Revue d'Histoire des Mathématiques

La résolution des équations aux dérivées partielles dans les Opuscules mathématiques *de D'Alembert (1761-1783)*

Alexandre Guilbaud & Guillaume Jouve

Tome 15 Fascicule 1

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publiée avec le concours du Ministère de la culture et de la communication (DGLFLF) et du Centre national de la recherche scientifique

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :

Nathalie Christiaën
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : revues@smf.ens.fr / URL : http//smf.emath.fr/

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs 2009 : prix public Europe : 66 €; prix public hors Europe : 75 €;
prix au numéro : 36 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
AMS, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940 USA

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d'histoire des mathématiques
15 (2009), p. 59–122

LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LES *OPUSCULES MATHÉMATIQUES* DE D'ALEMBERT (1761–1783)

Alexandre Guilbaud & Guillaume Jouve

Résumé. — Au regard de la première partie de son œuvre, D'Alembert est reconnu aujourd'hui comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles. La résolution de ces équations dans le cadre de problèmes physico-mathématiques dans ses neuf tomes d'*Opuscules mathématiques* (1761–1783) reste cependant peu étudiée par les historiens. Nous examinons ici cette question à la lumière de ses recherches sur les cordes vibrantes et l'écoulement des fluides dans ce corpus tardif. Celles-ci nous permettent de caractériser sa démarche ainsi que la notion de solution qui lui est attachée. Ayant des répercussions dans des domaines de recherche adjacents, ces travaux nous invitent également à reconsidérer sa position et l'évolution de sa pensée dans la polémique sur les fonctions arbitraires. Nous livrons enfin, avec cet article, un inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'ensemble de son œuvre.

Abstract (The resolution of partial differential equations in the *Opuscules mathématiques* of D'Alembert (1761–1783))

Texte reçu le 27 avril 2007, révisé le 10 septembre 2008, accepté le 27 mars 2009.

A. Guilbaud, HSM-IMJ, 175 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France.
Courrier électronique : guilbaud@math.jussieu.fr
G. Jouve, Université de Lyon, Université Lyon 1, IUFM de Lyon, Institut Camille Jordan UMR 5208 du CNRS, 21 avenue Claude-Bernard, F-69622 Villeurbanne Cedex, France.
Courrier électronique : jouve@math.univ-lyon1.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A50.
Mots clefs : Équations aux dérivées partielles, intégration, résolution, fluides, cordes vibrantes, fonctions arbitraires.
Key words and phrases. — Partial differential equations, integration, solving, fluids, vibrating strings, arbitrary fonctions.

On the basis of the first part of his works, D'Alembert is nowadays considered as the founder of the theory of partial differential equations. His methods of solving these equations in physico-mathematical contexts which can be found in the nine volumes of his *Opuscules mathématiques* (1761–1783), however, have hardly been studied by historians. Within the scope of this article, we propose to examine this question for his research on vibrating strings and the flow of fluids in this late corpus. This study will enable us to pin down and analyze his approach and the associated concept of solving differential equations. Given the impact of these questions on related fields of research, this leads us to also reconsider his opinion and the development of his ideas with regard to the controversy on arbitrary functions. At the end of this article, we offer an inventory of partial differential equations in all of D'Alembert's works.

INTRODUCTION

Dans son mémoire intitulé « Recherches sur le système du Monde », publié dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris* pour l'année 1775, Laplace, l'un des protégés de D'Alembert, rend ainsi hommage à ce dernier pour sa contribution au développement de la théorie des équations aux dérivées partielles [1] :

> « Je dois à M. d'Alembert la justice d'observer que, si j'ai été assez heureux pour ajouter quelque chose à ses excellentes *Réflexions sur la cause des vents*, j'en suis principalement redevable à ces Réflexions elles-mêmes et aux belles découvertes de ce grand géomètre sur la Théorie des fluides et sur le Calcul aux différences partielles, dont on voit les premières traces dans l'ouvrage que je viens de citer. Si l'on considère combien les premiers pas sont difficiles en tout genre et surtout dans une matière aussi compliquée ; si l'on fait attention aux progrès immenses de l'Analyse depuis l'impression de son Ouvrage, on ne sera pas surpris qu'il nous ait laissé quelque chose à faire encore et que, aidés par des théories que nous tenons de lui presque toutes entières, nous soyons en état d'avancer plus loin dans une carrière qu'il a le premier ouverte ». [Laplace 1778, p. 91]

Les nombreux articles et ouvrages historiques parus ces vingt-cinq dernières années vont dans le même sens et s'accordent à juste titre sur le rôle majeur de D'Alembert dans la naissance de cette nouvelle branche des mathématiques permettant d'aborder les problèmes qui relèvent de ce que

[1] Nous parlons ici d'*équations aux dérivées partielles* par commodité, mais nous reviendrons sur cette expression anachronique dans la suite.

nous appelons aujourd'hui la mécanique des milieux continus. Les conclusions de leurs auteurs, S. S. Demidov, S. B. Engelsman, J. Lützen et G. Grimberg, sont fondées sur une étude des textes de jeunesse de D'Alembert : le *Traité de dynamique* [D'Alembert 1743], dans lequel la première équation aux dérivées partielles voit le jour, les *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747], les « Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration » [D'Alembert 1749a ;b], et l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b].

L'invention du calcul aux différences partielles résulte d'un long processus de gestation, initié dès la fin du XVII^{e} siècle par les recherches de Leibniz, Jacques I, Jean I et Nicolas I Bernoulli sur les familles de courbes dépendant d'un paramètre, puis continué par Euler dans le courant des années 1730 via sa théorie des équations modulaires [Engelsman 1984a]. L'apport de D'Alembert repose essentiellement, d'après les quatre historiens des sciences évoqués, sur l'introduction de cet outil dans le cadre des sciences physico-mathématiques. Le savant ouvre la voie à une nouvelle méthode de mise en équation pour les problèmes du fil pesant, des cordes vibrantes, du mouvement de l'atmosphère, de la résistance et de l'écoulement des fluides. Cette méthode est d'autant plus innovante, selon S. S. Demidov, qu'elle est associée, avec plus ou moins de succès suivant la question abordée, à une volonté d'intégrer les équations obtenues, ce qui permet de considérer D'Alembert comme le fondateur de la théorie des équations aux dérivées partielles.

La contribution de D'Alembert à la naissance de cette théorie constitue donc un sujet relativement balisé. Cependant, l'historiographie dont nous avons connaissance se concentre principalement sur la première phase de ses recherches en la matière (1741–1752) : la période des grands traités et des mémoires les plus célèbres, essentiellement avant l'*Encyclopédie*. Dans les huit tomes de ses *Opuscules mathématiques*, parus entre 1761 et 1780, et dans divers manuscrits non publiés de son vivant, D'Alembert consacre par ailleurs de nombreux mémoires à la continuation de ses travaux dans ce domaine. L'inventaire des équations aux dérivées partielles que nous avons réalisé et que nous vous présenterons à l'occasion de cette étude en témoigne. Ces recherches tardives portent en particulier sur la possibilité de « résoudre » les équations aux dérivées partielles précédemment mises à jour. Naturellement, le terme « résoudre », et la démarche à laquelle il renvoie, revêtent un sens particulier dans son œuvre, différent de celui que nous leur accordons de nos jours.

Une étude du vocabulaire employé par D'Alembert, dont nous donnerons le détail, montre que le mot « résoudre » est spécifiquement appliqué aux problèmes de nature physico-mathématique. Dans les mémoires des *Opuscules* dédiés à l'étude des questions des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides, le savant se focalise en effet sur un certain nombre de caractéristiques physiques, notamment relatives à l'état initial et au comportement du système au niveau de ses frontières. Traduites mathématiquement, ces conditions initiales et aux limites, que nous nommerons *équations complémentaires* afin de les distinguer de la notion moderne, sont adjointes à l'équation aux dérivées partielles. C'est en partant de ce nouvel ensemble d'équations que D'Alembert recherche alors les solutions du problème. C'est donc en comprenant comment ces différents éléments s'articulent les uns par rapport aux autres au sein de son raisonnement, que nous parviendrons à comprendre la démarche associée au terme « résoudre » et à caractériser la notion de solution des équations aux dérivées partielles dans son œuvre. Ce sera là le premier objectif que nous poursuivrons au cours de cette étude. Il nous conduira ensuite à examiner sous un nouveau jour quelques aspects du débat sur la notion de fonction.

Nous reposant sur notre inventaire des équations aux dérivées partielles, nous justifierons tout d'abord le choix de notre corpus et donnerons un premier descriptif des écrits centrés sur les questions des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides.

Nous examinerons ensuite l'articulation entre l'équation aux dérivées partielles et les équations complémentaires lors de la phase de recherche de solutions. Nous situerons, à partir de là, l'approche de D'Alembert vis-à-vis des pratiques adoptées en la matière par les mathématiciens des XIX^e^ et XX^e^ siècles.

Cette étude nous permettra enfin d'aborder sous un nouvel angle le débat sur la nature des fonctions arbitraires dans la période qui débute à la fin des années 1760. Cette polémique, bien que célèbre, a en effet souvent été étudiée à l'aide d'un corpus limité. Nous montrerons notamment comment la notion de solution d'une équation aux dérivées partielles, combinée avec le souci d'avoir des solutions aussi générales que possible, motivent les réflexions de D'Alembert sur le concept de fonction et le poussent à réévaluer sa position dans ce débat.

1. PREMIER EXAMEN DE L'APPROCHE DE D'ALEMBERT EN MATIÈRE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Entre 1743 et 1756, dates de parution de son célèbre *Traité de dynamique* et du troisième volume de ses *Recherches sur différens points importans du système du monde*, D'Alembert donne ses principaux traités et mémoires académiques. À partir de 1757, la seconde phase de son œuvre scientifique se caractérise par un profond changement de mode de publication. Moins connue et beaucoup plus rarement exploitée que la première, elle tient essentiellement en neuf volumes d'*Opuscules mathématiques* : huit volumes publiés entre 1761 et 1780, ainsi qu'un neuvième constitué d'une importante somme de manuscrits presque prêts pour publication mais non parus de son vivant. L'ensemble comprend une soixantaine de mémoires, subdivisés en de nombreux paragraphes, soit une bonne centaine de textes portant sur des sujets aussi divers que l'astronomie, la figure de la Terre, les mathématiques pures ou appliquées, la mécanique des fluides, des solides, les cordes vibrantes, l'optique, etc. Quoique rédigés de façon confuse et sans aucun souci de pédagogie, ils n'en contiennent pas moins, nous le verrons, de remarquables innovations et sont une occasion inespérée, pour l'historien, de mieux comprendre le cheminement de sa pensée.

