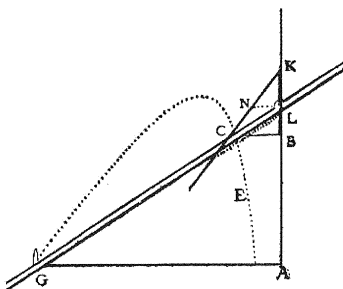


FIGURE 27.

Cette fois la ligne GL tourne autour du point fixe G et glisse le long de la droite AK , L étant leur point d'articulation. De même, la ligne KC tourne autour du point K , fixe sur KA , et glisse le long de GL . Le point de contact C est quant à lui mobile et décrit une courbe. Descartes détermine l'équation de la courbe obtenue et à partir de celle-ci établit qu'il s'agit d'une hyperbole. Il montre qu'une conique peut être tracée par un de ses systèmes articulés, ce qui revient à soutenir sur un cas important que toutes les courbes géométriques peuvent être obtenues de cette manière. Il soutient ainsi le pouvoir expressif de ces instruments.

Il remplace ensuite la règle KC par une hyperbole. C'est-à-dire qu'il construit le système articulé composé du précédent avec lui-même pour former son « double » ou son « carré », obtenant alors une courbe du second genre. En remplaçant KC par un cercle centré en L , la courbe tracée sera une conchoïde. Enfin, en la remplaçant par une parabole de diamètre KB , il obtient la courbe trouvée au Livre I comme solution du problème de Pappus à cinq lignes (ces résultats sont donnés par Descartes sans démonstration)³⁰.

Ce dispositif supporte aussi l'extension infinie des courbes géométriques et de leurs genres. Mais la série des instruments ainsi engendrées ne forme pas *un* instrument comme le système d'équerres. L'intérêt de

³⁰ L'importance de ce procédé de construction des courbes dans la Géométrie a été particulièrement bien mis en évidence par Bos [2001] qui lui fait jouer un rôle central dans cette œuvre et sa genèse. Pour Panza [2005, p. 38], il ne s'agit que d'un critère « finalement marginal ».

ce dispositif est surtout de tracer des courbes reçues et aussi différentes qu'une hyperbole, une conchoïde et une solution du problème de Pappus pour cinq lignes.

3.4.2. *Extension infinie des genres, implications matérielles et variétés d'expressions*

Examinons d'un peu plus près le rôle du système d'équerres dans l'extension des courbes géométriques. Ce dispositif permet de tracer une série de courbes : la première est un cercle et toutes les courbes suivantes sont tracées par la répétition du même dispositif. Tracer une courbe établit un rapport entre l'instrument et la courbe tracée. Ce rapport se fait par le *contact* de l'instrument avec la feuille, contact qui résout l'incommensurabilité qui sépare une courbe d'un système articulé. C'est en raison de ce contact que les caractéristiques de la courbe peuvent être entièrement et exclusivement rapportées à l'instrument : si l'instrument peut tracer la courbe, c'est d'une certaine manière que les caractéristiques de la courbe lui sont entièrement données par l'instrument, autrement dit que l'instrument et la courbe sont conformes. C'est ce qui permet à Descartes de caractériser les courbes géométriques à partir d'une caractérisation des instruments.

Mais cet instrument ne fait pas que cela : il est comme on l'a vu un argument pour étendre les courbes géométriques habituellement reçues. Reconnaître que le cercle est une courbe géométrique parce qu'il peut être ainsi tracé oblige à reconnaître que la courbe suivante, tracée de la même manière à partir du cercle, est aussi géométrique : *si* le cercle est une courbe géométrique *alors* la deuxième courbe est tout autant une courbe géométrique ; si la deuxième courbe est une courbe géométrique *alors* la troisième l'est aussi :

« Mais je ne vois pas ce qui peut empescher qu'on ne conçoive aussy nettement & aussy distinctement la description de cete premiere [la courbe AD, la première après le cercle AB], que du cercle ou, du moins, que des sections coniques; ny ce qui peut empescher qu'on ne conçoive la seconde, & la troisième, & toutes les autres qu'on peut descrire, aussy bien que la premiere, ny, par consequent, qu'on ne les reçoive toutes en mesme façon, pour servir aux speculations de Geometrie. » 318–319

Chaque équerre est une implication. Elle n'est pas l'expression d'une implication : elle *est* une implication *par* son expression, par le fait d'être

une équerre et d'être une *copie* de celle qui a tracé le cercle dont le caractère géométrique est tenu pour acquis. Il n'y a plus de preuve de la géométrie des courbes sans elle. Elle ne tient pas lieu de preuve, elle fait preuve. Chaque équerre effectue l'implication par laquelle le caractère géométrique du cercle se propage aux courbes successives.

Cet instrument est aussi, comme on l'a vu, un ensemble et même une chaîne d'instruments : *plusieurs* instruments qui font *un* instrument. C'est une expression composée. Cette composition fait à nouveau intervenir un *contact*. Ce n'est plus le contact de l'instrument avec la feuille, mais celui des équerres entre elles. Ces contacts, comme les espaces entre les lettres d'un mot ou les blancs entre les mots d'une phrase ou encore ceux, différents, entre les figures qui composent une même figure (comme les carrés et le triangle rectangle dans le théorème de Pythagore, voir plus loin), réalisent la conjonction des implications qui font de cet instrument un ensemble d'*arguments*, chacun établissant la géométrie de chaque courbe tracée, composant *un* argument établissant la pluralité des genres de courbes géométriques.

Mais l'instrument n'établit pas seulement qu'il y a une pluralité des genres de courbes. Il établit qu'il y en a une *infinité*. Cette extension infinie est une contribution importante de *La Géométrie*. Elle a aussi besoin d'un argument *propre* qu'il convient d'identifier : une chose est d'établir que chaque courbe tracée est géométrique, une autre de pouvoir suggérer un « et ainsi de suite ». C'est là d'ailleurs un autre problème d'expression récurrent en mathématiques : comment dépasser la contrainte imposée par la finitude des expressions utilisées ? Comment aller au delà ? Comment ensuite indiquer la différence entre ces expressions et les autres, toutes étant de toute façon finies ? La possibilité d'étendre indéfiniment les genres des courbes est en l'occurrence rapportée à la possibilité de prolonger indéfiniment l'instrument. Que ce soit la *même* équerre à des places *différentes* permet la répétition indéfinie de l'argument. Cet « et ainsi de suite » implique des *variétés d'expressions*, c'est-à-dire le fait de pouvoir disposer de deux expressions à la fois *différentes* et qui soient aussi

considérées comme étant *les mêmes*³¹. L'instrument ne produirait pas son effet sur quelqu'un incapable d'une telle interprétation des équerres, comme celui-ci serait dans l'impossibilité de faire un calcul algébrique s'il ne pouvait à la fois distinguer et identifier deux occurrences d'un même nombre ou d'une même variable (la compétence arithmétique pour calculer $1 + 1$ ou algébrique pour réduire $x + 2x$ suppose des compétences sémiotiques spécifiques). Dans le deuxième dispositif, c'est la possibilité de substituer l'instrument à une de ses parties qui supporte l'extension infinie des courbes et des genres. Or cette substitution implique à nouveau à chaque étape deux variétés d'expressions puisqu'il faut dupliquer chaque instrument obtenu pour en produire un nouveau³².

Les expressions polynomiales offrent aussi cette possibilité d'extension infinie. Ce sont d'ailleurs elles qui aujourd'hui fondent la totalité des courbes algébriques, et en particulier leur extension infinie. Mais ce n'est pas elles qui la supportent ici. Le déroulement de l'inauguration fait au contraire apparaître la constitution des courbes géométriques comme un *préalable* à la constitution de la totalité des équations. La caractérisation des courbes géométriques au moyen des instruments ne saurait non plus être réduite à une définition. Ce serait ignorer tous les enjeux de conformité. Que Descartes propose ici une nouvelle définition des courbes est incontestable. Mais il soutient surtout que cette définition est conforme à la notion pré-existante de courbe géométrique, même si ce n'était pas celle en usage (il considère ici corriger une erreur). L'extension qu'il défend de la notion de courbe géométrique se fait au nom de la conformité et du réalisme. Il ne s'agit pas par exemple d'invoquer l'intérêt d'une définition

³¹ La notion de variété d'expression s'apparente à la notion de *token* mais dépend des expressions considérées. Autrement dit, la compréhension de ce qu'est *une expression* est de ce qu'est une *variété d'expression* sont indissociables. Les différentes occurrences d'une même lettre dans une phrase ou une expression algébrique sont des variétés d'expressions. Les trois points « ... » souvent utilisés pour indiquer cette extension indéfinie sont eux-mêmes des variétés d'expressions. Il y a en l'occurrence iconicité. Ils sont l'expression la plus simple de variétés d'expressions. Les points de suspension souvent utilisés en mathématiques sont aussi souvent une preuve du caractère *non symbolique* des mathématiques : de quoi seraient-ils en effet le symbole ?

³² On peut observer la double fonction de chaque instrument : il est un instrument qui trace une courbe et un instrument dans lequel on peut faire des substitutions.

plus générale susceptible d'étendre l'empire des mathématiques : c'est une extension par conformité.

3.4.3. *Les instruments et la correspondance entre les courbes et les équations*

Le deuxième énoncé inaugural est introduit au Livre II en conclusion de l'inauguration des courbes géométriques au moyen des instruments :

Courbes \longrightarrow Équations

FIGURE 28.

« Et en quelque autre façon qu'on imagine la description d'une ligne courbe, pourvû qu'elle soit du nombre de celles que je nomme Géométriques, on pourra toujours trouver une équation pour déterminer tous ses points en cette sorte. » 322–323

Un énoncé inaugural suppose une totalité reçue et une autre qui ne l'est pas ou qui ne l'est pas dans le rapport considéré avec la première. Dans l'inauguration des courbes par les instruments les courbes n'étaient pas reçues, mais les instruments l'étaient. Une forme d'intuition était associée à la totalité établie, celle des instruments. Descartes semblait devoir inaugurer les courbes géométriques : il devait en constituer la totalité, et il a fait ce qu'il fallait pour cela, et il semble que cela était *nécessaire*. C'est en effet seulement une fois que les courbes ont été inaugurées qu'il introduit le deuxième énoncé inaugural. Dans cet énoncé, les courbes sont maintenant en position de totalité pré-établie et les équations algébriques vont être inaugurées à partir d'elles (et non l'inverse). Ainsi, pour justifier l'association d'une équation à une courbe il a commencé par constituer la totalité des courbes en soutenant sa conformité avec celle des instruments. Ensuite, l'expression même de l'instrument, notamment par le deuxième dispositif, rend presque évidente la mise en équation de la courbe qu'il décrit. L'instrument se prête à une double lecture. Il est l'instrument qui trace la courbe avec laquelle il est *en contact*. Mais en suivant les lignes qui le *composent* on *compose* aussi l'équation de la courbe.

L'équation, au travers de sa composition, peut être ainsi *apposée* à l'expression de l'instrument. Comme nous l'avons fait pour LB (voir figure), il est aussi possible de n'apposer que des lettres marquant les points sur le diagramme et de mettre ensuite celles-ci en rapport avec les composantes

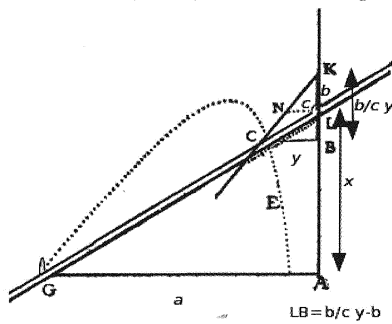


FIGURE 29.

de l'équation : $LB = \frac{b}{c}y - b$ ³³. C'est l'évidence et la possibilité de cette apposition qui soutient la correspondance entre les instruments et les équations. L'instrument, *en tant qu'expression*, met l'équation et la courbe en rapport. Et il faut aussi considérer les courbes et les équations comme *expressions* pour qu'elles puissent, chacune à leur manière, être mises en contact ou apposées à l'instrument. Considérer des concepts ou des idées ne permet pas de prendre en compte ces contacts et ces appositions.

L'intervention des instruments permet de *décomposer* la correspondance entre les courbes et les équations en deux correspondances. Cette décomposition ne fait évidemment pas disparaître l'incommensurabilité des courbes et des équations mais elle la ramène à ces formes remarquables d'incommensurabilité que sont le contact et l'apposition.

La figure 30 récapitule la fonction des instruments dans la correspondance entre les courbes et les équations.