Dans ce contexte, l'étude du concept d'équation aux dérivées partielles requiert l'établissement d'un inventaire sur lequel nous reposer afin de choisir un corpus adapté à la question abordée. Nous livrerons et commenterons le résultat de cette minutieuse recherche dans cette première partie de l'article. Avant de présenter cet outil de travail, nous écrirons encore quelques mots de la forme sous laquelle le lecteur sera susceptible de voir apparaître une équation aux dérivées partielles dans les textes de D'Alembert et de ses contemporains.

1.1. *Inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert*

Désignation, formulation

Commençons donc par préciser la désignation et la formulation, au XVIIIe siècle, de ce que nous avons aujourd'hui coutume d'appeler les *équations aux dérivées partielles.*

Signalons tout d'abord qu'aucune appellation de ce type n'apparaît dans les travaux de D'Alembert, qu'il s'agisse de ses traités, mémoires, ou de ses contributions à l'*Encyclopédie.* Tout juste est-il question de « différentielle complette » vers la fin de l'article « hydrodynamique », mais rien de plus [D'Alembert 1751–1765]. Bien qu'il ne hésite jamais à revendiquer la priorité de ses découvertes, il ne le fait étrangement pas pour cet aspect de son œuvre. Il faut attendre les travaux de Condorcet, Lagrange ou Laplace, au début des années 1770, pour voir souligner le rôle de D'Alembert dans ce domaine, et constater l'apparition de la désignation : « équations aux différences partielles » [2].

Cependant, quoique cette dernière terminologie soit assez proche de la nôtre, il n'en va pas de même de l'aspect sous lequel les EDP apparaissent à cette époque. On peut effectivement distinguer trois types de formulations, résumées et mises en relation sur la fig. 1 [3].

L'équivalence entre ces trois formulations est assurée par l'utilisation répétée du critère, dit d'Euler, selon lequel [4] $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}$ si et seulement si

---

2 C'est sous cette appellation que le concept apparaît par exemple dans le traité *Du calcul intégral* et le « Mémoire sur les équations aux différences partielles » de Condorcet [Condorcet 1765 ; 1773], dans le mémoire « Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1er ordre » de Lagrange [Lagrange 1775], ou dans le mémoire « Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles » de Laplace [Laplace 1777]. Dans un souci de lisibilité, nous utiliserons invariablement l'abréviation EDP pour désigner une « équation aux différences partielles ».

3 Les trois exemples figurant sur ce schéma correspondent aux trois formulations relatives au problème des cordes vibrantes. Nous expliquerons précisément p. 72 comment on passe de l'une à l'autre.

4 Conformément aux habitudes de l'époque, nous désignerons l'opérateur de différentiation par la lettre d, au lieu de la notation moderne ∂.

$p(x,t)\,dx + q(x,t)\,dt$ est une différentielle complète, ou une forme différentielle exacte, pour employer le terme moderne [5].

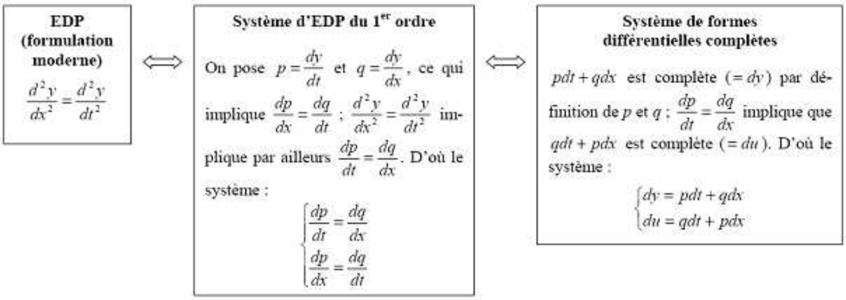

FIGURE 1. Les trois formulations d'une EDP.

Précisons que ce critère est d'abord énoncé par Euler, dans le cadre de deux pièces présentées devant l'Académie des sciences de Pétersbourg le 12 juillet 1734 et publiées en 1740 [Euler 1740a ;b]. Clairaut, qui n'a pas encore eu connaissance des travaux de son prédécesseur, propose le même théorème dans deux mémoires publiés dans les volumes des *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris* pour les années 1739 et 1740 [Clairaut 1741a ;b]. D'après J. L. Greenberg [Greenberg 1995, p. 368], le jour même (le 4 mars 1739) de la lecture par Clairaut du premier de ces deux écrits devant l'Académie, Fontaine présentait également une démonstration écrite de ce critère pour des formes différentielles de deux et trois variables.

Comme nous aurons l'occasion de le montrer par la suite, ces trois types de formulation sont, à quelques exceptions près, simultanément présentes dans les travaux de D'Alembert. Elles correspondent également au chemin emprunté pour intégrer une EDP. Les descriptions de la mise en équation des problèmes de la corde pincée et de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'un vase nous donneront plus loin une illustration du rôle et de l'emploi du critère d'Euler dans ce cadre.

5 Telle qu'il existe, autrement dit, une fonction $y(x,t)$ vérifiant $dy = pdx + qdt$. Ce critère est utilisé comme une équivalence, bien que les preuves qui en sont données à l'époque soient discutables : voir [Engelsman 1984a].

Inventaire

Comme nous le précisions à l'instant, l'abord d'un concept dans l'œuvre de D'Alembert, notamment la seconde phase de ses écrits scientifiques, requiert un certain nombre de précautions sans lesquelles il serait facile de passer à côté d'un aspect crucial du sujet. Dans de nombreux cas, certaines de ses recherches, apparemment sans lien avec l'objet considéré, peuvent en effet s'avérer tout à fait éclairantes, voire indispensables à la bonne compréhension de sa démarche. Nous nous sommes donc, avant toute autre chose, employés à établir une liste des EDP étudiées ou mentionnées dans l'ensemble de ses travaux, manuscrits ou imprimés. De cette étude préliminaire, il résulte un inventaire que le lecteur pourra consulter en annexe, et dont nous proposons à présent de dire quelques mots, avant d'en extraire les informations servant notre objectif.

Concernant la question de la formulation des EDP, tout d'abord, nous avons dû trancher entre les trois déclinaisons précédemment mentionnées. Nous avons opté pour la forme moderne synthétique, lorsque celle-ci apparaît dans l'œuvre de D'Alembert. Dans la situation contraire, c'est le cas des *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747], nous avons présenté l'objet sous la forme d'un système d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre. Nous avons également pris soin de préciser les références de l'imprimé ou du manuscrit concerné, le type mathématique de l'équation, et nous avons enfin formulé quelques remarques visant à éclairer le contexte et la démarche de l'auteur vis-à-vis de chaque équation.

Un premier tour d'horizon de l'inventaire nous montre que les EDP apparaissent dans six types de problèmes physiques :

- le problème du fil pesant,
- le problème du mouvement de l'air à l'intérieur d'un canal formé par deux chaînes de montagnes parallèles, sous l'action de la rotation de la Terre autour de son axe et des forces d'attraction du Soleil et de la Lune,
- le problème des cordes vibrantes, en lien avec la question de la propagation du son,
- la résistance des fluides et la question des écoulements dans les vases et les canaux,

– la question de l'équilibre des fluides, en lien avec le problème de la figure de la Terre,

– la recherche de la courbe tautochrone, c'est-à-dire de la courbe pour laquelle le temps mis par un corps pour en atteindre le point le plus bas est indépendant de son point de départ.

Les cinq premiers problèmes renvoient d'abord aux premiers ouvrages de D'Alembert, à savoir la première édition du *Traité de dynamique* pour le fil pesant [D'Alembert 1743], les *Réflexions sur la cause générale des vents* pour le mouvement de l'air [D'Alembert 1747], les trois mémoires de l'Académie de Berlin de 1747 et 1750 pour les cordes vibrantes [D'Alembert 1749a ;b ; 1752a], ainsi que l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* pour ce qui concerne la résistance, le mouvement et l'équilibre des fluides [D'Alembert 1752b].

Cependant, l'inventaire permet également de voir apparaître une somme de travaux plus tardifs prolongeant chacun des cinq premiers thèmes d'étude précédents et les premiers écrits que D'Alembert leur a consacrés. Le tableau ci-dessous, relatif à la période postérieure à 1758, permet de se faire une idée de leur ampleur, problème par problème [6] :

Problème du fil pesant	– *Traité de dynamique*, 2^{e} édition, 1758
Mouvement de l'air entre deux chaînes de montagne parallèles	– *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 58 § XII (1780)
Cordes vibrantes / Propagation du son	– *Opuscules*, t. I, Mémoire 1 (1761) – *Opuscules*, t. I, Mémoire 25 (1761) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 34 § II (1768) – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 § VI – *Opuscules* (inédit), Mémoire 59 § VII
Mouvement des fluides / Résistance des fluides	– *Opuscules*, t. I, Mémoire 4 (1761) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 31 (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 33 (1768) – *Opuscules*, t. V, Mémoire 34 § I (1768) – *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 57 § VII (1780)

6 D'Alembert ne consacre qu'un seul écrit à la recherche de la courbe tautochrone [D'Alembert 1767]. Il s'agit, qui plus est, d'un mémoire tardif. Nous ne le faisons donc pas apparaître dans le tableau ci-dessus.

Équilibre des fluides	– *Opuscules*, t. V, Mémoire 30 (1768) – *Opuscules*, t. VIII, Mémoire 56 § I (1780)

À cela s'ajoutent également les écrits où D'Alembert considère les EDP comme un objet d'étude mathématique en tant que tel, indépendamment des problèmes physiques auxquels elles sont attachées. C'est ainsi le sujet du Mémoire 26 [D'Alembert 1768b] et du Mémoire 58 § VI [D'Alembert 1780c] de ses *Opuscules*.

Concernant la nature mathématique des EDP manipulées par D'Alembert, notre inventaire nous permet de constater qu'il s'agit, dans la plupart des cas, d'EDP linéaires portant sur des fonctions de deux ou trois variables, et dont l'ordre ne dépasse presque jamais 2. Les seules équations non linéaires apparaissent dans les Mémoires 4, 30, 33 et 56 § I des *Opuscules* [D'Alembert 1761b ; 1768c ;e ; 1780a], mais ne feront pas l'objet d'études mathématiques particulières.