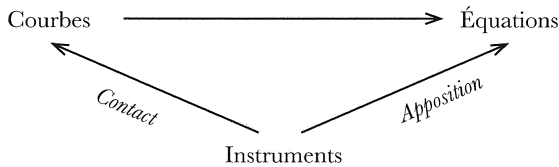


FIGURE 30.

³³ Sur l'association des lettres aux figures dans les mathématiques grecques voir [Netz 1999].

Les courbes géométriques sont ainsi constituées en une totalité homogène. Elles sont aussi rendues indépendantes des problèmes de géométrie auxquelles elles étaient associées. Les appellations « hyperbole », « parabole », « quadratrice », etc. ne rendent plus compte de leur caractérisation.

3.4.4. *Les courbes et les problèmes de la tradition dans l'inauguration des courbes et des équations algébriques*

Descartes dispose dans les courbes reçues de la tradition grecque une totalité ayant un caractère pré-établi, exactement comme les problèmes de géométrie constituent une totalité ayant un caractère pré-établi. Mais si les problèmes interviennent bien en tant que totalité pré-établie, ce n'est pas le cas des courbes qui sont d'abord elles-mêmes l'objet d'une inauguration avant d'intervenir comme totalité pré-établie dans l'inauguration des équations algébriques. Rappelons d'abord que la représentation des courbes est dans *La Géométrie* un problème secondaire par rapport à la représentation et la résolution des problèmes de géométrie : leur représentation sert la représentation et la résolution des problèmes de géométrie au moyen des équations. Par ailleurs, pour pouvoir résoudre tous les problèmes comme il le veut, Descartes est amené à considérer des courbes qui n'étaient pas reçues dans cette tradition : sa « parabole » mais aussi une infinité de genres de courbes supplémentaires. Les courbes de la tradition géométrique grecque ne peuvent pas de ce fait jouer le rôle de totalité pré-établie parce qu'elles ne lui donnent pas la totalité dont il a besoin. Descartes doit, si l'on peut dire, en « pré-établir une ». C'est ce qu'il peut faire avec les instruments grâce auxquels il constitue une totalité de courbes qui peut avoir, du fait de leur « définition » instrumentale, un caractère pré-établi, mais à laquelle les courbes décrites par des équations seront aussi conformes. Descartes peut ainsi introduire une totalité nouvelle de courbes qui étend les courbes reçues par la tradition, et qui ne peut donc pas leur être conforme, en faisant valoir leur conformité à une autre totalité qui a aussi, pour d'autres raisons, un caractère pré-établi. Comme les courbes de la tradition et les courbes construites au moyen des instruments ont les unes et les autres un caractère pré-établi, le détour par les instruments fait ressortir la condition de conformité qu'il permet de satisfaire contrairement aux courbes de la tradition. L'extension des courbes reçues par la tradition

peut ainsi être faite par l'introduction d'une totalité *conforme* à une totalité *pré-établie*. Cela met en évidence le rôle de la *conformité* dans le développement des mathématiques, et en particulier, ce qui peut sembler paradoxal, dans leur extension et leur généralisation.

3.5. La classification de Pappus : les figures-figures et les figures-opérations.

3.5.1. La classification de Pappus et les figures-opérations

La classification de Pappus qui distingue les problèmes plans, solides et linéaires n'est présentée qu'au début du Livre II. Elle donne néanmoins déjà son unité au Livre I consacré aux « problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites » et elle rend compte en partie de la progression d'ensemble de *La Géométrie*. On a aussi vu que Descartes étend cette classification dont il reprend de ce fait le principe. Le soutien du premier et principal énoncé inaugural se fait en suivant cette classification : son énoncé est décliné pour les problèmes plans, puis pour les problèmes solides. La coïncidence de la classification par les équations avec la classification de Pappus contribue aussi à établir la conformité de la représentation des problèmes par des équations. La référence à cette classification n'est donc pas de pure convenance.

Or, la classification de Pappus est fondée sur la possibilité d'associer des courbes à chaque problème de géométrie. Mais les courbes associées aux problèmes ne sont pas leurs solutions mais les courbes qui servent à les construire. Cette classification, qui n'a évidemment pas été introduite par Descartes, établit une correspondance entre les problèmes et les courbes, soit entre les deux totalités reçues des deux principaux énoncés inauguraux (voir figure 31³⁴). Elle établit de ce fait un lien entre ces deux énoncés inauguraux. Il convient donc d'en préciser le rôle dans *La Géométrie*.

Il est au premier abord singulier pour le lecteur rompu à la géométrie analytique de classer les problèmes par les courbes qui servent à *construire* leur solution plutôt que directement par celles qui en sont les solutions. Je me propose d'en rendre compte à partir d'un exemple élémentaire : le théorème de Pythagore.

³⁴ Cette figure comprend des imprécisions qui seront ensuite corrigées. La discussion qui suit sert à introduire les distinctions utiles à ces corrections.

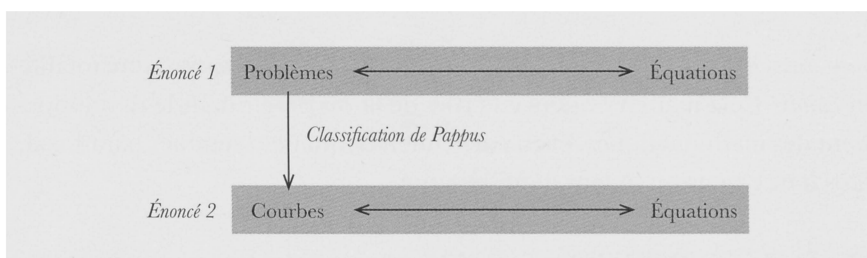


FIGURE 31.

Je rappellerai d'abord la place et la première fonction du théorème de Pythagore dans les *Eléments* d'Euclide. Les deux premiers Livres des *Eléments* sont en grande partie consacrés à résoudre le problème de la quadrature des figures rectilignes, à savoir : transformer toute figure rectiligne en un carré équivalent (de même aire, mais sans faire intervenir de mesure). Il est énoncé et sa résolution achevée à la proposition 14 à la fin du Livre II³⁵ :

II-14

Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée

C'est là typiquement un problème que l'on peut chercher à situer dans la classification de Pappus. Nous allons voir tout de suite qu'il s'agit d'un problème plan.

Le théorème de Pythagore est quant à lui l'avant dernière proposition du Livre I (la dernière étant sa réciproque) :

I-47

Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit.

Ce théorème permet de transformer deux carrés quelconques (placés sur les côtés opposés à l'hypoténuse) en un carré équivalent (construit sur l'hypoténuse).

Il permet de la même manière de faire la différence de deux carrés dont il donne aussi le résultat sous forme de carré (différence du carré placé sur l'hypoténuse avec celui placé sur l'un des côtés opposés, le troisième carré étant celui cherché).

³⁵ Toutes les citations des *Eléments* sont extraites de l'édition et de la traduction de Bernard Vitrac [Euclide 1990].

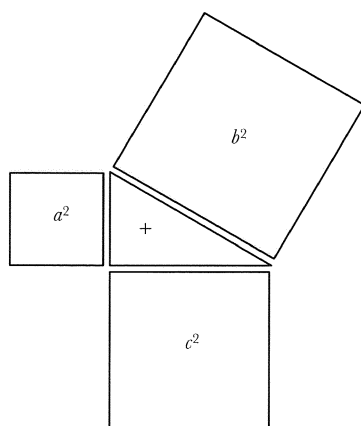


FIGURE 32.

Euclide démontre au Livre I que toute figure rectiligne peut être transformée en un *rectangle* (plus généralement en un parallélogramme dont on peut choisir librement un angle et un côté, c'est la proposition I-45). Cela établi, il ne reste plus pour achever la quadrature des figures rectilignes qu'à démontrer que tout rectangle peut être transformé en un carré. Cette dernière transformation se fait en deux temps, d'abord en transformant un rectangle en différence (*gnomon*) de deux carrés, puis en transformant le *gnomon*, grâce au théorème de Pythagore, en un carré. Le théorème de Pythagore sert donc dans les *Eléments* à transformer la figure formée par deux carrés (par leur somme ou leur différence) en un carré équivalent. Or, et c'est la mon point, c'est le *triangle rectangle* qui sert à réaliser cette transformation. Autrement dit, le triangle est ici l'*expression d'une opération géométrique* : il réalise une addition. Il est bien sûr aussi une figure comme nous sommes habitués à les considérer quand nous faisons aujourd'hui de la « géométrie euclidienne » : une figure, composée de sommets et de côtés, qui peut être accolée à d'autres, etc. C'est d'ailleurs exclusivement à ce triangle-figure que se rapporte la *démonstration* du théorème de

Pythagore. Mais le triangle intervient comme triangle-opération³⁶ dans la démonstration d'autres propositions, comme on l'a vu avec la proposition II-14. Le triangle est donc à la fois l'expression d'une figure et l'expression d'une opération *sur* les figures.

Les expressions de la géométrie grecque présentent cette caractéristique sémiotique remarquable de supporter deux interprétations conjointes; d'être des figures-figures et des figures-opérations. Et il en est en fait ainsi de toutes les figures puisque chaque figure peut être considérée comme l'expression servant à construire une figure d'un genre donné à partir de figures construites sur elle. Ainsi, la figure-opération présuppose la figure-figure, mais toute figure peut être considérée à la fois comme une figure-figure *et* comme une figure-opération. La figure-figure nous est restée familière, pas la figure-opération. Or ce sont les figures-opérations qui interviennent dans la classification de Pappus.

Le théorème de Pythagore peut lui-même être facilement énoncé comme *un problème* : « construire le carré somme (resp. différence) de deux carrés ». La construction demandée se fera avec le triangle rectangle. La « solution » de ce problème n'est donc pas le carré (somme ou différence), mais bien plutôt le triangle rectangle qui sert à construire le carré cherché. Le carré est bien sûr cherché, mais c'est une figure en grande partie donnée puisque l'on sait que c'est un carré (le problème n'est pas par exemple : « trouver la somme de deux carrés », ce qui serait soit trivial, les deux carrés représentant très bien leur somme, soit n'aurait aucun sens). Le moyen de construire ce carré est bien plus indéterminé que le carré cherché. Il est aussi plus intéressant puisqu'il permet de trouver les carrés cherchés à partir de n'importe quelle paire donnée de carrés. Or nous venons de voir que cette construction pouvait très naturellement être associée à une figure, en l'occurrence un triangle rectangle. Elle a ainsi une expression géométrique. Le « problème de Pythagore » est de ce fait un problème plan.

³⁶ Au lieu d'*opération* on pourrait aussi bien parler de *fonction* et considérer le triangle comme l'*expression d'une fonction* de deux variables qui associe aux figures semblables construites sur deux de ses côtés, la figure semblable construite sur le troisième de ses côtés.

La résolution du problème de la quadrature des figures rectilignes (proposition II-14) implique quant à elle les figures-opérations qui servent à transformer une figure quelconque en un rectangle, puis celles qui servent à transformer ce rectangle en un *gnomon* de deux carrés, et enfin celle qui sert à transformer ce *gnomon* en un carré. Comme toutes ces figures-opérations sont des figures rectilignes planes (la dernière étant le triangle rectangle du théorème de Pythagore), ce problème est un problème plan.

Les *courbes* sont de manière plus évidente encore des figures-opérations associées à la construction de problèmes. Ainsi, d'après Proclus, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse ont toutes été à l'origine des figures-opérations associées à des problèmes de quadrature et l'étaient toujours notamment pour Euclide³⁷. De même, la quadratrice, dont le nom même indique la fonction (Pappus IV, 30, 250 ; [Tannery et al. 1912a, p. 3]), est la figure-opération qui résout le problème de la quadrature du cercle ou encore le problème de la division d'un arc selon un rapport donné exactement comme le triangle rectangle est la solution du problème de Pythagore. De même la spirale est la courbe qui effectue la rectification

³⁷ « Les disciples d'Éudème disent que la parabole des aires, leur hyperbole et leur ellipse sont d'anciennes découvertes qui appartiennent à la Muse des Pythagoriciens. Mais les auteurs récents, qui ont emprunté des dénominations à ces derniers, les ont transférées dans les lignes dites coniques, et ont appelé l'une d'elles la parabole, l'autre l'hyperbole et la dernière l'ellipse, bien que ces hommes anciens et divins eussent envisagé les choses signifiées par ces termes dans le sens de la description des aires sur une droite déterminée dans le plan. En effet, si, exposant une droite, on étend en même temps une aire donnée sur cette droite entière, cela se dit faire la parabole de cette aire ; et, si l'on fait la longueur de l'aire plus grande que celle de cette droite, cela se dit faire l'hyperbole, et, si l'on fait cette longueur plus petite, de telle sorte qu'une portion de la droite soit en dehors de l'aire décrite, cela se dit faire l'ellipse. C'est d'ailleurs de cette manière qu'Euclide fait mention de l'hyperbole et de l'ellipse dans son sixième livre ; tandis qu'ici, voulant appliquer un parallélogramme équivalent à un triangle donné le long d'une droite donnée, il a besoin de la parabole, afin que nous ayons, non seulement l'établissement d'un parallélogramme équivalent à un triangle donné, mais encore sa parabole suivant une droite déterminée. Ainsi, par exemple, si l'on donne un triangle ayant une aire de douze pieds, et si l'on expose une droite d'une longueur de quatre pieds, on fait la parabole d'un parallélogramme équivalent à ce triangle lorsque, après avoir pris la longueur totale de quatre pieds, on trouve de combien de pieds doit être la largeur pour que le parallélogramme devienne équivalent au triangle. Trouvant dans ce cas que la largeur est de trois pieds, et, multipliant la longueur par la largeur, nous aurons l'aire pour autant que l'angle proposé soit droit. Voilà en quoi consiste le fait de paraboliser qui nous a été transmis originellement par les Pythagoriciens. » Proclus, 356–368.

du cercle, c'est-à-dire la construction d'un segment de même longueur que la circonférence d'un cercle, etc.

L'étrangeté au premier abord de la classification de Pappus me semble donc pouvoir s'expliquer par le fait de ne reconnaître que les figures-figures. Dans ce cas, seule une figure-figure peut être envisagée comme la solution d'un problème de géométrie. Il peut dès lors en effet sembler un peu étrange de faire intervenir les constructions qui n'ont pas pour nous d'expression algébrique ou même géométrique. Mais si on rapporte en revanche les figures à leurs caractéristiques sémiotiques historiques et que l'on reconnaît qu'elles sont autant des figures-opérations que des figures-figures, il devient alors possible et tout à fait naturel de considérer que les figures-opérations soient les solutions recherchées et de classer les problèmes à partir d'elles. En résolvant un problème d'expression, l'inauguration en pose un, en quelque sorte dual, au lecteur familier de la géométrie analytique et pour lequel l'inauguration n'est plus nécessaire.

3.5.2. *Les problèmes, les solutions et leurs constructions*

La distinction entre d'une part « les solutions » et d'autre part « les moyens pour les construire » est elle-même tout à fait relative et ne peut être tenue pour établie³⁸. Elle n'intervient pas dans la présentation par Descartes de la classification de Pappus. Il parle des « *Problemes de Geometrie (...)* qui peuvent estre construits en ne traçant que des lignes droites & des cercles ; etc. ». Il n'y a pas ici d'opposition lexicale marquée entre les courbes « solutions » et celles qui serviraient à les construire. Descartes n'associe pas couramment le terme de « solution » à un problème. Il n'a que deux occurrences et dans les deux cas il s'agit de « la solution d'une question » (325, 402), « question » renvoyant à « problème » (par exemple « question

³⁸ [Cifoletti 1992a, p. 293–340] présente une histoire des discussions sur la notion de problème depuis Aristote jusqu'à Descartes (notamment Pappus, Proclus, Ramus, Peletier, Gosselin, Clavius) et étudie la transformation de cette notion du fait de son association à une équation dans les *Regulae* de Descartes. Elle met notamment en évidence que Descartes transforme la conception des problèmes remontant à Aristote fondée sur la relation entre sujet et prédicat par une égalité entre opérations [Cifoletti 1992a, p. 335]. Cifoletti [1995] inscrit le rapport entre problèmes et équations dans un processus de fusion entre la dialectique et l'algèbre, propre au contexte français, à laquelle Peletier et Gosselin ont contribué et que Descartes achève.

de Pappus », 307). Le syntagme « construire un problème » est de loin la plus utilisé³⁹. « Résoudre un problème » l'est aussi, mais bien moins fréquemment. Les équations ont elles-mêmes des « racines » qui ne sont pas appelées des « solutions ». Il n'est pas non plus question de « résoudre une équation », mais de la « démêler », expression qui désigne de toute façon plutôt la transformation de l'équation brute, issue directement de la mise en équation, en une équation donnée sous une forme plus identifiable. Ainsi, les lexiques relatifs aux problèmes et aux équations sont dans *La Géométrie* disjoints. Aujourd'hui ils ne le sont plus : « résoudre » et « chercher les solutions » se rapportent l'un et l'autre indifféremment aux problèmes et aux équations. Le système d'oppositions lexicales de *La Géométrie* et celui de son lecteur actuel, y compris historien, ne permettent pas les mêmes circulations entre les différents termes, ils ne construisent pas les mêmes ponts, n'opèrent pas les mêmes identifications. Descartes inaugure une assimilation qui ne saurait avoir déjà pénétré son système d'oppositions lexicales ; la transformation du lexique relève d'un autre temps que celui de l'inauguration. Mais nous lisons aujourd'hui *La Géométrie* dans une langue qui en est pénétrée. Il est d'autant plus difficile de la suspendre⁴⁰. Il nous est inversement difficile de parler, comme le fait Descartes fréquemment, de la « construction d'un problème ». Cela heurterait. L'idée de construction sera ainsi moins associée aux problèmes et un peu plus à un autre terme, la « solution » notamment, qu'elle ne l'est chez Descartes. L'emploi de « résoudre un problème », qui peut sembler fidèle parce que l'usage, quoique relativement rare, en est attesté chez

³⁹ Par exemple : 297, 300, 301, 303, 304, 315, 371, 380, 397, 398, 401, 412, 413.

⁴⁰ L'index de [Bos 2001] comprend par exemple l'entrée : « solution, *see* equation ; problems ». Un examen de ce livre montre néanmoins que les syntagmes « solution d'une équation » ou « résoudre une équation » y sont remarquablement peu usités. Cela vient de ce que l'auteur introduit le syntagme « construction d'une équation » [Bos 2001, p. 363]. Mais « construction d'une équation » n'est pas non plus attesté ! L'introduction de ce syntagme permet de conserver un syntagme commun aux problèmes et aux équations (« construction d'un problème/d'une équation »), en substituant aux termes associés aux équations (« solution d'un problème/d'une équation ») celui associé aux problèmes. Herreman [2001] donne un exemple de l'incidence du système d'oppositions lexicales du lecteur sur sa traduction. Pour une analyse du lexique relatif aux « problèmes » utilisé par Descartes dans les *Regulae* voir [Cifoletti 1992a, p. 305–310].

Descartes, favorise néanmoins une acception de la résolution commune aux problèmes et aux équations dont l'indifférence à l'opposition problèmes *vs* équation n'est pas neutre (« résoudre une équation » n'étant pas attesté dans *La Géométrie*). Soutenir la conformité n'apparaît guère nécessaire quand les oppositions lexicales ont elles-mêmes été adaptées. Les enjeux de l'inauguration en deviennent d'autant plus difficiles à reconnaître. Il est alors utile de disposer d'un autre système d'expressions pour accueillir ces différences et retrouver la nécessité de l'inauguration⁴¹.

3.5.3. *Les courbes-opérations et l'inauguration*

La classification de Pappus est fondée sur une correspondance entre les problèmes et les courbes impliquées dans leur *résolution*. Considérons maintenant ce qu'il advient de ce rapport dans *La Géométrie* à partir du schéma représentant les relations entre les deux premiers énoncés inauguraux (voir fig. 33).

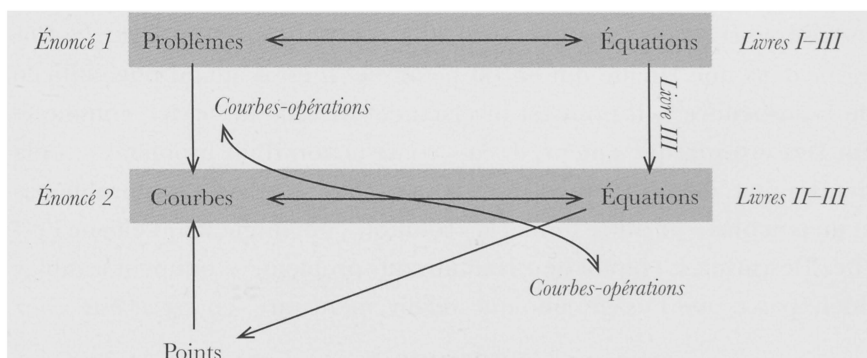


FIGURE 33.

⁴¹ L'usage de diagrammes, tels ceux utilisés ici, aide à suspendre les effets venant du système d'oppositions lexicales. Pour conserver autant que possible le langage habituel, je n'ai pas cherché à éviter l'emploi de « solution ». Le lecteur peut néanmoins vérifier que l'analyse proposée n'en est pas affectée. Le plus simple pour s'en convaincre est sans doute de remarquer que l'analyse inaugurale conduit à dissocier systématiquement tout ce dont l'inauguration soutient la conformité, cela indépendamment du système d'oppositions lexicales du texte analysé ou de la langue dans laquelle se fait l'analyse.

Les courbes-opérations impliquées dans la construction des problèmes sont en gras *au-dessus* de la flèche verticale entre les problèmes et les courbes. Les courbes solutions des problèmes sont à l'extrémité de cette flèche. Ce sont des courbes-figures. Les courbes-opérations servent à les construire. Elles ne sont *jamais* mises en équation⁴². Elles jouent un rôle essentiel dans l'ensemble de *La Géométrie*, mais toujours pour *soutenir* la conformité de la résolution des problèmes avec celle des équations. Elles ne sont essentielles qu'à l'*inauguration*. Elles ne jouent en revanche aucun rôle dans la *correspondance* entre les problèmes et les équations. Elles interviennent donc pour soutenir la conformité, mais pas dans le circuit de la résolution algébrique d'un problème de géométrie. Elles sont aussi essentielles pour soutenir l'énoncé inaugural relatif aux courbes et aux équations et notamment pour que soient reçues les courbes associées aux équations. Mais une fois ces courbes reçues, elles ne sont plus utiles : tous les moyens pour les tracer seront bons puisque la nature de ces courbes a été établie, notamment dans *La Géométrie...*, et il suffit à présent pour qu'elles soient admises qu'elles correspondent à des équations. Le schéma de résolution devient le schéma suivant dans lequel ces courbes ne jouent plus aucun rôle. C'est le schéma que tout lecteur de *La Géométrie* imprégné de géométrie analytique a en tête.



FIGURE 34.

En lisant la figure de gauche à droite, on voit que les problèmes ont gagné une nouvelle expression mathématique : l'équation polynomiale. Cette représentation présente l'avantage que leur résolution complète n'est plus un préalable à leur classement. Mais surtout les énoncés et les

⁴² C'est là l'imprécision signalée dans la figure donnée au début de cette partie.

courbes sont représentés par le même système d'expressions (équations). L'incommensurabilité entre les problèmes et les courbes disparaît au niveau de leur représentation (ce qui montre bien que ces représentations ne sont pas conformes...). Leur rapport devient celui de deux équations, et devient une question de réduction d'équations.

Les courbes-opérations n'ont plus ici de fonctions. Le rapport entre les problèmes et les courbes passe par les équations qui filtrent en quelque sorte les courbes-opérations. Les problèmes sont dès lors associés exclusivement à des courbes-figures. L'acception de la « solution d'un problème » change ou, plus exactement, se met en place : problèmes et équations vont avoir un même rapport à leurs « solutions », celui-ci déterminant celui-là.

La classification de Pappus servait à classer la totalité des problèmes de géométrie. Elle résolvait le problème sémiotique posé par l'expression des problèmes en tirant parti d'un rapport entre les problèmes et les courbes qui servent à les résoudre, en l'occurrence des courbes-opérations, les courbes pouvant de fait être classées à partir de leurs expressions. L'introduction des équations, dans les rapports considérés aux problèmes et aux courbes, donne à la fois une expression aux problèmes à partir de laquelle il est possible de les classer et élimine les courbes-opérations. La classification de Pappus n'a plus ni raison ni moyen d'être. Elle est ainsi à la fois un ressort essentiel de l'inauguration de la représentation des problèmes et des courbes par des équations, mais celle-ci conduit aussi à l'élimination des conditions de sa mise en œuvre et des raisons pour la considérer⁴³.