Précisons encore qu'outre les nombreuses études portant sur la première phase de ses écrits, plusieurs historiens, spécialistes des EDP, se sont d'ores et déjà ponctuellement penchés sur certains des travaux tardifs dont nous venons de dresser la liste. Signalons ainsi que, dans l'état de nos connaissances :

– le Mémoire 58 § VI des *Opuscules*, en lien avec les cordes vibrantes et la propagation du son, est étudié par A. P. Youschkevitch [Youschkevitch 1981] et par C. Houzel [Houzel 2003]. Quant aux Mémoires 1 et 25, dans lesquels D'Alembert polémique avec Euler et Daniel Bernoulli sur les cordes vibrantes, ils sont abordés par H. Burkhardt [Burkhardt 1908], C. Truesdell [Truesdell 1960], S. S. Demidov [Demidov 1989], I. Szabó [Szabó 1987] et J. Lützen [Lützen 1994].

– les Mémoires 4, 31 et 33 des *Opuscules*, concernant l'écoulement des fluides dans les vases et les tuyaux, sont partiellement examinés par C. Truesdell [Truesdell 1954] et G. Grimberg [Grimberg 1998], qui en relèvent les principaux résultats.

– le Mémoire 26 des *Opuscules*, traitant des EDP sous un angle exclusivement mathématique, est partiellement abordé par C. Houzel [Houzel 2003] et, de façon plus détaillée, par S. S. Demidov [Demidov 1982].

Naturellement, de nombreux autres commentaires mériteraient encore d'être faits. L'inventaire soulève par exemple la question de l'indépendance du Mémoire 26 vis-à-vis des écrits physico-mathématiques du savant. Partant du constat que D'Alembert manipule des EDP parfois relativement semblables pour deux problèmes physiques distincts, on pourrait également se demander s'il a véritablement conscience de ces similitudes et s'il les utilise. Cette seconde partie de son œuvre scientifique recèle ainsi tout un ensemble de nouveaux éléments dont beaucoup restent encore à étudier.

Pour l'heure, nous nous concentrerons essentiellement sur la question suivante : quelle est la démarche de D'Alembert pour « résoudre » des problèmes faisant intervenir des EDP ? Nous nous restreindrons, pour ce faire, au champ des problèmes physico-mathématiques, seul cadre dans lequel l'auteur recherche des solutions suivant un schéma *apparemment* proche de la démarche des mathématiques modernes.

Pour mieux faire comprendre les raisons de ce choix, quelques précisions concernant la terminologie dalembertienne dans ce domaine sont tout d'abord nécessaires. Le vocabulaire mathématique employé par l'auteur n'est effectivement pas forcément le même qu'aujourd'hui. Il n'est, qui plus est, pas complètement stabilisé. Le terme d'« équation », par exemple, désigne généralement une égalité sans qu'il y ait de véritable spécification des inconnues, des paramètres ou des variables. Le terme « résoudre », au même titre que celui de « solution », est le plus souvent attaché à un problème au sens large. Il ne correspond pas à la résolution d'une équation mathématique, telle que nous en concevons le sens actuellement, mais recouvre l'ensemble des étapes conduisant de la mise en équation d'un problème physico-mathématique jusqu'à l'expression d'une solution.

Nous montrerons dans un instant que ces étapes, souvent entremêlées dans les écrits de D'Alembert, sont plus précisément au nombre de trois :

– une première étape de mise en équation du système physique permettant d'aboutir à l'écriture d'une EDP ;

– une seconde étape d'« intégration » de l'EDP, laquelle consiste, dans le contexte qui nous intéresse, en une reformulation de l'EDP par le moyen du critère d'Euler ;

– une troisième étape où le savant introduit d'autres conditions physiques caractéristiques du problème abordé.

Centrés sur l'« intégration » des EDP, ses écrits purement mathématiques n'abordent donc pas la question dans son entier. C'est le cas du Mémoire 26 [D'Alembert 1768b], où D'Alembert se lance dans une étude systématique de larges classes d'EDP linéaires. Il cherche à dégager des méthodes pour les intégrer et aboutir à des solutions générales s'exprimant sous forme de combinaisons linéaires de fonctions arbitraires. Mais, dans cette démarche novatrice pour l'époque, il fait abstraction du contexte physique dans lequel ces EDP interviennent et ne se soucie donc pas de ce que nous appellerions les conditions initiales et conditions aux limites du problème. C'est pourquoi nous excluons ce texte de notre corpus d'étude.

Précisons aussi que, dans ses *Réflexions sur la cause générale des vents*, D'Alembert procède à l'étude mathématique de deux EDP [D'Alembert 1747, p. 164–172]. Il exhibe, ce faisant, des méthodes d'intégration qu'il applique ensuite, dans la troisième et dernière partie de l'ouvrage [D'Alembert 1747, p. 172–189], à la résolution de problèmes physiques particuliers. Quoique, dans ce cadre, il s'interroge pour la première fois sur ce que nous pourrions anachroniquement appeler la question de l'*existence* d'une solution, et affirme que, dans certaines conditions, le problème pourrait être « impossible » [D'Alembert 1747, p. 177], il s'agit cependant d'une remarque ponctuelle et isolée, précisément étudiée par S. S. Demidov [Demidov 1982, p. 13–14]. La continuation de ces recherches dans le Mémoire 58 § XII des *Opuscules* [D'Alembert 1780d] se borne d'ailleurs à un cadre d'étude exclusivement mathématique et ne fait donc plus apparaître les caractérisques physiques du problème. C'est la raison pour laquelle ces aspects mathématiques du traité, non seulement examinés par S. S. Demidov [Demidov 1982 ; 1989], mais aussi par J. Lützen [Lützen 1994] et G. Grimberg [Grimberg 1998], nous intéresseront peu vis-à-vis de la question que nous souhaitons ici aborder.

Enfin, nous ne nous attarderons pas sur les EDP liées à la théorie de l'équilibre des fluides et au problème de la courbe tautochrone parce que D'Alembert ne tente pas de les « résoudre ».

Nous nous intéresserons ainsi essentiellement aux écrits consacrés au mouvement des fluides et aux cordes vibrantes. Ce sont les deux questions dans lesquelles la démarche de « résolution » de D'Alembert se trouve suffisamment développée pour que nous puissions procéder à un examen pertinent. Nous allons à présent étudier comment les trois étapes qui la caractérisent se déclinent dans ces deux cas de figure.

1.2. *« Résoudre » les problèmes des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides*

Le problème des cordes vibrantes

D'Alembert se penche pour la première fois sur le problème des cordes vibrantes dans les mémoires de l'*Histoire de l'Académie des sciences et des belles-lettres de Berlin* des années 1747 et 1750. Dans le Mémoire 1 des *Opuscules* (1761), il revient rapidement sur la mise en équation du problème et développe plus avant la question de la recherche de solutions. Comme cet écrit constituera, avec le Mémoire 25 [D'Alembert 1768a], le cœur de notre étude dans la seconde partie de l'article, nous en résumerons ici les premiers paragraphes [D'Alembert 1761a, p. 1–7].

Le problème consiste à considérer une corde de longueur a fixée en ses deux extrémités A et B. Suite à sa mise en mouvement, il s'agit de déterminer la fonction $y(x,t)$ donnant l'ordonnée, c'est-à-dire l'excursion de chaque point de la corde d'abscisse x, à chaque instant t : voir la fig. 2. Dans l'œuvre de D'Alembert, le problème de la corde vibrante à deux extrémités fixes apparaît sous trois formes distinctes, qui diffèrent par leur état initial :

- La corde est écartée de sa position rectiligne à $t = 0$, et lâchée sans vitesse initiale, c'est le cas de la corde pincée.
- La corde est à l'état rectiligne à $t = 0$, et une vitesse initiale lui est imprimée, c'est le cas de la corde frappée.
- Reste un cas mixte où ni les ordonnées ni la vitesse initiales ne sont nulles.

Comme nous allons le voir, le choix d'une de ces trois situations intervient après la mise en équation et la première phase de traitement de l'EDP obtenue.

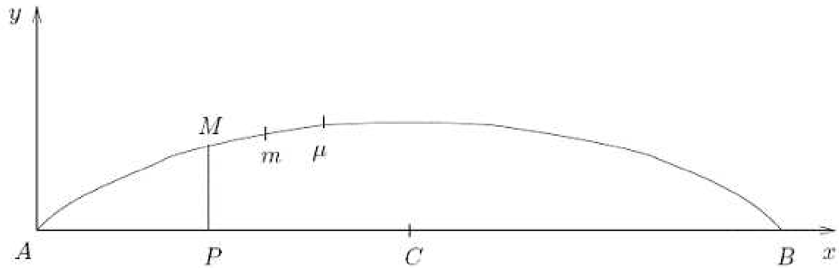

FIGURE 2. Corde AMB fixée entre ses deux extrémités A et B.

Afin de mettre en équation le mouvement de la corde, D'Alembert se place avant tout dans l'hypothèse de petites vibrations, ceci permettant de confondre l'abscisse curviligne s et l'abscisse x. Il établit ensuite un lien entre la force retardatrice animant chaque portion infinitésimale de la corde et les termes $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il en déduit ainsi, après simplification, l'EDP gouvernant la dynamique du système [7] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Débute alors la phase d'« intégration » que nous évoquions à l'instant. Pour « intégrer » l'EDP précédente, D'Alembert pose d'une part $dy = pdt + qdx$, avec $p = \frac{dy}{dt}$ et $q = \frac{dy}{dx}$, l'équation se résumant dès lors au système d'EDP du 1^{er} ordre

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dx}, \\ \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt}. \end{cases}$$

Il applique d'autre part le critère d'Euler, selon lequel cette formulation équivaut à la considération des deux différentielles complètes $qdt + pdx$ et $pdt + qdx$, telles qu'il existe, autrement dit, deux fonctions $u(x, t)$ et $y(x, t)$ vérifiant [8] $du = qdt + pdx$ et $dy = pdt + qdx$. L'addition et la soustraction de

7 D'Alembert remarque, dès 1747, que l'EDP obtenue peut également représenter les vibrations longitudinales d'une colonne d'air, et donc correspondre à l'équation de la propagation du son. Nous aborderons la question dans la troisième et dernière partie de l'article.