⁴³ Giusti [2000, p. 38–45] introduit l'opposition entre les courbes-équations introduites par Descartes dans *La Géométrie* et les courbes-constructions de la géométrie antique. Les courbes-équations combinent trois caractéristiques. Elles sont à la fois des instruments de recherche, des objets d'études et des solutions de problèmes. Il fait de la combinaison de ces trois caractéristiques (instruments de recherche, solutions de problème et objets d'études) la condition pour la détermination d'un nouvel objet mathématique. Cela lui permet de comparer les courbes de Descartes à celles de Fermat [1636] et d'observer que les courbes de Fermat sont des objets d'étude mais ne sont ni des instruments de recherches ni des solutions de problèmes. Il peut ainsi en conclure que Fermat, contrairement à Descartes, n'arrive pas à la constitution d'un nouvel objet. La notion de figure-opération, introduite ici, peut être rapprochée de celle de courbe instrument considérée par Giusti (je dois à l'un des rapporteurs d'avoir attiré mon attention sur ce rapprochement). Les indications données sont néanmoins insuffisantes pour une comparaison très précise. Les différences entre

3.6. *La fonction inaugurale de La Géométrie*

L'application des distinctions qui fondent les notions d'énoncé et de texte inaugural ont permis d'établir que *La Géométrie* était bien un texte inaugural. Cela a notamment permis de mettre en évidence l'importance du souci de conformité dans ce texte. Reconnaître ce caractère inaugural permet d'expliquer une structure qui a pu être présentée comme « incohérente », « énigmatique » etc. et évite d'introduire des hypothèses relatives à sa genèse ou de recourir à des partis pris philosophiques pour rendre compte de ses défauts éventuels. Inversement, ce caractère inaugural permet de rendre compte de l'abandon d'un dispositif qui ne sera plus utile, donc guère repris, et bientôt plus compris.

3.6.1. *Le soutien des deux principaux énoncés inauguraux*

Le premier énoncé inaugural, énoncé d'emblée, affirme que les équations algébriques donnent une représentation conforme des problèmes de géométrie. C'est sans conteste le principal énoncé, celui auquel toute *La Géométrie* peut être rapportée. Son soutien repose à la fois sur une description générale de la mise en équation et des caractéristiques remarquables du problème de Pappus, pour certaines avérées, pour d'autres simplement fausses, qui lui font jouer plusieurs rôles dans le soutien de cet énoncé.

Le deuxième énoncé inaugural affirme la conformité des courbes et des équations polynomiales. Cette conformité est reconnue comme une des

d'une part l'opposition figure-figure *vs* figures-opérations et d'autre part l'opposition courbe instrument de recherche *vs* courbe solution de problème *vs* courbe objet d'études ressortent plus clairement de l'usage qui en est fait et des conclusions qui en sont tirées. Selon Giusti, Descartes crée un nouvel objet, les courbes équations, parce qu'il y a dans *La Géométrie* à la fois des courbes instruments de recherche, des courbes objets d'étude et des courbes solutions de problèmes. Or, en prêtant plus d'attention aux *fonctions* de ces différentes courbes dans le texte, l'analyse inaugurale met en évidence que les courbes instruments de recherche (figures-opérations) ne servent en fait *qu'à l'inauguration* : Descartes ne les considère que pour établir la conformité des courbes-équations avec les courbes-constructions, c'est-à-dire en l'occurrence pour établir la constructibilité des courbes-équations. Ainsi, leur présence ne suffit pas à en faire une caractéristique des courbes-équations. Leur élimination est au contraire une des transformations opérées dans le rapport aux figures par *La Géométrie*. C'est afin de mettre en évidence ce changement, qui se répercutera ensuite sur les manières de lire les textes de géométrie antique, que les notions de figures-figures et de figures-opérations ont été introduites.

conséquences les plus importantes de ce texte sans en être l'objectif principal⁴⁴. La notion d'énoncé inaugural confirme ce jugement et apporte quelques précisions. En premier lieu, il est établi que cette conformité est introduite en tant qu'énoncé inaugural ; elle est *énoncée* et elle est *soutenue*. Ce qui déjà en précise le statut. Par ailleurs, c'est un énoncé inaugural introduit pour soutenir l'énoncé inaugural principal. C'est une inauguration secondaire. Son soutien n'en tient pas moins une place importante et consiste principalement à établir la conformité de la construction point par point des courbes à partir de leur équation avec les constructions géométriques reçues. Mais une fois cette conformité soutenue, et par le fait de l'avoir été, le recours aux constructions habituelles n'est plus indispensable. La construction des courbes est ainsi mise en facteur. Elle est à la fois garantie et éliminée. Un changement, dont l'importance historique est reconnue, peut ainsi être introduit par des arguments de conformité.

Le point de vue inaugural conduit à reconnaître la *nécessité* de soutenir cette conformité, et notamment la nécessité de constituer la totalité des courbes géométriques. Descartes ne semble pas pouvoir simplement introduire les *courbes algébriques*, c'est-à-dire dériver directement la constitution de la totalité des courbes de celle des équations algébriques : il commence de fait par constituer indépendamment la totalité des courbes géométriques, en recourant pour cela aux instruments, pour seulement ensuite soutenir que cette totalité coïncide avec les courbes construites point par point à partir des équations.

Les équations algébriques feront progressivement la preuve de leur utilité que ce soit pour résoudre des problèmes ou pour représenter des courbes. Elles seront de plus en plus grosses de ces expériences accumulées et bénéficieront d'un soutien cumulé et varié. Il n'en est visiblement pas ainsi quand Descartes écrit *La Géométrie* et il semble devoir soutenir ces

⁴⁴ « L'équivalence entre courbe et équation (...) apparaît comme un thème plutôt marginal dans la *Géométrie* » [Bos 1998, p. 293]. « My analysis of the Geometry in the preceding chapters has shown, however, that Descartes' main motivation in writing the book was not to expose the equivalence of curve and equation. Rather, it was to provide an exact, complete method for solving "all the problems of geometry". » [Bos 2001, p. 416]. Maronne [2007] discute l'établissement de cette équivalence en mettant l'accent sur le fait que le « refus d'introduire des quantités négatives » n'autorise qu'une correspondance locale entre équations et courbes.

représentations. Les instruments sont à leur tour introduits en soutien du deuxième énoncé inaugural, ce qui contribue à préciser leur statut dans ce texte et en particulier leur fonction dans la correspondance entre les courbes géométriques et les équations algébriques. Toutes ces relations sont à la fois objectives et leurs contributions aux diverses inaugurations peuvent être complètement déterminées. Il est sans doute intéressant qu'elles puissent être dégagées indépendamment de toute considération préalable sur la découverte et la maîtrise progressives par Descartes des divers instruments introduits, de sa découverte du problème de Pappus et de sa solution, de la classification de Pappus, de l'Algèbre et de leurs incidences mutuelles.

3.6.2. *Retour sur l'interprétation des caractérisations des textes et des énoncés inauguraux*

Le nombre des énoncés inauguraux soutenus dans ce texte donne une mesure de son importance inaugurale. Je n'en connais pas d'autre qui en soutienne autant.

Cela permet de voir dans un même texte inaugural la condition de réalisme satisfaite différemment et la coexistence de totalités diversement pré-établies. Cela permet de lever des malentendus sur d'éventuels présupposés philosophiques touchant la condition relative au « réalisme ». En effet, les problèmes de géométrie, les instruments et les courbes géométriques ne sont pas pré-établis de la même manière. Les problèmes de géométrie le sont comme une sorte d'héritage culturel constitué et relativement figé. Descartes propose de résoudre un problème ancien qui n'avait pas été résolu. Il ne propose pas de résoudre un problème qui n'aurait jamais été énoncé et relatif à de nouveaux objets mathématiques. Le caractère pré-établi des instruments tient à leur matérialité qui paraît aussi, mais différemment, en faire un tout constitué. Le caractère pré-établi des courbes géométriques, auquel celui des problèmes est lié, tient lui aux caractéristiques propres qui en font des courbes géométriques. Sans doute Descartes ne conçoit-il pas par exemple que des progrès dans la conception des instruments puisse conduire à concevoir de nouvelles courbes géométriques.

Le réalisme a à chaque fois un fondement différent, susceptible d'interprétations philosophiques variées, mais il y a bien à chaque fois un certain réalisme.

La condition d'inauguration est elle-même satisfaite de manière différente. La nouveauté de la mise en relation des problèmes et des équations, de la mise en relation des courbes et des équations, etc. ne sont pas les mêmes. Elles pourront de ce fait être aussi diversement discutées et contestées. La première pourra être contestée à partir de la mise en équation des problèmes déjà effectuée par Viète. La deuxième pourra l'être en convoquant Fermat [1636]. L'inauguration par les instruments pourrait sans doute l'être aussi. La diversité même des directions vers lesquelles il faut se tourner pour les contester toutes conduit à relativiser la contestation de chacune au regard de leur intrication étroite dans ce texte. Leur concours dans le soutien du premier et principal énoncé inaugural doit être pris en compte dans une évaluation de l'originalité inaugurale de ce texte.

L'incommensurabilité prend aussi des formes variées. L'incommensurabilité des problèmes et des équations polynomiales, des courbes et des équations polynomiales, des instruments et des courbes, des instruments et des équations polynomiales sont toutes différentes. Ces différences renvoient à autant de systèmes d'expressions différents.

3.6.3. *Une méthode*

Les énoncés inauguraux sont facilement repérables. Les arguments donnés pour les soutenir ne le sont pas moins. Subodorer le caractère inaugural d'un texte n'est pas difficile. Cela fait, l'analyse est ensuite largement déterminée par l'obligation de déterminer les représentations inaugurées, les totalités en jeu, et les arguments mis en œuvre pour répondre aux problèmes sémiotiques posés par l'incommensurabilité et la conformité. L'analyse se doit de déterminer par quels moyens et dans quelle mesure ils ont pu être résolus. Si *La Géométrie* est un texte inaugural particulièrement complexe en raison du nombre d'énoncés soutenus, en suivre l'inauguration dans son déroulement permet en retour d'en faire facilement l'analyse.

Ignorer le caractère inaugural d'un texte expose inversement celui qui en fait l'analyse aux effets de l'inauguration, celui-ci risquant de tenir pour reçues, voire d'exploiter lui-même dans son analyse, les caractéristiques de la représentation inaugurée. L'interprétation inaugurale de *La Géométrie* a permis de mettre en évidence la différence entre les rôles joués par les courbes-figures et les courbes-opérations. Ces deux types de courbes ont incontestablement des rôles majeurs dans *La Géométrie*. Les courbes-opérations sont impliquées dans la résolution des problèmes, mais elles n'interviennent dans *La Géométrie* que pour *soutenir* les énoncés inauguraux. Cette fonction les rend à terme inutiles. Après l'inauguration, elles n'ont plus de rôle à jouer. Descartes va lui-même rapidement se satisfaire de la construction point par point. Inversement, les courbes solutions acquièrent une importance, et en tout cas une exclusivité, qu'elles n'avaient sans doute pas et qu'elles n'ont pas dans *La Géométrie* mais que celle-ci contribue à mettre en place. Cela contribue aussi à modifier l'acception donnée à « la solution d'un problème » qui pourra ensuite constituer un biais dans les lectures qui seront proposées de ce texte.

Les notions de texte et d'énoncé inauguraux permettent d'identifier facilement des moments de transition dont l'analyse est particulièrement propice à de délicats anachronismes en raison même des transformations opérées par ces textes. Toute analyse de *La Géométrie* est particulièrement exposée aux biais induits par des différences dans les caractéristiques attribuées aux problèmes de géométrie, aux courbes et aux équations algébriques et dans la configuration et la nature de leurs rapports mutuels.

3.6.4. *Conformité et généralisation*

Descartes n'entend pas faire accepter des problèmes, des solutions ou des courbes qui ne l'étaient pas déjà (ou qui n'auraient pas déjà pu l'être). Il ne saurait s'agir pour lui d'introduire des possibilités de *généralisations*. Les mathématiques ne se développent pas ici, comme il arrive parfois de croire qu'elles le font toujours, dans une recherche de la plus grande généralité, ni d'ailleurs d'une quelconque généralité, mais au contraire dans le souci de la plus complète *conformité*⁴⁵. Le mathématicien s'efforce ici

⁴⁵ Sur l'importance de la généralisation dans la justification de développements mathématiques voir Flament & Nabonnand [2011].

d'établir, comme il le peut, la conformité des expressions algébriques à la conception reçue des problèmes et à celle, qu'il défend, des courbes géométriques. Ce qui est remarquable en l'occurrence, ce n'est pas le niveau d'abstraction atteint par le texte, mais la conformité des représentations proposées. Il ne s'agit pas non plus de se dégager d'intuitions sous-jacentes pour permettre le transfert de théorèmes avec leur démonstration d'un domaine à un autre mais au contraire d'assurer et d'établir une reproduction exacte des problèmes de géométrie, de leur résolution, des courbes géométriques et de leurs attributs. La représentation algébrique présente bien sûr des caractéristiques avantageuses sur ce qu'elle reproduit, elle est introduite et elle est en partie toujours utile pour cela. Mais ces avantages ont en l'occurrence été introduits avec le souci de préserver la conformité. Ce paradoxe accompagne tous les énoncés inauguraux.