8 Dans les art. 87 à 89 de ses *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747, p. 164–172], dédiés à l'« intégration » des deux EDP présentées dans notre inventaire

ces deux expressions conduisent au système

$$\begin{cases} dy + du = (p+q)(dt+dx), \\ dy - du = (p-q)(dt-dx). \end{cases}$$

L'intégration (au sens moderne) de chacune des deux différentielles donne alors

$$\begin{cases} y + u = \Phi(x+t), \\ y - u = \Delta(x-t), \end{cases}$$

nouveau système à partir duquel D'Alembert parvient à l'expression générale [9]

$$y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t).$$

Φ et Δ correspondent ici à ce que nous appellerons par la suite des fonctions arbitraires, c'est-à-dire des fonctions quelconques d'une variable dont la définition, relative aux seules EDP, est similaire à celle des *constantes arbitraires* apparaissant lors de l'intégration d'équations différentielles ordinaires. $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ correspond ainsi à une nouvelle formulation de l'EDP $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ à l'aide de deux fonctions arbitraires. Son obtention clôt la phase d'« intégration ».

D'Alembert revient dès lors au problème physique, caractérisé, comme nous avons déjà eu l'occasion de le préciser, par la fixité des extrémités de la corde en A et en B : il pose donc $y(0,t) = 0$ (fixité en A) et $y(a,t) = 0$ (fixité en B). De la première de ces deux équations, il découle $\Phi(t) = -\Delta(-t)$, et la relation $y = \Phi(x+t) + \Delta(x-t)$ s'écrit alors

$$y(x,t) = \Phi(x+t) - \Phi(t-x).$$

La seconde équation implique quant à elle $\Phi(a+t) - \Phi(t-a) = 0$, c'est-à-dire la $2a$-périodicité de la fonction Φ.

(voir l'annexe, p. 58), D'Alembert suit le chemin inverse : il part d'un système de différentielles complètes pour aboutir à un système d'EDP du 1er ordre. La démarche d'« intégration », telle que nous la décrivions p. 69, reste cependant identique : il s'agit encore d'une réécriture de l'EDP par le moyen du critère d'Euler, c'est-à-dire d'un passage, dans un sens ou dans l'autre, entre les deux formulations de droite de la fig. 1.

9 Le rapport 2, qui découle de l'addition des deux termes, est directement intégré dans les fonctions Φ et Δ.

Si l'on se place maintenant dans le cadre du problème de la corde pincée comme D'Alembert le fait dans le Mémoire 1 des *Opuscules*, la corde peut être représentée en $t = 0$ par la fonction non nulle $y(x, 0)$ et une vitesse initiale $\frac{dy}{dt}(x, 0) = 0$. Cette seconde caractéristique physique implique la parité de la dérivée de la fonction Φ, et par conséquent l'imparité de Φ.

La solution générale peut alors s'écrire

$$y(x, t) = \Phi(x + t) + \Phi(x - t).$$

Compte tenu du fait que $y(x, 0) = 2\Phi(x)$, et puisque la fonction arbitraire Φ est impaire et $2a$-périodique, Φ est donc entièrement déterminée par la position de la corde à l'instant $t = 0$ sur l'intervalle $[0, a]$. Nous sommes ici dans le cas très particulier d'une résolution explicite.

L'écoulement d'un fluide dans un vase ouvert en ses deux extrémités

Pour ce qui concerne l'écoulement des fluides, le processus visant à « résoudre » le problème se décline de même en trois phases.

Avant d'en aborder la description, rappelons préalablement que la première théorie générale du mouvement des fluides remonte à l'*Hydrodynamica* de Daniel Bernoulli [Bernoulli 1738] et qu'elle s'appuie sur une approximation physique consistant à diviser le fluide en tranches parallèles, d'épaisseur infinitésimale, au sein desquelles la vitesse se voit supposée homogène et dirigée dans le sens de l'écoulement. Cette hypothèse, reprise par Jean Bernoulli dans l'*Hydraulica* [Bernoulli 1742] et par D'Alembert dans le *Traité des fluides* [D'Alembert 1744], permet de ramener le problème à une seule dimension d'espace et de travailler sur des équations différentielles ordinaires que les géomètres savent résoudre. Cependant, elle repose sur une approximation trop simplificatrice au regard de l'expérience pour que les hydrodynamiciens ne viennent à douter de sa pertinence.

C'est ce qui poussera D'Alembert à former, dans son *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, une théorie ayant « l'avantage de n'être appuyée sur aucune supposition arbitraire » [D'Alembert 1752b, Introduction, p. xxv]. Dans la droite ligne de ses *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747], il y pose les prémices du concept de champ de vitesse et procède à la mise en équation de l'écoulement grâce à l'emploi du calcul aux différences partielles [D'Alembert 1752b, p. 180–185]... ce qui nous amène au sujet de notre étude.

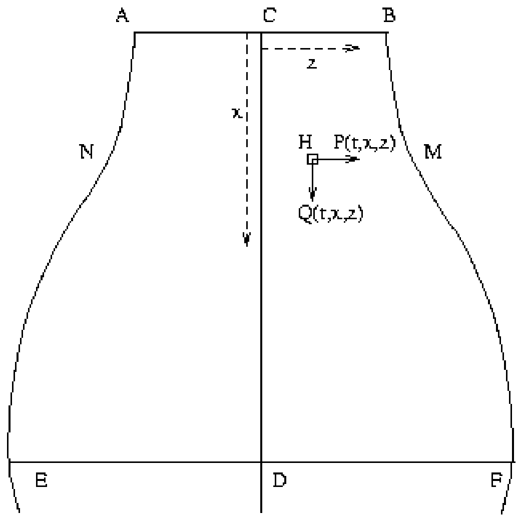

FIGURE 3. Vase $ABFE$ ouvert en ses deux extrémités, supérieure et inférieure AB et EF.

Si l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* contient les premiers pas du géomètre dans cette voie, le Mémoire 4 [D'Alembert 1761b] et le Mémoire 31 [D'Alembert 1768d] des *Opuscules* en constituent une prolongation, sur laquelle nous nous appuierons donc également afin de présenter les trois phases de la démarche visant à « résoudre » le problème.

La première consiste en la mise en équation du problème physique, à savoir le mouvement plan d'un fluide incompressible (de densité égale à 1) dans un vase $ABFE$ ouvert en AB et EF : voir la fig. 3. D'Alembert attribue, pour ce faire, à tout instant t, deux doublets de composantes horizontale et verticale, $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$, $\mathscr{Q}(t,x,z)$ et $\mathscr{R}(t,x,z)$, représentant respectivement la vitesse animant et la force s'exerçant sur un rectangle infinitésimal de fluide $IJKL$ repéré par les coordonnées spatiales (x,z). Sa méthode de mise en équation de l'écoulement se décline dès lors en deux étapes.

1$^{\text{re}}$ ÉTAPE. — Elle consiste à traduire mathématiquement la conservation de la masse de l'élément rectangulaire $IJLK$ (voir la fig. 4) au cours du

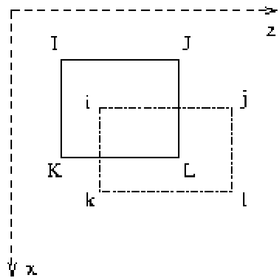

FIGURE 4. Mouvement de la particule H entre les instants t et $t+dt$.

mouvement. Considéré entre deux instants t et $t+dt$, de telle sorte que $IJLK$ devienne $ijlk$ au bout de l'intervalle de temps dt (avec $IK = dx$ et $IJ = dz$), cet élément obéit aux deux relations

$$\begin{cases} ik = Q(t, x+dx, z)\, dt = dx + dx\frac{dQ}{dx}dt = \left(1 + \frac{dQ}{dx}dt\right) dx, \\ ij = P(t, x, z+dz)\, dt = dz + dz\frac{dP}{dz}dt = \left(1 + \frac{dP}{dz}dt\right) dz. \end{cases}$$

La densité du fluide étant égale à 1, la conservation de la masse de l'élément entre les deux instants t et $t+dt$ s'écrit $IK \times IJ = dx \times dz = ik \times ij$, ce qui conduit D'Alembert, après avoir négligé les termes d'ordre 2 en dt, à

$$dxdz = \left(1 + \frac{dQ}{dx}dt + \frac{dP}{dz}dt\right) dxdz,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{dQ}{dx}.$$

2e ÉTAPE. — Elle repose, quant à elle, sur l'application du principe de dynamique de D'Alembert et de la condition d'équilibre mise au jour par Clairaut dans sa *Théorie de la figure de la Terre* [Clairaut 1743, p. 33–38] [10]. Son principe permettant de ramener un problème de dynamique (celui du mouvement du fluide) à un problème de statique (l'équilibre de ce même fluide), le raisonnement de D'Alembert consiste à substituer, dans la condition d'équilibre $\frac{d\mathscr{R}}{dz} = \frac{d\mathscr{Q}}{dx}$ de Clairaut, les composantes F_x et F_z

10 Pour plus de détails sur la mise au jour de cette condition par Clairaut, voir [Passeron 1994] et [Greenberg 1995]. Dans l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, D'Alembert en donne deux nouvelles démonstrations et la généralise au cas d'un fluide compressible : voir [Grimberg 1998].

des forces accélératrices perdues par l'élément de fluide au cours du mouvement aux composantes des forces $\mathscr{R}$ et $\mathscr{Q}$ s'exerçant selon les mêmes directions dans le cas de l'équilibre. En d'autres termes, sachant, d'après le principe de D'Alembert, que l'élément de fluide resterait en équilibre pour peu que les forces F_x et F_z qui s'y appliquent dans les directions x et z soient détruites au cours du mouvement, ces forces vérifieront [11]

$$\frac{dF_x}{dz} = \frac{dF_z}{dx}.$$

Il ne reste plus, dès lors, qu'à y injecter les expressions de F_x et F_z.

D'Alembert procède, auparavant, à la séparation des variables de temps et d'espace au sein des deux composantes $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse. Il a recours, dans ce but, à une hypothèse physique dont on verra par la suite qu'elle joue également un rôle fondamental dans la recherche d'une solution au problème. Cette hypothèse se résume à considérer que « le fluide contigu aux parois [...] coule le long de ces parois » [D'Alembert 1761b, p. 137]. Posant $z = y$ au niveau de BMF et ANE, de telle sorte que la fonction $y(x)$ corresponde à l'équation des contours du vase, la relation $\frac{Q(t,x,z)}{P(t,x,z)} = \frac{dx}{dy}$ liant les composantes de la vitesse en cet endroit, peut en effet, du fait de la fixité de parois, être considérée comme indépendante du temps. Il devient ainsi possible de séparer les variables spatiales et temporelle, ce qui incite D'Alembert à définir une fonction θ du temps t, telle qu'en tout point (x,z) du fluide les composantes $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ vérifient

$$\begin{cases} Q(t,x,z) = \theta(t)q(x,z), \\ P(t,x,z) = \theta(t)p(x,z). \end{cases}$$

Une telle opération revient à se restreindre, comme il le remarque lui-même dans le Mémoire 4 [D'Alembert 1761b, p. 141], à la considération d'un type très particulier d'écoulement pour lequel, en termes actuels, les lignes de courant, décrites par l'équation $\frac{dz}{P(t,x,z)} = \frac{dx}{Q(t,x,z)}$, c'est-à-dire $p(x,z)\,dx - q(x,z)\,dz = 0$, ne varient pas au cours du temps. Brièvement commentée dans l'article 150 de l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b, p. 183], elle sera plus longuement discutée

11 Cela équivaut, en termes modernes, à écrire que le champ de forces (F_x, F_z) est conservatif.

dans les articles 14 à 17 du Mémoire 31 de ses *Opuscules* [D'Alembert 1768d, p. 46–48] : de ces interrogations, il résulte selon lui que la séparation des variables peut être admise *a minima* dans les premiers instants du mouvement.

Sachant par ailleurs que [12] $F_x = g - \frac{dQ(t,x,z)}{dt}$ et $F_z = -\frac{dP(t,x,z)}{dt}$, D'Alembert différencie alors les composantes $P = \theta p$ et $Q = \theta q$ de la vitesse en considérant implicitement les variables spatiales x et z comme des fonctions de la variable temporelle t. Il obtient ainsi [13]

$$\begin{cases} F_x = g - \frac{d(\theta(t)q(x,z))}{dt} = g - \frac{qTdt+\theta Adx+\theta Bdz}{dt} = g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp \\ F_z = -\frac{d(\theta(t)p(x,z))}{dt} = -\frac{qTdt+\theta A'dx+\theta B'dz}{dt} = -pT - \theta^2 A'q - \theta^2 B'p, \end{cases}$$

avec $T = \frac{d\theta(t)}{dt}$, $A = \frac{dq(x,z)}{dx}$, $B = \frac{dq(x,z)}{dz}$, $A' = \frac{dp(x,z)}{dx}$ et $B' = \frac{dp(x,z)}{dz}$, c'est-à-dire, compte tenu de la condition d'équilibre $\frac{dF_z}{dx} = \frac{dF_x}{dz}$:

$$\frac{d(g - qT - \theta^2 Aq - \theta^2 Bp)}{dz} = \frac{d(-pT - \theta^2 A'q - \theta^2 B'p)}{dx}.$$

Cette équation, donnée dans l'art. 149 de l'*Essai sur la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b, p. 182], constitue un cas particulier de l'équation aujourd'hui connue sous le nom d'*équation de vorticité de Helmholtz.*

Partant de là, D'Alembert se contente finalement de montrer que l'équation $A' = B$, ou $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, y satisfait, restreignant ainsi son statut à celui de condition suffisante du problème, et parvient donc, dans le cas particulier $P = \theta p$ et $Q = \theta q$, à la mise en équation d'un écoulement plan incompressible sous la forme du système d'EDP du 1er ordre

$$\begin{cases} \frac{dp}{dx}(x,z) = \frac{dq}{dz}(x,z) \\ \frac{dp}{dz}(x,z) = -\frac{dq}{dx}(x,z), \end{cases}$$

12 Les composantes des forces détruites F_x et F_z correspondent, en termes modernes, à la résultante des forces extérieures $(g, 0)$, ici restreintes à la gravité, et des forces d'inertie $\left(-\frac{dQ}{dt}, -\frac{dP}{dt}\right)$.

13 Notons que le passage de l'avant-dernier au dernier membre de ces deux séries d'égalités repose sur l'expression des deux composantes de la vitesse sous la forme du rapport entre l'espace parcouru dans la direction correspondante et l'intervalle infinitésimal de temps dt considéré, c'est-à-dire sur les relations $P(t,x,z) = \theta(t)p(x,z) = \frac{dz}{dt}$ et $Q(t,x,z) = \theta(t)q(x,z) = \frac{dx}{dt}$.

lequel renferme respectivement ce que nous appellerions aujourd'hui l'équation caractérisant un écoulement potentiel incompressible et l'équation de continuité [14].

Comme dans le problème des cordes vibrantes, D'Alembert entame dès lors la phase d'« intégration », ceci grâce à une technique mathématiquement innovante donnée dans l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b, p. 60–63]. Quoique cette méthode soit aujourd'hui fort bien connue des historiens des sciences [15], rappelons toutefois très synthétiquement en quoi elle consiste.

Les relations $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$ et $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$ reviennent, d'après le critère d'Euler, à considérer $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ comme deux différentielles exactes. Les différentielles $qdx + \sqrt{-1}\frac{pdz}{\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}pdx + \frac{qdz}{\sqrt{-1}}$ le sont donc aussi, de même que leur somme et leur différence $(q + \sqrt{-1}p)\left(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$ et $(q - \sqrt{-1}p)\left(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}}\right)$.

Ces deux combinaisons linéaires induisent ainsi le changement de variables $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$, à partir duquel deux nouvelles différentielles exactes $(q + \sqrt{-1}p)dv$ et $(q - \sqrt{-1}p)du$, ou $(p - \sqrt{-1}q)dv$ et $(p + \sqrt{-1}q)du$ sont obtenues. Celles-ci permettent, pour finir, d'exprimer $p - \sqrt{-1}q$ et $p + \sqrt{-1}q$ sous la forme de fonctions quelconques Φ et Δ des variables complexes u et v. Il vient ainsi $\Delta(v) = p - \sqrt{-1}q$ et $\Phi(u) = p + \sqrt{-1}q$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} p = \frac{\Phi(u)+\Delta(v)}{2}, \\ q = \frac{\Phi(u)-\Delta(v)}{2\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} p(x,z) = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)+\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}, \\ q(x,z) = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)-\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

---

14 Euler parviendra en 1755 à des équations plus générales, tridimensionnelles et non linéaires : les célèbres *équations d'Euler* pour un fluide idéal compressible. Sur fond de polémique avec ce dernier, D'Alembert évoque quant à lui la question d'un écoulement en trois dimensions dans le Mémoire 4 des *Opuscules* [D'Alembert 1761b, p. 154–156] : la méthode, résumée en quelques lignes, y est « parfaitement semblable » à celle proposée pour le cas d'un écoulement plan.

15 Voir [Truesdell 1954, p. LIV-LV], [Grimberg 1998, p. 53–61] et [Szabó 1987, p. 237–239].

Ce résultat conduit, dans le même temps, à l'expression des différentielles $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ en fonction de u et v, de telle sorte que

$$\begin{cases} pdz + qdx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}[(dx + \sqrt{-1}dz)\Phi(u) - (dx - \sqrt{-1}dz)\Delta(v)] \\ \qquad\qquad = \frac{\Phi(u)du - \Delta(v)dv}{2\sqrt{-1}}, \\ pdx - qdz = \frac{1}{2}[(dx + \sqrt{-1}dz)\Phi(u) + (dx - \sqrt{-1}dz)\Delta(v)] \\ \qquad\qquad = \frac{\Phi(u)du + \Delta(v)dv}{2}. \end{cases}$$

Cette méthode d'« intégration », par passage dans le champ complexe, d'un système d'EDP (2) renvoyant à ce qu'on appellera les *conditions de Cauchy-Riemann* dès le siècle suivant constitue un premier pas vers la théorie des fonctions de la variable complexe, théorie jouant aujourd'hui, comme on sait, un rôle essentiel dans l'étude des écoulements potentiels bidimensionnels [16]. Comme le remarque J.-L. Verley [Verley 1986, p. 136], la différentielle du et sa conjuguée dv, induites par le changement de variables $u = x + z\sqrt{-1}$ et $v = x - z\sqrt{-1}$ forment la « première description [...] des fonctions harmoniques que Riemann prendra comme point de départ de sa théorie des fonctions de la variable complexe dans sa dissertation inaugurale de 1851 ». Par ailleurs, I. Szabó [Szabó 1987, p. 239] et G. Grimberg [Grimberg 1998, p. 55–58] notent que cette méthode conduit aussi D'Alembert, dans l'*Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides* [D'Alembert 1752b, p. 56–58], à introduire ce qui deviendra le concept de *potentiel* complexe et à s'interroger sur la dérivabilité de la fonction $q(x,z) - p(x,z)\sqrt{-1}$, aujourd'hui appelée *vitesse complexe.*

L'idée déjà employée dans ses *Réflexions sur la cause générale des vents* [D'Alembert 1747] [17] et consistant à introduire l'imaginaire $\sqrt{-1}$ afin d'intégrer le système d'EDP (2) s'inspire probablement, quant à elle, de la méthode d'intégration appliquée dans le problème des cordes vibrantes. Nous avons en effet pu constater que, dans le Mémoire 33 de ses

16 Pour un exposé des méthodes de la théorie des fonctions de la variable complexe appliquées à la résolution de problèmes physiques, voir par exemple [Lavrentiev & Chabat 1952].

17 Comme le notent S. S. Demidov [Demidov 1982, p. 6–13] et G. Grimberg [Grimberg 1998, p. 218–228], D'Alembert pratique déjà, dans cet ouvrage, des combinaisons de formes différentielles à coefficients complexes en vue d'opérer les changements de variables adéquats.