3.6.5. *Conformité ou exactitude*

L'analyse inaugurale de *La Géométrie* conduit à un point de vue en quelque sorte dual de celui de Bos [2001]. En effet Henk Bos propose une analyse de ce texte et de sa genèse axée sur l'exigence d'un critère de démarcation des courbes géométriques et la recherche d'une caractérisation de l'exactitude d'une construction. La dynamique historique et l'analyse qu'il propose sont donc essentiellement épistémologiques. Le point de vue inaugural conduit à remplacer le problème de la *démarcation* par celui de la *constitution des totalités*, celui de l'*exactitude* par celui de la *conformité* et, enfin, les contraintes épistémologiques par des contraintes sémiotiques. Cela conduit notamment à une appréciation tout à fait différente des développements sur la nature des lignes courbes du début du Livre II. Henk Bos y voit des considérations épistémologiques *contraignantes* qu'il inscrit dans une genèse finement reconstruite des travaux de Descartes précédant *La Géométrie*. Je les ai ici exclusivement inscrits dans le texte de *La Géométrie* où ils apparaissent alors surtout *contraints* par la nécessité de l'inauguration. Le fait de constituer ces totalités et de soutenir ces énoncés a bien sûr une histoire, mais il apparaît néanmoins possible de faire une analyse de l'ensemble de *La Géométrie* pour laquelle la reconstitution de cette histoire n'est pas un préalable.

3.6.6. *Inauguration et totalité*

Le point de vue inaugural revient à accorder une attention particulière aux totalités qui interviennent en mathématiques en les étudiant au moment de leur constitution. L'idée sous-jacente est que certaines caractéristiques des mathématiques sont à rapporter aux caractéristiques de ces totalités, et plus précisément à celles de leurs expressions, et que les énoncés mathématiques, et en particulier leur généralité, y trouvent leurs conditions de possibilité. Si Descartes introduit une méthode générale pour déterminer les tangentes des courbes, c'est aussi parce qu'il a introduit un système d'expressions qui permet cette généralité. Ce sont ici les expressions auxquelles elle s'applique qui rendent possible cette généralité. Et ce n'est pas diminuer le mérite de Descartes, au contraire, que de reconnaître qu'il a dû d'abord lui-même constituer les conditions d'expression d'une telle méthode. Comme ces totalités, avec leurs caractéristiques, ne sont nullement naturelles, elles doivent être introduites et même soutenues.

La Géométrie est un texte qui inaugure la totalité des équations algébriques. Ce faisant, ce texte introduit une représentation remarquable à la fois des problèmes et des courbes, d'autant plus remarquable qu'elle leur est aussi commune : une représentation uniforme est ainsi donnée de tous les problèmes et des courbes qui permet à Descartes de considérer qu'il peut les *parcourir dans leur totalité* et dès lors affirmer « *qu'il n'est pas malaysé de faire un dénombrement de toutes les voyes* » pour trouver les racines des équations et considérer qu'il est possible de « *démonstrer qu'on a choisi la [voye] la plus generale & la plus simple* » (401). L'inauguration de la totalité des expressions algébriques rend possible des énoncés et des démonstrations qui ne l'étaient pas auparavant. Reconnaître la nécessité d'inaugurer ces totalités, c'est-à-dire reconnaître l'inauguration comme un moment à la fois récurrent et rare au cours du développement des mathématiques, permet aussi de retrouver des observations déjà faites sur la différence de statut de la Géométrie et de l'Algèbre dans ce texte⁴⁶. La totalité des

⁴⁶ À propos du statut de l'Algèbre dans la Géométrie, René Taton écrivait : « [Descartes] avait conçu cette science [la géométrie analytique] comme "une application de l'algèbre à la géométrie", nom qu'elle conservera d'ailleurs jusqu'au premières décades du XIX^e siècle et que Monge lui-même adoptera, c'est-à-dire comme une technique de structure algébrique, adaptée à la résolution des problèmes d'essence géométrique et spécialement des problèmes des lieux

expressions algébriques n'étant pas constituée, il semble assez improbable que les distinctions, en particulier le degré des équations, les critères de simplicité (irréductibilité algébrique) inhérents à ce système d'expressions soient appliqués aux expressions géométriques. Le texte s'attache en effet plutôt à établir que les expressions algébriques permettent de *reproduire* l'analyse géométrique, ses distinctions, ses classifications, etc. L'adoption d'une classification par paires de degrés plutôt que par degrés en est une des manifestations les plus évidentes : Descartes remarque explicitement que les équations de degré deux définissent aussi bien le cercle, la parabole, l'hyperbole et les ellipses mais il les laisse néanmoins dans deux genres distincts⁴⁷. Il convient d'abord d'inaugurer les expressions algébriques, de soutenir leur conformité aux courbes et aux problèmes géométriques avant de pouvoir développer des distinctions propres à ces

à la manière d'Apollonius. Ainsi, apparaît-elle, non pas comme une branche autonome de la science, mais plutôt comme un outil permettant de résoudre de nombreux problèmes géométriques qui n'entrent pas dans le champ normal d'application directe des propriétés classiques tirées des *Éléments d'Euclide*. Les courbes ne s'y trouvent pas étudiées pour elles-mêmes d'après leurs équations, mais l'intérêt se porte quasi exclusivement sur celles qui apparaissent comme solutions de problèmes à résoudre. » [Taton 1951, p. 101]. Boyer souligne : « *There is in the whole of La Géométrie not a single new curve plotted directly from its equation.* » [Boyer 1956, p. 86]. Boyer souligne aussi : « *Descartes was not interested in curves as such. He derived equations of curves with one purpose in mind—to use them in the construction of determinate geometrical problems which had been expressed by polynomial equations in a single variable.* » [Boyer 1956, p. 101]. Giorgio Israel remarque à propos du statut de l'Algèbre dans la Géométrie qu'« *il n'existe pas de problèmes algébriques donnés par l'algèbre en tant que telle* » [Israel 1998, p. 207] et souligne sa subordination à la Géométrie : « *Il y a d'abord la géométrie, qui, en tant que science de l'extension, est l'instrument permettant de décrire et d'analyser la substance des choses. L'algèbre joue un rôle essentiel certes, mais qui lui est subordonné.* » [Israel 1998, p. 215]. Henk Bos remarque de même que « *Descartes was not interested in algebra for its own sake. (...) Each of the special algebraic techniques he explained in the Geometry had its purpose within the geometrical rationale of the book and was not developed further than necessary for that purpose. We may therefore characterize Descartes' algebra as subservient to geometry, more precisely to the canon of construction that Descartes elaborated in order to solve "all the problems of geometry".* » [Bos 2001, p. 396–397].

⁴⁷ « *Lorsque cete equation ne monte que iusques au rectangle de deux quantités indeterminées, ou bien au quarré d'une mesme, la ligne courbe est du premier & plus simple genre, dans lequel il n'y a que le cercle, la parabole, l'hyperbole & l'ellipse qui soient comprises.* » [Descartes 1637, p. 319]. Sur la relation entre degré et genre dans *La Géométrie*, voir Rashed [2005, p. 32–50].

expressions⁴⁸ Et de pouvoir ensuite, le cas échéant, reprocher à Descartes de ne pas avoir su les introduire d'emblée.

3.6.7. *L'inauguration et ce qui la soutient*

Du point de vue de l'histoire des inaugurations en mathématique, *La Géométrie* offre un exemple d'inauguration où la plupart des arguments donnés pour soutenir les deux principaux énoncés inauguraux, fondés sur des extensions indues de résultats vérifiés seulement pour les premiers genres ou degrés, se sont très vite avérés tout simplement faux. Si l'inauguration apparaît nécessaire pour introduire des représentations conformes, la validité des arguments et l'adhésion aux énoncés inauguraux ne semblent pas nécessaires à la réception des représentations inaugurées. La conformité est de toute façon un attribut que les représentations finissent toujours par perdre.

4. LES ÉNONCÉS ET LES TEXTES INAUGURAUX

Les notions de texte et d'énoncé inauguraux ont été définies. Les cinq conditions (dualisme, réalisme, inauguration, conformité et incommensurabilité) qui servent à les identifier ont été appliquées succinctement d'abord à l'article de Turing [1936] et de manière plus circonstanciée à *La Géométrie* de Descartes. Nous savons donc ce que veut dire les satisfaire. Des contre-exemples peuvent facilement être donnés qui permettent de s'assurer que tous les textes ne les satisfont pas. Il n'est par exemple pas difficile de vérifier que les *Eléments* d'Euclide, texte à bien des égards fondateur, n'est pas un texte inaugural et qu'il ne comprend de surcroît aucun énoncé inaugural [Herreman 2010]. Des exemples ont ainsi été donnés qui établissent l'existence de ce type d'énoncé et de texte. Ces

⁴⁸ Ce caractère conservateur de la Géométrie a déjà été clairement établi par Henk Bos : « *Descartes' aim was to give geometry its definitive form. That aim, though exalted, was essentially conservative; Descartes' view of geometry as the art of solving geometrical problems was based on the contemporary tradition of geometrical problem solving, which by the 1630' was no longer a vigorous field and was soon afterwards superseded by other mathematical interests. Yet the influence of the Geometry was far from conservative; on the contrary, it was the most innovative treatise in mathematics of the first half of the seventeenth century.* » [Bos 2001, p. 411].

cinq conditions sont utiles en pratique pour repérer ces textes et ces énoncés pour trancher parfois des cas d'abord douteux mais elles ne rendent néanmoins pas complètement compte de leur intérêt : elles aident à les découvrir, à les reconnaître, mais sans en rendre compte. Elles ne rendent en particulier pas compte de leur *fonction*. Or, je voudrais maintenant montrer que c'est à leur *fonction* que ces textes et ces énoncés doivent être rapportés. L'enjeu de leur reconnaissance est en définitive de reconnaître que certains textes et certains énoncés mathématiques se comprennent à partir de leur *fonction*, en l'occurrence leur *fonction inaugurale*, fonction éminemment historique.

Je vais commencer par rendre compte de l'existence de ces textes et de ces énoncés à partir de la notion plus générale de *conditionnement sémiotique* [Herreman 2000]. À partir de là, il sera aussi possible de considérer leur *nécessité*.

La *fonction inaugurale* de ces textes et de ces énoncés une fois reconnue, quelques-uns de enjeux et des conséquences de celle-ci seront examinés.

4.1. *Un type de texte et d'énoncé : la fonction de l'inauguration*

4.1.1. *Conditionnement sémiotique*

Tout linguiste ou historien des mathématiques soucieux de l'historicité de la langue et des mathématiques sera réticent à reconnaître un quelconque type de texte ou d'énoncé en raison de leur caractère nécessairement anhistorique⁴⁹. Il convient donc de rendre compte de l'existence de celui-ci. Nous verrons en particulier que loin d'aller à l'encontre de l'historicité des mathématiques il contribue au contraire à en rendre compte et participe de celle-ci.

Les énoncés et les textes inauguraux relèvent du conditionnement sémiotique et, plus généralement, du métalangage mais suivant l'acception

⁴⁹ Par exemple, François Rastier « *La poétique doit certes produire et hiérarchiser des critères descriptifs, mais surtout rechercher leurs interactions. Les genres sont en effet définis par un faisceau de critères, et doivent d'ailleurs leur caractère d'objectivité à la multiplicité de ces critères. La cohésion du faisceau des critères, tant au plan du signifié qu'à celui du signifiant, structure la textualité et détermine la sémosis textuelle. L'évolution diachronique du faisceau rend compte de l'évolution du genre, alors que les "types" de textes fondés sur un seul critère demeurent anhistoriques.* » [Rastier 2001, p. 253].

spécifique qui lui est donnée en linguistique intégrationniste ([Harris 1998, p. 69] ; [Herreman 2009]). Suivant celle-ci, le métalangage désigne l'ensemble des procédés utilisés par des locuteurs lors d'une communication pour que celle-ci réalise autant que possible leurs intentions dans les conditions où la communication a lieu. Cela comprend tous les procédés (questionnement, précision, répétition, reformulation etc.) qui interviennent au cours d'une communication pour que celle-ci atteigne autant que possible ses objectifs dans les conditions où elle se fait. Cette acception du métalangage est en linguistique intégrationniste indissociable de la dénonciation du « mythe du langage ». Le « mythe du langage » consiste à assimiler le langage à un code constitué, autonome et partagé et à considérer corrélativement la communication comme une opération de codage et de décodage entre deux personnes qui partagent un même code. À l'encontre de cette conception de la communication et du langage, la linguistique intégrationniste fait valoir que la communication est toujours intégrée à la situation où elle prend place. Elle dénonce le mythe d'un langage constitué, partagé et autonome dont elle s'attache à dégager ses nombreuses manifestations, ses conséquences et ses impossibilités. Suivant ce point de vue, le métalangage est *nécessaire* dans la mesure même où le langage ne peut être assimilé à un code.