Opuscules [D'Alembert 1768e, p. 95–101] consacré à la résolution du système (2), D'Alembert s'appuie explicitement sur les recherches données dans le Mémoire 1 relatif aux cordes vibrantes. Les systèmes d'EDP du 1^er^ ordre (1) et (2) respectivement manipulés dans les deux cas de figures diffèrent de fait très peu l'un de l'autre, ce qui conduit à penser que cette maigre différence, tenant en la présence du signe « – » dans la seconde EDP du système (2), l'a justement incité à introduire l'imaginaire $\sqrt{-1}$:

$$(1)\ \begin{cases} \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dt} \\ \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dt} \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz} \\ \frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx} \end{cases}$$

Pour autant, quoique D'Alembert parvienne à une résolution explicite du problème de la corde pincée, il n'en sera pas de même dans le cas du mouvement d'un fluide. Les conditions physiques associées au système d'EDP dans la troisième et dernière phase de la démarche visant à « résoudre » le problème sont en effet déterminantes dans ce cadre. Elles se traduisent par deux types d'équations complémentaires dans le cas d'une corde vibrante : des équations faisant intervenir la variable d'espace x et des équations faisant intervenir la variable de temps t. Les deux conditions prises en compte par le savant dans le cas d'un écoulement font, quant à elles, intervenir des fonctions de *plusieurs* variables d'espace (x et z). Elles donnent donc lieu à un problème plus complexe.

La première de ces deux conditions correspond à la symétrie du vase par rapport à son axe, exprimée, selon les propres termes de l'auteur, par le fait que « la ligne *CD* divise le vase en deux parties égales & semblables » [D'Alembert 1761b, p. 139]. De cette symétrie découle l'annulation de la composante horizontale de la vitesse en tout point de la droite *CD* : ce qui revient à poser $p(x,z) = 0$ lorsque $z = 0$.

La seconde coïncide avec l'hypothèse incitant D'Alembert à séparer les variables spatiales et temporelle au sein des composantes de la vitesse : ceci en vertu, rappelons-le, de la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase, c'est-à-dire pour $z = y$. La relation qui en découle,

$$\frac{Q(x,z,t)}{P(x,z,t)}\ |_{z=y} = \frac{q(x,z)}{p(x,z)}\ |_{z=y} = \frac{dx}{dz},$$

fournit l'équation suivante pour les courbes *ANE* et *BMF* :

$$pdx - qdz\ |_{z=y} = 0.$$

Synthèse

Qu'il s'agisse de la question des cordes vibrantes ou de celle de l'écoulement d'un fluide, il semble que le processus visant à « résoudre » permette donc, d'après les descriptions précédentes, de valider un schéma composé de trois phases représenté sur la fig. 5.

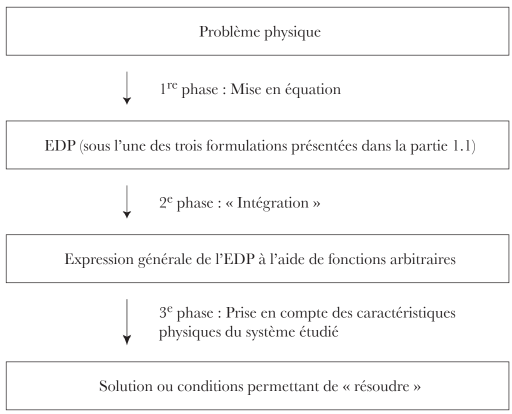

FIGURE 5. La démarche visant à « résoudre » un problème faisant intervenir une EDP.

Une première phase de mise en équation du mouvement, sous-tendue par l'application de principes mécaniques, consiste en la traduction du comportement dynamique du système sous forme d'EDP.

Au cours d'une seconde phase d'« intégration », D'Alembert part de l'EDP, prise seule, et parvient, via l'application du critère d'Euler, à une nouvelle expression générale formée de fonctions arbitraires.

Dans une troisième phase, la démarche du savant s'étend finalement au-delà du cadre strictement mathématique. Un ensemble de considérations physiques se trouve pris en compte sous la forme d'*équations* que nous qualifierons de *complémentaires* afin d'éviter les termes anachroniques de *conditions initiales* et de *conditions aux limites*. Ces équations, adjointes à l'expression générale découlant de la phase d'« intégration », forment un nouveau problème qu'il ne reste plus, dès lors, qu'à tenter de *résoudre*. Non pas « résoudre » dans le sens dalembertien du terme, mais résoudre dans le sens de déterminer la solution du problème.

Comment D'Alembert procède-t-il dans ce cadre ? Quelles sont les spécificités de sa démarche, et quelle idée se fait-il d'une solution d'un problème faisant intervenir une EDP ? C'est l'objet de la seconde partie de notre étude.

2. « RÉSOUDRE » UN PROBLÈME PHYSICO-MATHÉMATIQUE FAISANT INTERVENIR UNE EDP : SPÉCIFICITÉS DE LA DÉMARCHE DE D'ALEMBERT

Nous nous pencherons exclusivement ici sur la troisième phase de la démarche de résolution de D'Alembert, au cours de laquelle, nous venons de le voir, ce dernier se lance dans la recherche de solutions.

Nous commencerons, dans ce cadre, par nous concentrer sur le statut des équations complémentaires dans le problème des cordes vibrantes. Nous réfuterons ainsi l'emploi des termes modernes de conditions initiales et de conditions aux limites pour caractériser ce type d'équations.

Revenant ensuite au problème de l'écoulement des fluides avant d'achever notre examen de la question des cordes vibrantes, nous remarquerons que la manière de concevoir l'interaction mathématique entre l'EDP et les équations complémentaires est une spécificité de D'Alembert qui a des implications sur le concept de solution. Nous évoquerons enfin la présence des notions d'unicité et d'existence dans son œuvre. Cette étude nous permettra de comparer son approche avec celles de ses contemporains comme avec celles des futures générations de mathématiciens.

2.1. *Les* « équations complémentaires »

Dans le Mémoire 1 des *Opuscules* [D'Alembert 1761a, p. 29–37], D'Alembert défend l'idée qu'il avait déjà présentée une dizaine d'années auparavant D'Alembert [1752a] et selon laquelle la fonction Φ intervenant dans la solution $y(x,t) = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$ « ne doit pas changer de forme », c'est-à-dire d'expression, pour que la solution du problème puisse avoir lieu. Il tente même de le démontrer. Rappelons que, dans ce texte, la fonction Φ est définie sur $[0,a]$ par l'allure initiale de la corde, puis prolongée par imparité et périodicité du fait de la fixité des extremités de la corde pour tout t.

Dans le second Supplément du Mémoire 25 [D'Alembert 1768a, p. 181–199], D'Alembert cherche de nouveaux arguments pour montrer que Φ ne doit pas changer de forme. Il expose dans cette optique un problème que l'on peut considérer comme une variante du cas classique des cordes vibrantes pincées, mais où les extrémités de la corde deviennent mobiles dès que $t > 0$:

> « Supposons que dans l'instant où la corde se met en mouvement, ses deux extrémités deviennent tout-à-coup mobiles, de fixes qu'elles étoient auparavant ». [D'Alembert 1768a, p. 180]

Peu perturbé par le faible réalisme de la situation, D'Alembert énonce le résultat suivant :

> « Il n'est pas moins certain qu'on aura $y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}$, par la condition que $\frac{dy}{dt}$ soit $= 0$ lorsque $t = 0$, quelle que soit x & que la seule condition qu'il y ait à remplir, c'est que $y = 0$ lorsque x & $t = 0$; ce qui a lieu en effet dans l'équation qu'on vient de donner, puisque $x = 0$ donne $\Phi(x)$ ou $y = 0$, lorsque $t = 0$ ». [D'Alembert 1768a, p. 180–181]

Sa méprise dans ce passage est significative à plus d'un égard. Quoique privé de certaines de ses équations complémentaires, il pense effectivement encore disposer d'une solution parfaitement déterminée :

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Qu'en est-il en réalité ? Puisqu'il ne détaille pas les calculs en cet endroit, nous les mènerons ici à sa place en les modernisant. Ses équations complémentaires sont désormais :

$$\begin{cases} y(0,0) = 0, \; y(a,0) = 0, \\ y(x,0) = \Phi(x) \text{ sur } [0,a], \\ \frac{dy}{dt}(x,0) = 0. \end{cases}$$

En injectant cette dernière relation dans la solution générale [18] $y = \frac{\varphi(x+t)+\Delta(x-t)}{2}$ de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, il vient [19]

$$\varphi'(x) = \Delta'(x),$$

ce qui entraîne, après intégration,

$$\varphi(x) = \Delta(x) + k,$$

avec k constante arbitraire, et permet donc d'écrire, en incluant k dans les fonctions arbitraires :

$$y = \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{2}.$$

Or, sitôt cette expression obtenue, il apparaît immédiatement que $\varphi = \Phi$ et la solution devient

$$y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}.$$

Toutefois, cette expression ne représente pas pour autant une solution déterminée du problème gouverné par l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$. La fonction Φ n'est en effet connue et déterminée que sur l'intervalle $[0, a]$, sa périodicité et son imparité étant perdues du fait de la mobilité des extrémités de la corde.

Quelles sont donc, dans ce cadre, les raisons poussant D'Alembert à soutenir la détermination de sa « solution » ? Observons le passage suivant :

> « Si dans cette équation $y = \frac{\Phi(x+t)}{2} + \frac{\Phi(x-t)}{2}$, on se permettoit de faire changer de forme aux fonctions $\Phi(x+t)$ & $\Phi(x-t)$, le problême auroit une infinité de solutions possibles. Car en continuant la courbe initiale (dont l'équation est $y = \Phi x$) par-delà les deux points extrêmes, & lui donnant telle forme qu'on voudroit, sans s'assujettir à l'équation $y = \Phi x$, on satisferoit toujours à l'équation $y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$, dans laquelle Φx changeroit de forme à volonté, au-delà des deux extrémités de la corde ; cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique ». [D'Alembert 1768a, p. 181]

---

18 Dans ce qui suit, nous distinguons Φ, l'allure initiale de la corde sur $[0, a]$, et φ, l'une des deux fonctions arbitraires (avec Δ) apparaissant dans l'intégration de l'EDP $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$. À l'issue des calculs, φ sera identifiée à Φ.

19 Les fonctions φ' et Δ' représentent les dérivées des fonctions φ et Δ.

Pour resituer cet extrait, précisons que l'objectif de D'Alembert dans cette variante du problème des cordes vibrantes est de prouver rigoureusement qu'il est indispensable que Φ ne change pas d'expression sur son ensemble de définition, qu'elle vérifie, autrement dit, un postulat que nous nommerons désormais *permanence de la forme*. Signalons ici que, bien que cette idée ne soit pas partagée par Euler, elle est loin d'être incongrue par rapport aux habitudes de l'époque dans le traitement des problèmes physico-mathématiques.