Le *conditionnement sémiotique* désigne plus spécifiquement l'ensemble des procédés utilisés dans un texte pour mettre en place les conditions sémiotiques exploitées qui ont besoin de l'être (« texte » incluant en l'occurrence toute production sémiotique). En relèvent par exemple les procédés qui permettent d'attribuer une notation et à l'associer de manière spécifique à d'autres entités qui formeront finalement un signe aux caractéristiques plus ou moins propres au texte considéré et qu'il incombera au lecteur de comprendre. Le conditionnement sémiotique comprend toutes les interventions de l'auteur, délibérées ou non, qui servent à établir les caractéristiques sémiotiques particulières de son langage, celles qui ont à l'être par opposition à celles qui sont reçues. Ce conditionnement sera d'autant plus prégnant que le texte aura des caractéristiques sémiotiques inhabituelles. Un énoncé inaugural en est un exemple puisqu'il introduit un système d'expressions dont il précise le rapport à une autre totalité pré-établie. Sa particularité de ce point

de vue est de se rapporter à un système d'expressions complet, et non seulement à un signe ou à des relations qu'il s'agit d'intégrer dans un *système d'expressions* constitué. Un énoncé inaugural est ainsi un exemple de conditionnement sémiotique exceptionnel par son extension. Il l'est aussi par le fait de considérer que le système d'expressions introduit est *conforme* à celui qu'il représente. Il est aussi exceptionnel par son étendue puisqu'il couvre, comme dans *La Géométrie*, à peu près l'intégralité du texte. Les textes inauguraux sont ainsi des textes dans lesquels la part du conditionnement sémiotique est à plusieurs égards extrême.

Quelques-unes des difficultés épistémologiques et historiographiques que posent la définition d'un type d'énoncé et de texte peuvent maintenant être levées. La reconnaissance de ces types repose sur la reconnaissance du conditionnement sémiotique, c'est-à-dire sur la reconnaissance d'énoncés et de textes en grande partie consacrés à instaurer ou encore à inaugurer certaines caractéristiques sémiotiques. C'est donc en définitive la similitude de la fonction métasémiotique de ces énoncés et de ces textes qui rend compte de leur type commun. S'il y a un type d'énoncés et de textes, c'est seulement qu'il y a des fonctions métasémiotiques récurrentes, en l'occurrence celle qui consiste à inaugurer un système d'expressions. D'autre part, la récurrence de cette fonction n'est établie que là où elle est avérée. Par cette tautologie apparente je veux souligner que les énoncés et les textes inauguraux ne sont pas la seule manière d'instaurer un système sémiotique⁵⁰. Il s'agit seulement d'un mode d'instauration récurrent qu'il convient néanmoins de reconnaître et dont il peut sembler justifié de rendre compte, notamment en raison de l'importance donnée à la conformité. Enfin, la récurrence de cette fonction ne signifie évidemment pas qu'elle inaugure les mêmes caractéristiques sémiotiques.

Reconnaître les énoncés et textes inauguraux ne participe donc pas d'une analyse anhistorique des mathématiques. Ces énoncés et ces textes ont au contraire un caractère éminemment historique puisqu'il s'agit d'inaugurer un système d'expressions et que cette inauguration s'inscrit

⁵⁰ Les figures rectilignes de la géométrie grecque par exemple n'ont sans doute pas eu besoin d'un énoncé inaugurale pour être introduites.

dans un moment précis encadré par les conditions qui prévalent au moment de l'inauguration et celles que celle-ci contribue à instaurer. Cette historicité ressort aussi de la nécessité d'énoncer les énoncés inauguraux.

4.1.2. *La nécessité d'un énoncé*

L'énoncé d'un théorème est très utile mais il serait possible d'un certain point de vue de ne garder que sa démonstration qui est, en partie au moins, une expression de même nature que lui⁵¹. L'énoncé d'un théorème est toujours moins précis que ne l'est sa démonstration (ce qui permet inversement de donner différentes démonstrations d'un même théorème). La situation est inverse pour un énoncé inaugural : les arguments donnés pour le soutenir ne suffisent pas à rendre compte de ce qu'il affirme. Ils ne peuvent en tenir lieu. Ce qu'il affirme excède ces arguments. L'impossibilité de l'établir complètement rend son énoncé *nécessaire*. Lui seul énonce ce qu'il affirme. L'énoncé vient avant sa justification qui, nécessairement inachevée, reste en suspens. En ce sens aussi l'énoncé inaugural est inaugural. Il faut l'énoncer dans la mesure où il n'y a pas de meilleure expression de ce qu'il affirme que lui-même. C'est un exemple d'énoncé performatif. Il ne l'est pas en raison d'une convention préalable ou d'un quelconque pouvoir reconnu à celui qui l'énonce. C'est au contraire cet énoncé qui, soutenu par le texte inaugural, participe à l'instauration d'une convention. Il ne réalise pas non plus ce qu'il affirme. L'énoncé n'établit pas, ne démontre pas la conformité des deux systèmes d'expressions qu'il soutient. Il a besoin du texte inaugural.

Compte-tenu de l'impossibilité de vraiment justifier un énoncé inaugural, celui-ci doit toujours être en partie assumé par celui qui l'énonce ou qui le reprend. Comme il n'est pas possible de le rapporter entièrement aux justifications données, il doit l'être à celui qui l'énonce. Il implique son auteur qui doit à cet endroit apporter en personne son soutien. Il doit lui-même prendre en partie l'énoncé en charge. Cette implication de celui qui l'énonce pour la première fois, les autres pouvant ensuite invoquer

⁵¹ Par exemple Ludwig Wittgenstein, *Grammaire philosophique*, § 24.

ce précédent, confère aussi à ces énoncés un caractère éminemment historique⁵².

4.2. Enjeux et conséquences de l'inauguration

4.2.1. Un type d'énoncé récurrent dans l'histoire

Reconnaître les textes et les énoncés *inauguraux* comme un type général peut être utile même pour l'analyse d'un texte et d'un énoncé inaugural particulier. Gödel affirmait par exemple à propos de l'énoncé inaugural de Turing « *qu'avec ce concept [de récursivité générale] nous avons réussi pour la première fois à donner une définition absolue d'une notion épistémologique intéressante* » ([Gödel 1946] ; [Davis 1965, p. 84]). Les problèmes de géométrie sont sans doute aussi une « notion épistémologique intéressante » et les équations algébriques en sont tout autant une « définition absolue ». Et si l'on veut voir avec Gödel dans la définition des machines de Turing « *une sorte de miracle* » ([Gödel 1946] ; [Davis 1965, p. 84]), il faut alors reconnaître qu'il est récurrent. Mais il faut encore reconnaître qu'il est tout aussi récurrent de ne plus y croire. En effet, on ne peut manquer de trouver insoutenables la plupart de ces énoncés inauguraux. Ce constat s'impose. Plus ou moins rapidement, mais il s'impose. Il est essentiel de le reconnaître pour bien appréhender la nature et l'intérêt de ces énoncés. Cela indique à nouveau leur valeur éminemment historique. Il nous faut à la fois reconnaître qu'ils ont tous été sérieusement soutenus et qu'ils cessent de l'être. Les énoncés inauguraux apparaissent inexorablement insoutenables. Pourtant les mathématiciens qui les ont soutenus ont toujours eu des « *raisons assez fortes* » (*quite compelling grounds*) ([Kleene 1943, p. 6] ; [Davis 1965, p. 274–275]), pour les soutenir. On ne peut ni espérer que les énoncés inauguraux actuels évolueront autrement, ni croire que ce constat historique suffise à les réfuter. On peut d'emblée en tirer deux conséquences complémentaires. a) La validité d'un énoncé inaugural et des arguments qui le soutiennent ont une valeur historique. Ces énoncés

⁵² Ces remarques ne sont pas contredites par le fait que les troisième et quatrième énoncés* inauguraux de *La Géométrie* soient soutenus sans être énoncés. Ce sont en quelque sorte des « lemmes inauguraux » qu'il n'est pas nécessaire d'isoler, leur inauguration étant incluse dans celle du deuxième énoncé inaugural.

nous donnent ainsi un accès privilégié à l'historicité des mathématiques ; une historicité compatible à la fois avec leur pratique et avec leur histoire et que leur récurrence ne permet pas d'écarter. Nous avons ainsi un moyen d'appréhender un peu mieux l'historicité des mathématiques contemporaines souvent plus difficile à saisir. Les énoncés inauguraux sont comme des indices généraux d'une historicité qui ne peut être que particulière. C'est cette valeur, et à travers elle celle des mathématiques, qu'ils peuvent contribuer à mieux saisir. b) Inversement, chaque énoncé inaugural qui n'est plus soutenable s'offre comme un fait à comprendre : il faut retrouver les conditions qui l'ont rendu soutenable. Il est un problème historiographique, un programme de recherche en histoire des mathématiques. C'est d'ailleurs un programme souvent déjà largement réalisé par les diverses études existantes consacrées à ces textes.

Les énoncés inauguraux sont avérés et relativement nombreux au regard de leurs caractéristiques qui les rendent exceptionnels. Leur introduction marque des développements mathématiques d'une nouveauté particulière. Tous les développements mathématiques ne sont évidemment pas de ce type. Quand les mathématiciens définissent aujourd'hui des polynômes sur un anneau, des séries trigonométriques, des variétés différentiables, des structures algébriques, analytiques ou géométriques, etc. ils considèrent introduire des notions utiles, voire nécessaires, à de nombreux énoncés dans diverses parties des mathématiques, sans pour autant les tenir pour *conformes* à des notions intuitives préalablement constituées et distinguées. Les mathématiques ont évolué. Elles ont été présentées et développées suivant des statuts très variés (axiomatique euclidienne, algèbre, calcul infinitésimal, algèbre symbolique, arithmétisation, logicisme, structuralisme, théorie des ensembles, théorie des catégories, théorie de la complexité, etc.). Et pourtant, tout au long de cette histoire on retrouve des textes et des énoncés inauguraux. Et ces énoncés ont aussi à peu près systématiquement été abandonnés. Ils marquent le moment d'un rapport particulier mais récurrent, dépassé et reconduit, avec des notions constituées. Ils témoignent de la séparation des mathématiques et de ces notions en même temps que d'une forme de participation : certaines définitions mathématiques ont pu sembler, à un moment, pouvoir prétendre être conformes à des notions préexistantes.

Un énoncé inaugural est souvent doublé de considérations philosophiques. Les positions philosophiques exprimées peuvent influencer sur le rapport du mathématicien à l'énoncé inaugural, avoir une incidence sur le vocabulaire et le cadre dans lequel il sera discuté, mais elles ne dispensent ni de concevoir la représentation introduite ni d'avoir à l'inaugurer. Les énoncés inauguraux de Descartes existent en tant que tels indépendamment de sa philosophie qui, aussi développée soit-elle, ne l'a pas dispensé de ces inaugurations.

4.2.2. *Totalités*

Chaque texte ou énoncé inaugural est relatif à une *totalité* : la totalité des fonctions calculables, des problèmes de géométrie, des fonctions, des déductions et des propositions logiques, etc. De là vient une part de l'impossibilité d'établir l'énoncé et la nécessité de l'énoncer et de le soutenir. L'énoncé inaugural introduit un système d'expressions qui va ensuite permettre d'énoncer (et de démontrer) des propositions impliquant ou s'inscrivant dans cette totalité. Or c'est là aussi une des singularités des énoncés mathématiques : pouvoir considérer des totalités et grâce à cela énoncer et démontrer des propositions générales sur celles-ci. Le théorème de Descartes sur le nombre de racines positives d'un polynôme en est un exemple. La machine de Turing universelle ou la démonstration de l'impossibilité de l'*Entscheidungsproblem* en sont d'autres. Mais il arrive aussi que les textes inauguraux n'en contiennent pas. C'est le cas de l'*Idéographie* ou encore des *Principia Mathematica*. C'est en effet surtout dans les textes qui s'inscrivent dans le prolongement des textes inauguraux que l'on trouve des théorèmes qui tirent parti des représentations inaugurées. Un énoncé inaugural est ainsi un énoncé invérifiable qui permet ensuite des énoncés autrement impossibles. Leur étude relève donc de la réception de ces énoncés et sort donc du cadre de cet article.