Pour parvenir à ses fins, D'Alembert affirme que, pour des raisons intuitives liées à son appréhension physique du phénomène, le problème tel qu'il l'a posé doit avoir une solution déterminée, c'est-à-dire unique [20]. Dès lors, pour rendre compte mathématiquement de cette unicité, il explique qu'il faut nécessairement interdire à la fonction Φ de changer d'expression, sinon celle-ci peut prendre n'importe quelle valeur en dehors de l'intervalle $[0, a]$. En somme, son raisonnement est le suivant : Φ étant déterminée sur $[0, a]$, elle doit l'être également partout puisqu'il y a permanence de la forme. Ce n'est donc qu'au prix de l'introduction d'un postulat arbitraire qu'il récupère une solution déterminée. Bien entendu, il ne prétend pas que la fonction Φ reste impaire et $2a$-périodique, et ce n'est évidemment pas le cas. Erroné d'un point de vue moderne du fait de la permanence de la forme, le raisonnement du savant n'en reste pas moins scrupuleusement cohérent.

Au-delà de cet aspect, ce problème présente l'intérêt de montrer que les termes de conditions initiales et conditions aux limites ne sont pas adaptés à ce que fait D'Alembert, ce dernier n'ayant pas une idée claire du nombre de conditions nécessaires mathématiquement. C'est l'une des raisons pour lesquelles il nous paraît justifié de parler d'équations complémentaires, plutôt que de conditions initiales et de conditions aux limites. Cette question du dénombrement des conditions nécessaires, qui suscitera des interrogations dès la fin du XVIII^e (Laplace, Monge), restera longtemps un problème délicat car la réponse dépend de la structure de l'EDP, de son ordre et du nombre de variables.

---

20 L'unicité à laquelle nous faisons ici référence, celle de D'Alembert, ne doit pas être confondue avec la notion moderne. Nous reviendrons précisément sur cette question dans la partie 2.3 (voir p. 96).

À cela s'ajoute un argument tiré de notre étude préliminaire de la démarche de D'Alembert (1.2). Nous avions pu constater qu'il commence par étudier l'EDP, prise seule (phase « d'intégration »), avant de confronter ce qu'il obtient aux équations tirées des caractéristiques physiques du problème, les équations complémentaires autrement dit. Au cours de ce processus, il ne pose évidemment pas le problème tel que nous le ferions aujourd'hui, mais semble considérer que l'EDP et les équations complémentaires ont le même statut, comme dans un système ordinaire d'équations. Ce dernier point nous conforte dans notre décision d'utiliser le terme d'équation complémentaire à la place de ceux de conditions initiales et conditions aux limites.

2.2. *Les interactions entre l'EDP et les équations complémentaires*

L'écoulement d'un fluide dans un vase ouvert en ses deux extrémités

Après avoir précisé le statut des équations complémentaires, intéressons-nous au rapport qu'elles entretiennent avec l'EDP, ainsi qu'au rôle qu'elles jouent dans le cadre de la recherche de solutions. Revenons, pour ce faire, sur la question de l'écoulement des fluides. Comme nous le précisions dans la première partie, D'Alembert pose explicitement deux équations complémentaires :

- $pdx - qdz \,|_{z=y} = 0$, traduisant la contiguïté de l'écoulement au niveau des parois du vase,
- et $p(x,z) \,|_{z=0} = 0$, découlant de la symétrie du vase par rapport à son axe CD.

Ces deux équations sont naturellement à rapporter, comme nous l'avons vu, à l'expression générale des composantes horizontale et verticale de la vitesse (résultant de l'« intégration » du système d'EDP du 1$^{\text{er}}$ ordre) :

$$\begin{cases} p(x,z) = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)+\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}, \\ q(x,z) = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)-\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Vis-à-vis de la seconde équation complémentaire, D'Alembert propose le raisonnement suivant dans le Mémoire 4 de ses *Opuscules* :

> « Lorsque $z = 0$, on a $\Phi(x + z\sqrt{-1}) + \Delta(x - z\sqrt{-1}) = 0$; donc $\Delta x = -\Phi x$; donc $\Delta(x - z\sqrt{-1}) = -\Phi(x - z\sqrt{-1})$ ». [D'Alembert 1761b, p. 140]

Partant de $p(x,z)\ |_{z=0}= 0$, et sachant que $p = \frac{\Phi(x+\sqrt{-1}z)+\Delta(x-\sqrt{-1}z)}{2}$, il parvient autrement dit à la relation fonctionnelle

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x + \sqrt{-1}z)\ |_{z=0},$$

c'est-à-dire $\Delta(x) = -\Phi(x)$.

La seconde déduction, qui le conduit à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

pose cependant plus de problèmes. Elle nous incite à faire deux remarques.

1°. Ce raisonnement revient tout d'abord à passer d'une relation fonctionnelle valable sur le champ des nombres réels à son équivalent sur le champ des nombres complexes. Il sous-entend l'hypothèse, courante à cette époque, selon laquelle les fonctions Φ et Δ peuvent être réduites sous formes de séries polynomiales ou trigonométriques à coefficients réels [21].

2°. D'autre part, dans le passage de $\Delta(x) = -\Phi(x)$ à

$$\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z),$$

D'Alembert étend mathématiquement une propriété locale, initialement définie pour $z = 0$, à l'ensemble des particules de fluide (x,z) s'écoulant dans le vase. Ce raisonnement pourrait n'avoir mérité aucun commentaire si le savant avait physiquement traduit la propriété de symétrie du vase, en remarquant qu'au-delà de l'annulation de la composante verticale de la vitesse sur l'axe, la symétrie implique également les relations $-p(x,-z) = p(x,z)$ et $q(x,-z) = q(x,z)$ en tout point de l'écoulement.

La déduction proposée n'a donc rien à voir avec la traduction d'une propriété physique de l'écoulement. Elle consiste au contraire en une manipulation exclusivement mathématique de l'équation complémentaire de départ, $\Phi(x + \sqrt{-1}z) + \Delta(x - \sqrt{-1}z) = 0$, laquelle le conduit à $\Delta(x - \sqrt{-1}z) = -\Phi(x - \sqrt{-1}z)$, ou [22] $\Delta(v) = -\Phi(v)$.

---

21 D'Alembert s'interroge cependant longuement sur la légitimité d'un tel raisonnement, en particulier dans le Mémoire 25 [D'Alembert 1768a] et, de façon plus ponctuelle, dans le Mémoire 33 § III [D'Alembert 1768e, p. 108] de ses *Opuscules* : voir [Jouve 2007].

22 Rappelons que $u = x + \sqrt{-1}z$ et $v = x - \sqrt{-1}z$.

Cette relation $\Delta(v) = -\Phi(v)$, D'Alembert la rapporte ensuite à la première des deux équations complémentaires $pdx - qdz\ |_{z=y} = 0$.

Sachant que l'expression $\frac{\Phi(u)du+\Delta(v)dv}{2}$ de la différentielle $pdx - qdz$ pour $z = y$ correspond à l'équation des parois du vase

$$\Phi(u)du + \Delta(v)dv = 0,$$

avec $u = x+\sqrt{-1}y$ et $v = x-\sqrt{-1}y$, l'injection de la relation $\Delta(v) = -\Phi(v)$ lui permet d'obtenir

$$\Phi(u)du - \Phi(v)dv = 0,$$

soit encore, après intégration :

$$(1) \qquad \Gamma(u) - \Gamma(v) = M,$$

M et Γ désignant respectivement une constante réelle arbitraire et une primitive de la fonction Φ.

D'Alembert parvient ainsi à la forme générale de l'équation des contours AE et BF du vase[23]. Cette équation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$, ou $\Gamma(x + \sqrt{-1}y) - \Gamma(x - \sqrt{-1}y) = M$, correspond manifestement, dans son idée, à une expression analytique compatible avec les deux équations complémentaires associées au système d'EDP. Elle pose par ailleurs un problème des plus difficiles : la détermination de la fonction Γ des variables x et y, l'équation $y(x)$ des contours du vase étant supposée connue. Voici comment D'Alembert y répond dans le Mémoire 4 :

> « le Problème ne pourra être résolu, toutes les fois qu'on ne pourra donner à l'équation de la courbe BMF [désignant la paroi du vase] la forme $\Gamma u - \Gamma v = M$ ». [D'Alembert 1761b, p. 140]

Afin d'illustrer son propos, il propose l'exemple d'un vase dont la paroi BMF répondrait à l'équation $x + y = a$, avec a constante :

> « Pour faire sentir un exemple très-simple de la vérité de ce que nous avançons, soit, par exemple, $x + y = a$, l'équation de la courbe BMF, qui sera pour

23 En remontant à la phase d'« intégration » du système d'EDP et en opérant de nouvelles combinaisons linéaires des différentielles complètes $pdz + qdx$ et $pdx - qdz$ (qui le conduiront elles-mêmes à de nouveaux changements de variables), il montrera par ailleurs, dans le § II du Mémoire 33 [D'Alembert 1768e, p. 101–103], que cette même équation possède de nombreuses variantes.

lors une ligne droite au portion de ligne droite [...] ; on aura en substituant pour x & y leurs valeurs $\frac{u+v}{2}$ & $\frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$ l'équation

$$= u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) = a,$$

qui ne peut être réduite à cette forme $\Gamma u - \Gamma v = M$, puisqu'il faudroit qu'on eût

$$u\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\right) + v\left(\frac{-1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right) = a$$

». [D'Alembert 1761b, p. 140–141]

Dans ce cas de figure, le problème ne possédera donc pas de solution parce que l'équation $x + y = a$ ne peut se mettre sous la forme $\Gamma(x + \sqrt{-1}y) - \Gamma(x - \sqrt{-1}y) = M$: elle ne répond pas, autrement dit, à la condition découlant des restrictions imposées par la prise en compte des équations complémentaires.