4.2.3. *L'hétérogénéité des expressions mathématiques*

Les énoncés et les textes inauguraux existent en raison de l'hétérogénéité des expressions mathématiques. La reconnaissance ou non de ces textes dépend de la reconnaissance ou non de cette hétérogénéité. Elle

est un obstacle à l'expression d'une démonstration impliquant des expressions hétérogènes. Ce qui peut être ignoré quand les cas à considérer sont en nombre fini ne peut plus l'être quand ils sont en nombre infini. Par exemple une démonstration sur l'ensemble des nombres requiert une expression homogène des nombres (avec seulement quelques exceptions possibles). L'hétérogénéité est un obstacle pour l'expression de démonstrations et d'énoncés généraux. Elle pose des problèmes sémiotiques aux mathématiciens et en particulier aux auteurs des textes inauguraux. Elle détermine certaines caractéristiques des textes inauguraux et rend compte de l'existence, qui ne peut manquer de heurter l'historien, d'un type récurrent de textes. Mais il faut bien voir que l'hétérogénéité intervient de deux manières différentes dans les textes inauguraux.

Il y a d'une part l'hétérogénéité de la représentation introduite par le texte inaugural avec la représentation de la totalité pré-établie, c'est-à-dire avec ce qu'elle représente. C'est, par exemple, l'hétérogénéité des machines logiques et des nombres calculables, l'hétérogénéité des équations algébriques et des courbes, l'hétérogénéité des équations algébriques et des problèmes de géométrie, l'hétérogénéité des courbes géométriques et des instruments qui servent à les tracer, l'hétérogénéité des formules logiques et des contenus de jugement (pour Frege) et des propositions logiques (pour Whitehead & Russell). Cette hétérogénéité est nécessairement présente dans les textes inauguraux. Elle en est une des caractéristiques.

Mais il y a aussi d'autre part, et le plus souvent, l'hétérogénéité de la totalité pré-établie. C'est par exemple l'hétérogénéité des problèmes de géométrie dans la classification de Pappus, c'est encore l'hétérogénéité des courbes géométriques dans la même classification, c'est aussi l'hétérogénéité des nombres calculables, des propositions logiques, etc. Cette hétérogénéité n'est pas, contrairement à la première, nécessaire aux textes inauguraux. Elle est aussi de nature plus variée, et donc, en particulier, différente de la précédente. Mais c'est néanmoins elle qui rend compte de l'importance historique de ces textes qui est d'inaugurer une représentation homogène d'un contenu auparavant hétérogène rendant ainsi possible des énoncés et des démonstrations auparavant impossibles.

4.2.4. *Une étape bien définie dans une histoire*

Un énoncé inaugural a lui-même une genèse. Chaque énoncé inaugural s'inscrit dans une histoire qui ne se réduit pas au texte inaugural qui l'introduit. Il n'entrait pas dans mon propos d'étudier cette genèse ou cette histoire. Mais leur prise en compte ne saurait entamer la sorte de complétude inhérente aux textes inauguraux. Ces textes sont des composantes remarquables de l'histoire des mathématiques et à cet égard s'inscrivent diversement dans celle-ci. Mais en tant que textes qui inaugurent une nouvelle représentation, ils ont une fonction bien définie et qu'ils accomplissent, dans la mesure où ils le peuvent, ce que l'étude de leur genèse ne saurait leur retirer. Cela ne veut pas dire que l'histoire, même sémiotique, du système d'expressions qu'ils inaugurent soit achevée mais ils en marquent néanmoins un moment spécifique. Le système d'expressions n'a pas fini d'être constitué, mais son inauguration en est une étape circonscrite et repérable.

4.2.5. *Intérêt historiographique de l'inauguration*

Reconnaître les énoncés inauguraux et les étudier est aussi un moyen de prévenir certains biais que les totalités constituées peuvent induire particulièrement dans les études consacrées aux textes qui les inaugurent. Notre familiarité avec les courbes et les équations algébriques ne nous rend plus sensible à la nécessité de les inaugurer. Celui qui aujourd'hui, et depuis longtemps..., étudie *La Géométrie* dispose de ces totalités. Sans une démarche spécifique il risque de ne plus percevoir la nécessité de les constituer, ce qui est pourtant un des enjeux de *La Géométrie*. N'ayant plus guère besoin d'arguments, nous risquons de ne plus guère prêter d'attention à la fonction de ceux donnés par Descartes. Le risque étant ensuite de leur trouver d'autres justifications. Il est en effet particulièrement difficile de suspendre et d'apprécier les effets d'un système d'expressions une fois qu'il a été reçu et de se remettre dans « l'état sémiotique » antérieur. Reconnaître les énoncés inauguraux c'est aussi reconnaître l'importance d'énoncés qui ne sont ni des théorèmes ni des définitions ni des axiomes.

4.2.5.1. L'écueil d'une idéalisation des systèmes d'expressions

La caractérisation des textes inauguraux ne doit pas non plus reconduire l'anachronisme sémiotique consistant à conférer une préexistence aux systèmes d'expressions introduits et à ne voir dans ces textes que des stratégies ou des procédés rhétoriques pour introduire des représentations qui en fait existeraient déjà d'une manière ou d'une autre. Ce serait succomber au « mythe du langage » et ignorer que les textes qui reprennent ces systèmes d'expressions participent aussi à leur constitution. En les reprenant, ils sont amenés à introduire une description de ces systèmes différente de celle qui est donnée, quand elle l'est, dans les textes inauguraux. Ainsi, *La Géométrie* ne réalise qu'une part incomplète de la constitution des équations algébriques qui ne le sera que dans certains textes qui les reprendront.

4.2.5.2. L'intérêt d'avoir distingué un type d'énoncé

L'introduction d'un système d'expressions est un événement *a priori* difficile à bien isoler. Il apparaît en particulier difficile de le distinguer du simple recours aux expressions qui le composent, ou plutôt à des variantes de celles-ci, et de différencier leurs enjeux respectifs. Les énoncés et les textes inauguraux permettent par leurs caractéristiques de repérer le moment de l'introduction de certains de ces systèmes.

4.2.6. *Incommensurabilité, conformité et transparence*

Un énoncé inaugural est en définitive un énoncé qui allie incommensurabilité et conformité. Il soutient la conformité de deux totalités dont l'une est déjà établie au point de sembler ne jamais avoir dû l'être et de pouvoir être tenue pour « intuitive », « naturelle », etc. La deuxième totalité est elle au contraire constituée du système d'expressions qu'il s'agit d'introduire et qui est souvent considéré comme « formel », « abstrait », etc. Ces deux totalités sont présentées comme étant de nature très différentes. Elles sont tenues pour *séparées*. Elles semblent ne pas *participer* du même monde. Pourtant Descartes met par exemple *en contact* les courbes et les instruments qui servent à les tracer. Il tire parti de la possibilité de juxtaposer les parties de l'instrument avec celles des équations algébriques. Aucune correspondance entre les problèmes et les équations, entre les courbes et

les équations, entre les instruments et les courbes et enfin entre les instruments et les équations ne serait possible sans l'intervention d'*expressions* et des rapports que ces expressions, avec notamment leur particularités substantielles, rendent possibles. La correspondance entre les deux totalités implique une mise en relation de leurs expressions qui tire parti de leur participation à un même espace, de leur intégration dans celui-ci.

Les expressions jouent un rôle, tout en étant ignorées, voir niées. Elles sont de ce fait *transparentes* [Recanati 1979]⁵³. Cette transparence est nécessairement à l'œuvre dans tous les textes inauguraux puisqu'il s'agit pour eux d'introduire une nouvelle représentation qui sera de ce fait peut-être considérée et reconnue, mais qui devra aussi être niée sans quoi ses caractéristiques mettraient inmanquablement en défaut la conformité revendiquée. Par ailleurs, la dualité fait croire à une séparation qui doit être et qui est systématiquement mise en défaut au cours de l'inauguration. Pour chaque énoncé inaugural il est ainsi possible de prévoir puis de repérer le moment qui révélera la transparence des expressions considérées. La transparence n'est pas propre aux textes inauguraux. En revanche, nous pouvons être assurés d'en trouver des manifestations dans ceux-ci. C'est une autre raison pour les distinguer et s'y intéresser.

Mais l'intérêt spécifique des énoncés inauguraux est aussi, inversement, de contribuer à instaurer la transparence de ces expressions. C'est ici qu'intervient en particulier la conformité. En effet, l'introduction d'un système d'expressions *conforme* à la totalité déjà établie contribue à occulter les nouvelles expressions qui semblent n'introduire *aucune différence*, donc en particulier aucune sorte d'existence supplémentaire, par rapport à celles dont l'existence est reconnue (intuitive, naturelle, etc.). L'équivalence est en effet ici partout : équivalence de la représentation à ce qu'elle représente, équivalence des représentations entre elles quand il y en a plusieurs. Il n'y a semble-t-il de différence nulle part. Pourtant, si les textes inauguraux marquent des moments importants de l'histoire des mathématiques, c'est bien parce que chaque système d'expressions présente des avantages, au premier rang desquels celui d'en donner une

⁵³ La dénonciation de cette transparence est un des fondements de la linguistique intégrationniste ([Harris 1998], [Herreman 2009]).

représentation uniforme, sur celui avec lequel il est tenu pour conforme. La conformité propre aux énoncés et aux textes inauguraux contribue à rendre transparente l'*introduction* des expressions au moment où, du fait même de leur introduction, elles sont particulièrement exposées. Cela peut aussi rendre en partie compte du fait que ces énoncés n'aient pas été reconnus comme tels. Il était pour cela aussi utile de proposer des caractérisations qui permettent de les repérer plus facilement. Cela permet d'opacifier ce moment et d'appréhender un système d'expressions en dépit de sa transparence renforcée par sa conformité.

4.2.7. Questions non abordées

De nombreuses questions concernant les énoncés et les textes inauguraux ont été délibérément laissées de côté. Je voudrais terminer en en mentionnant quelques-unes.

4.2.7.1. Le système des énoncés inauguraux

Les représentations inaugurées ne sont pas sans rapports entre elles. Les représentations des fonctions calculables inaugurées par Church ou Turing présupposent la représentation des propositions logiques inaugurée par Whitehead & Russell dans les *Principia Mathematica* inspirée de celle inaugurée par Frege. La représentation polynomiale des courbes inaugurée par Descartes sera étendue aux séries entières, puis Fourier introduira sa représentation trigonométrique des fonctions. La considération d'autres énoncés inauguraux permettraient de mettre en évidence d'autres rapports. Inversement, une analyse plus poussée des énoncés inauguraux considérés conduirait à rechercher les énoncés inauguraux qu'ils semblent requérir. Ces rapports sont importants parce qu'ils *imposent un ordre*, une succession entre ces énoncés. L'énoncé inaugural de Church-Turing ne peut être énoncé qu'après celui de Whitehead & Russell. Il est ainsi possible de rendre compte de certaines simultanités.

4.2.7.2. Représenter la représentation

Un énoncé inaugural introduit un nouveau système d'expressions. Ce système ne peut être simplement désigné. Il doit être *effectivement* introduit. Cela conduit à poser le problème de *la description d'un système d'expressions*. Ce problème n'en est pas seulement un pour celui qui fait ou

lit l'analyse d'un texte, notamment d'un texte inaugural, mais aussi pour l'auteur du texte inaugural. La description (expression) d'un système d'expressions et la question de l'expression sont liées par le fait que la description d'un système d'expressions utilisera des expressions. En particulier, la description du système comprenant généralement un nombre infini d'expressions se fera à partir d'une expression (description) qui n'en comprend qu'un nombre fini. C'est un problème qui doit toujours être résolu et dont il convient de regarder dans chaque cas comment et dans quelle mesure il a pu l'être.

5. CONCLUSION

Cet article a été essentiellement consacré à établir que *La Géométrie* est un texte inaugural. Il a été montré pour cela qu'il vérifiait les cinq conditions introduites pour l'identification de ces textes. Au-delà de cette vérification, il a été montré qu'il était possible de rapporter le déroulement de l'ensemble du texte à la résolution des problèmes sémiotiques posés par l'inauguration d'une représentation, en l'occurrence celle des problèmes de géométrie par des équations algébriques. Les problèmes sémiotiques posés ont essentiellement deux causes : d'une part l'incommensurabilité (entre les expressions algébriques et les énoncés des problèmes de géométrie ou les courbes), d'autre part la conformité. L'incommensurabilité et la conformité apparaissent ainsi comme les deux principaux problèmes sémiotiques auxquels Descartes est confronté et qu'il a à résoudre. Le problème de Pappus est certes un problème qu'il résout, mais c'est avant tout un problème qui participe, qui plus est de plusieurs manières, à la résolution des problèmes sémiotiques posés par l'incommensurabilité et la conformité. Autrement dit, *La Géométrie* n'est pas tant consacrée à résoudre des problèmes mathématiques qu'à résoudre des problèmes sémiotiques posés par l'introduction d'une nouvelle représentation.

La Géométrie a ainsi été rapportée à sa *fonction inaugurale* : c'est un texte performatif qui se comprend à partir de sa fonction qui est d'inaugurer une représentation, en l'occurrence conforme, et qui se doit pour cela de résoudre les problèmes sémiotiques posés par celle-ci. Les caractéristiques du texte découlent de celles des problèmes sémiotiques posés, c'est-à-dire

des difficultés qui résultent elles-mêmes des caractéristiques des expressions considérées et dont il s'agit d'établir la conformité.

La Géométrie de Descartes n'est pas le seul texte inaugural. L'inauguration est donc une fonction, nécessairement rare en raison du souci exorbitant de conformité et de la difficulté d'y satisfaire, mais néanmoins récurrente dans l'histoire des mathématiques. À côté d'autres facteurs reconnus du développement des mathématiques, parmi lesquels la recherche d'une abstraction ou d'une généralisation plus grandes, il faut donc ajouter le souci de conformité. La reconnaissance des textes inauguraux conduit aussi à reconnaître le rôle joué par la résolution de problèmes sémiotiques dans l'histoire des mathématiques. Elle conduit aussi à ajouter aux types d'énoncés reconnus en mathématiques - théorèmes, définitions, axiomes, exemples, etc. - celui des énoncés inauguraux. Et si une part importante de l'activité des mathématiciens consiste à donner des démonstrations, il arrive aussi qu'ils aient à soutenir un énoncé inaugural.

Remerciements

Je remercie Catherine Goldstein et Philippe Nabonnand qui ont contribué à rendre plus clair cet exposé.

RÉFÉRENCES

ADAMS (Roderick G.)

- [1983] *A History of the Theory of Recursive Functions and Computability*, Thèse, The Hatfield Polytechnic, 1983.

BONASONI (Paolo)

- [1575] *Algebra Geometrica*, 1575.

BOS (Hendrik Jan Maarten)

- [1981] On the representation of curves in Descartes' géométrie, *Archive for history of exact sciences*, 24(4) (1981), p. 295–338.
- [1992] Descartes, Pappus' Problem and the Cartesian Parabola : a conjecture, dans Harman (P. M.) & Shapiro (Alan E.), éds., *An investigation of difficult things - Essays on Newton and the History of the Exact Sciences*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1992, p. 71–96.

- [1998] La structure de la Géométrie de Descartes, *Revue d'histoire des sciences*, 51 (1998), p. 291–318.
- [2001] *Redefining geometrical exactness : Descartes' transformation of the early modern concept of construction*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer, 2001.
- BOYER (Carl B.)
- [1956] *History of analytic geometry*, Scripta Mathematica Studies, vol. 6–7, New York : Yeshiva University, 1956.
- BRIGAGLIA (Aldo) & NASTASI (Pietro)
- [1986] Le ricostruzioni apolloniane in Viète e in Ghetaldi, *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 6 (1986), p. 83–134.
- CHUQUET (Nicolas)
- [1484] *La Géométrie*, 1484.
- CHURCH (Alonzo)
- [1936] An unsolvable problem of elementary number theory, *American Journal of Mathematics*, 58 (1936), p. 345–363.
- CIFOLETTI (Giovanna)
- [1992a] *Mathematics and rhetoric : Peletier and Gosselin and the making of the French algebraic tradition*, Thèse, Princeton University, 1992.
- [1992b] Quaestio sive aequatio : the notion of problem in Descartes's *Regulae*, 1992 ; in [Cifoletti 1992a, p. 292–340].
- [1995] La question de l'algèbre. Mathématiques et rhétorique des hommes de droit dans la France du XVI^e siècle, *Annales histoire, sciences sociales*, 50(6) (1995), p. 1385–1416.
- [1996] The Creation of the History of Algebra in the Sixteenth Century, 1996 ; in [Goldstein et al. 1996, p. 123–142].
- DAVIS (Martin), éd.
- [1965] *The Indecidable. Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvability Problems and Computable Functions*, Hewlitt, N.Y. : Raven Press, 1965.
- DESCARTES (René)
- [1637] *La Géométrie*, 1637 ; cité d'après le vol. VI de [Descartes 1964–1974].
- [1964–1974] *Œuvres de Descartes*, Paris : Vrin, 1964–1974.
- EUCLIDE
- [1990] *Les Eléments. Volume 1. Introduction générale Livres I à IV*, Paris : PUF, 1990.
- FERMAT (Pierre de)
- [1636] *Ad locos planos ete solidos isagoge*, 1636.

FLAMENT (Dominique) & NABONNAND (Philippe)

[2011] *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la MSH, 2011.

FOURIER (Joseph)

[1822] *Théorie analytique de la chaleur*, Paris : Firmin Didot, père et fils, 1822.

FREGE (Gottlob)

[1879] *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildeten Formelsprachen des reinen Denkens*, Halle : Louis Nebert, 1879.

GIUSTI (Enrico)

[1992] Algebra and geometry in Bombelli and Viète, *Bolletino di storia delle scienze matematiche*, 12(2) (1992), p. 303–328.

[2000] *La naissance des objets mathématiques*, Paris : Ellipses, 2000.

GÖDEL (Kurt)

[1946] Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics, 1946.

GOLDSTEIN (Catherine)

[2001] L'expérience des nombres de Bernard Frenicle de Bessy, *Revue de synthèse*, 122(2–4) (2001), p. 425–454.

[2008] How to generate mathematical experimentation and does it provide mathematical knowledge?, dans Feest (U.) & others, éd., *Generating Experimental Knowledge*, 2008, p. 61–85.

[2010] Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite, 2010; in [Flament & Nabonnand 2011].

GOLDSTEIN (Catherine), GRAY (Jérémy) & RITTER (Jim)

[1996] *L'Europe mathématique*, Paris : Éditions de la MSH, 1996.

GRANGER (Gilles-Gaston)

[1980] La notion de contenu formel, dans « *Information et signification* », *Colloque international de philosophie des sciences, 23–30 novembre 1980, Brest*, 1980, p. 137–163; repris dans [Granger 1994].

[1994] *Formes, opérations, objets*, Mathésis, Paris : Vrin, 1994.

HARRIS (Roy)

[1981] *The Language Myth*, Londres : Duckworth, 1981.

[1998] *Introduction to integrational linguistics*, Oxford : Pergamon Press, 1998.

HAY (Cynthia), éd.

[1988] *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1988.

HERREMAN (Alain)

- [2000] *La topologie et ses signes. Éléments pour une histoire sémiotique des mathématiques*, Paris : L'Harmattan, 2000.
- [2001] La mise en texte mathématique : une analyse de l'« Algorithme de Frankenthal », *Methodos*, 1 (2001), p. 61–100.
- [2005] Vers une analyse sémiotique de la théorie des ensembles : hiérarchies et réflexivité, *Philosophia Scientiae*, 9(2) (2005), p. 165–187.
- [2009] Linguistique intégrationniste et histoire sémiotique des mathématiques, 2009; <http://linguistique-integrationniste.alainherreman.fr>.
- [2010] Enoncés et textes inauguraux. Sur un type d'énoncé et de texte mathématiques, 2010; <http://inauguration.alainherreman.fr>.

HILBERT (David) & ACKERMANN (Wilhelm)

- [1928] *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlin : Springer, 1928.

ISRAEL (Giorgio)

- [1998] Des Regulae à la Géométrie, *Revue d'histoire des sciences*, 51 (1998), p. 183–236.

JULLIEN (Vincent)

- [1996] *Descartes. La Géométrie de 1637*, Philosophies, PUF, 1996.

KLEENE (Stephen Cole)

- [1943] Recursive predicates and quantifiers, *Transactions of the AMS*, 53 (1943), p. 41–73.

MANCOSU (Paolo)

- [1996] *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1996.

MARONNE (Sébastien)

- [2007] *La théorie des courbes et des équations dans la géométrie cartésienne : 1637–1661*, Thèse, Université Paris 7, 2007.
- [2008] Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637–1649, dans *DesCartes et DesLettres. «Epistolari» e filosofia in Descartes e nei cartesiani*, Florence : Le Monnier, 2008, p. 62–91.

PANZA (Marco)

- [2005] *Newton et les origines de l'analyse : 1664–1666*, Paris : Blanchard, 2005.

NEWTON (Isaac)

- [1971] *The mathematical papers of Isaac Newton*, vol. 4, Cambridge Univ. Press, 1971.

NETZ (Reviel)

- [1999] *The shaping of deduction in Greek mathematics*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1999.

NUÑEZ (Pedro)

- [1567] *Libro de algebra en arithmetica y geometria*, Anvers : en la casa de los herederos d'A. Birkman, 1567.

PAPPUS

- [1588–1589] *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones a Federico Commandino Urbinate in latinum conversae at commentariis illustratae*, Pesaro et Venise, 1588–1589 ; trad., commentaires par F. Commandino.
- [1877] *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt : elibris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis / instruxit Fridericus Hultsch. Volumen II, Insunt librorum VI et VII reliquiae*, Berlin : Weidman, 1877 ; trad. par Frediricus Hultsch.
- [1933] *Collection mathématique*, Desclée de Brouwer, 1933 ; trad. par Paul ver Eecke.

PROCLUS

- [1948] *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, Bruges : Desclée de Brouwer, 1948 ; trad., notes par Paul ver Eecke.

RASHED (Roshdi)

- [2005] Les premières classifications des courbes, *Physis*, 42(1) (2005), p. 1–64.

RASTIER (François)

- [2001] *Arts et sciences du texte*, Paris : PUF, 2001.

RECANATI (François)

- [1979] *La transparence de l'énonciation. Pour introduire à la pragmatique*, L'ordre philosophique, Paris : Seuil, 1979.

SCHOLZ (Ehrhard)

- [1990] *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*, Wissenschaftsverlag, 1990.

SERFATI (Michel)

- [1993] Les compas cartésiens, *Archives de philosophie*, 56 (1993), p. 197–230.

TANNERY (Paul)

- [1883–1884] Pour l'histoire des lignes et des surfaces courbes dans l'Antiquité, *Bulletin des sciences mathématiques*, 7 (1883–1884), p. 278–291.
- [1886] La Géométrie de Descartes, dans *Grande Encyclopédie*, 1886, p. 219–220.

TANNERY (Paul), HEIBERG (J.-L.) & ZEUTHEN (H.-G.), éds.

[1912a] *Mémoires scientifiques I. Sciences exactes dans l'antiquité, 1876-1884*, Toulouse : E. Privat, 1912.

[1912b] *Mémoires scientifiques II. Sciences exactes dans l'antiquité, 1883-1898*, Toulouse : E. Privat, 1912.

TANNERY (Paul) & LORIA (Gino), éds.

[1926] *Mémoires scientifiques VI. Sciences modernes, 1883-1904*, Toulouse : E. Privat, 1926.

TATON (René)

[1951] *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge*, Paris : PUF, 1951.

TURING (Alan)

[1936] On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 (1936), p. 230–265 ; trad. fr. in Turing & Girard [1995].

TURING (Alan) & GIRARD (Jean-Yves)

[1995] *La machine de Turing*, points, Paris : Seuil, 1995.

VAN EGMOND (W.)

[1988] How algebra came to France, 1988 ; in [Hay 1988, p. 127–144].

VIÈTE (François)

[1591] *In artem analyticen Isagoge*, Tours : Jamettum Mettayer, 1591.

[1593a] *Supplementum geometriae : ex opere restitutae mathematicae analyseos seu algebra nova*, Tours, 1593.

[1593b] *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, Tours, 1593.

[1593c] *Zeteticorum libri quinque*, 1593.

VUILLEMIN (Jules)

[1960] *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Paris : PUF, Épipiméthée, 1960.

WITTGENSTEIN (Ludwig)

[1980] *Grammaire philosophique*, Paris : Gallimard, 1980.