L'équation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ conditionne donc la possibilité de résoudre le problème [24]. Il ne s'agit pas ici d'une exigence liée à la permanence de la forme, comme dans le problème des cordes vibrantes, mais d'une nécessaire compatibilité entre l'équation $y(x)$ de la paroi du vase, considérée comme une donnée du problème, et la forme $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ que requiert la prise en compte de l'EDP et des deux équations complémentaires. Ces deux équations complémentaires, mathématiquement réunies en une expression analytique de la paroi, rentrent ainsi en conflit avec le système d'EDP du 1er ordre auxquelles elles sont initialement adjointes. C'est là une conclusion dont le savant ne déroge pas dans ses écrits ultérieurs. Citons pour preuve un passage extrait du Mémoire 31 de ses *Opuscules* :

> « on ne peut trouver la loi du mouvement du fluide au premier instant, à moins que le vase ne soit assujetti à une figure telle qu'elle a été déterminée dans le Mémoire [4] ». [D'Alembert 1768d, p. 47]

24 La *possibilité de résoudre* renvoie, dans les travaux de D'Alembert, à la notion d'existence d'une solution, tout du moins telle que ce dernier la conçoit. Nous reviendrons précisément là-dessus dans la partie 2.3, p. 96.

Cette conclusion n'est d'ailleurs pas spécifique à ces deux équations complémentaires. Dans la suite du Mémoire 4, le géomètre ajoute en effet :

> « Il faut que cette nouvelle équation de [la surface supérieure du fluide] s'accorde avec celle qui a été trouvée précédemment [...]. Si elles sont différentes, & si l'une ne peut être réduite à l'autre, c'est une marque que la solution analytique du Problême est impossible.
>
> Ce n'est pas tout ; ce que nous avons dit de la surface supérieure, doit avoir lieu de même pour la surface inférieure ; nouvelles conditions qui limitent encore davantage la solution du Problême [...]
>
> On voit par-là qu'il y a bien peu de cas où l'on puisse trouver analytiquement & rigoureusement le mouvement d'un fluide dans un vase ». [D'Alembert 1761b, p. 145]

D'Alembert s'intéresse ici, en termes modernes, aux deux surfaces libres du fluide AB et EF (voir la fig. 3). Il évoque les équations complémentaires relatives au comportement de l'écoulement au niveau de ses frontières supérieure et inférieure, nouvelles équations dont il pense qu'elles restreindront encore ses chances de pouvoir résoudre la question.

Ce que nous venons d'exposer pour les parois et, plus synthétiquement, pour les deux surfaces libres, s'applique également à ce que D'Alembert nomme les « filets » du fluide, c'est-à-dire ce que nous appellerions aujourd'hui les *lignes de courant* de l'écoulement (ces filets répondent à l'équation générale $\frac{dz}{P(t,x,z)} = \frac{dx}{Q(t,x,z)}$, c'est-à-dire $\frac{q(x,z)}{p(x,z)} = \frac{dx}{dz}$ compte tenu de l'opération de séparation des variables $Q = \theta q$ et $P = \theta p$). Comme il le remarque dans le Mémoire 4 [D'Alembert 1761b, p. 141–142], D'Alembert dispose en effet, pour chacun de ces filets, d'une équation $p(x,z)dx - q(x,z)dz = 0$ similaire à celle décrivant les contours du vase et définie par une certaine valeur du rapport $\frac{q(x,z)}{p(x,z)}$. Compte tenu de la méthode de « résolution » précédemment exposée, l'équation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ pour $z \neq y$ (c'est-à-dire à l'intérieur du vase) forme par conséquent l'expression analytique générale des filets du fluide, chacun d'eux étant caractérisé par une certaine valeur de la constante d'intégration M, devenue un paramètre. Si la question de la détermination de la fonction Γ acquiert ainsi un degré supérieur de complexité, la conclusion de D'Alembert, pour ce qui est de la possibilité de parvenir à une solution, n'en demeure pas moins parfaitement identique : c'est ce dont témoignent les recherches qu'il dédie à ce problème dans le Mémoire 33 [D'Alembert 1768e] et le Mémoire 57 § VII [D'Alembert 1780b, p. 125–134] de ses *Opuscules*, ainsi que dans le cadre d'une discussion épistolaire avec Lagrange dont ils rendront respectivement compte dans les mémoires « Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. de La Grange *écrites pendant les années* 1764 *&* 1765 » [D'Alembert 1766] et « Solution de différents Problèmes de calcul intégral » [Lagrange 1766] [25]. Pour que le problème puisse être résolu, il faut selon lui s'assurer, pour chaque valeur de M, de la compatibilité entre l'équation $\Gamma(u) - \Gamma(v) = M$ obtenue à partir du système d'EDP et des équations complémentaires associées, et l'équation $y(x)$, supposée connue, des parois du vase à l'intérieur duquel s'opère l'écoulement. Cette compatibilité se traduit mathématiquement, dans son esprit, en terme de résolution du système à deux variables et un paramètre formé par ces deux équations.

Notons enfin, avant de revenir à la question des cordes vibrantes, qu'une autre idée semble émerger de cette étude de sa démarche de résolution pour le problème de l'écoulement des fluides : D'Alembert n'envisage pas de solution autre qu'analytique, non pas, en termes modernes, dans le sens de la théorie des fonctions analytiques, mais dans le sens d'une expression fonctionnelle explicite. Il s'agit là d'un élément caractéristique de sa façon d'appréhender le concept de solution sur lequel nous ne manquerons pas de revenir.

La polémique entre D'Alembert et Euler sur les cordes vibrantes

Nous avons précédemment mentionné, sans trop entrer dans le détail, le rejet des « sauts de courbure » par D'Alembert et le lien que cette exigence entretenait avec le postulat de permanence de la forme. Revenons à présent sur le cas classique d'une corde pincée, c'est-à-dire fixée en ses deux extrémités, écartée de son état de repos, puis lâchée avec une vitesse

25 Pour un exposé de ces recherches, voir [Truesdell 1955, p. LXXXV-XC] et [Guilbaud 2007].

nulle à l'instant $t = 0$. La résolution proposée [D'Alembert 1749b, p. 230–231] ; [D'Alembert 1761a, p. 2–7] conduisait à la solution $y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$. La fonction Φ, impaire et $2a$-périodique du fait de la fixité des extrémités, se voyait entièrement déterminée par l'allure initiale de la corde et correspondait à l'équation complémentaire $y(0,x) = 2\Phi(x)$, pour x dans $[0,a]$.

De l'avis du savant, la possibilité de résoudre le problème dépend, à ce stade, des propriétés de « régularité » de cette fonction Φ. Cette question constitue le cœur d'une célèbre polémique avec Euler, dont il nous faut à présent dire quelques mots. Dans un mémoire inédit de 1755, pièce préparatoire au Mémoire 1 des *Opuscules*, D'Alembert résume la querelle en ces termes :

> « Nous différons en ce que M. Euler tire de cette équation [$y = \Phi(x+t) + \Phi(x-t)$] une construction qu'il prétend s'appliquer à toutes sortes de courbes, au lieu que j'ay prétendu que cette équation ne pouvoit s'appliquer qu'à certaines courbes, et que dans les autres cas la solution analytique et rigoureuse du problême étoit impossible ». [D'Alembert 1755, f. 4]

D'Alembert consacre effectivement un passage important du Mémoire 1 [D'Alembert 1761a, p. 17–29] à démontrer que les fonctions Φ impaires, $2a$-périodiques (définies sur $]-\infty,+\infty[$) et présentant des « sauts de courbure », doivent être exclues de l'ensemble des solutions admissibles. Il décrit ainsi les fonctions qui pourront être tolérées :

> « Ainsi la construction de M. Euler n'a pas lieu, toutes les fois que la courbure de la courbe AMB fait un saut en quelque point M, ou qu'elle n'est pas nulle, tant en A, qu'en B. Aucun de ces deux inconvéniens n'a lieu dans ma solution ; car lorsque les courbes AMB [...], $B\mu a$, Amb &c. sont assujetties à une même loi, 1°. la courbe AMB n'a point de sauts dans sa courbure, puisque tous ses points sont assujettis à une même équation ; 2°. la courbure en A & en B est nulle, puisque la similitude des parties AMB, $B\mu a$, Amb &c. donne à la courbe (supposée continue) un point d'infléxion en A & un en B, ensorte que la courbure est nulle en ces deux points ». [D'Alembert 1761a, p. 28]

Plus précisément, il nous faut ici distinguer deux étapes.

1°. Dans un premier temps, D'Alembert montre que la courbe initiale Φ prolongée, c'est-à-dire rendue impaire et $2a$-périodique, ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Les raisons invoquées pour étayer ce critère sont de trois natures :

– analytique : les différentielles secondes en x intervenant dans l'équation régissant le phénomène, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, ne peuvent être calculées pour les points présentant un « saut de courbure » ;

– physique : la détermination de la force accélératrice, liée à cette différentielle seconde, présente la même difficulté ;

– métaphysique : quoiqu'elle ne soit pas générale, la loi de continuité, selon laquelle « la nature de la force accélératrice est de croître ou de décroître par degrés insensibles, & non brusquement & par sauts » [D'Alembert 1761a, p. 23–24], doit cependant s'appliquer dans ce cas.

2°. Dans un second temps, D'Alembert s'attache à prouver que cette absence de « sauts de courbure » équivaut au fait que la fonction Φ prolongée soit « assujettie à une même loi » [D'Alembert 1761a, p. 29–36] ; qu'elle conserve, autrement dit, la même expression sur l'ensemble des réels. C'est l'idée de permanence de la forme que nous avons déjà évoquée.

Dans le cas où la fonction Φ ne répondrait pas aux exigences requises, D'Alembert affirme, dès 1750, qu'une telle situation « surpasse les forces de l'analyse connües » [D'Alembert 1752a, p. 358] ; [D'Alembert 1761a, p. 38]. D'un point de vue moderne, on peut trouver raisonnable d'exiger l'absence de sauts de courbure, car cela correspond à la notion de solution exacte ou stricte. En revanche, son équivalence avec la permanence de la forme est évidemment fausse car on peut raccorder des fonctions d'expressions différentes de telle sorte que leur dérivée seconde soit continue, et donc ne fasse pas de sauts.

Comme nous l'avions constaté sur la question de l'écoulement des fluides, nous retrouvons ici l'existence de « conflits » entre les équations complémentaires et l'EDP, ou l'expression générale qui en découle à l'issue de la phase « d'intégration ». Cela constitue la spécificité de l'approche de D'Alembert par rapport à ses contemporains. Ces conflits peuvent être liés aux sauts de courbure de la fonction représentant l'allure initiale de la corde, ou au fait que celle-ci viole un postulat en partie extérieur à l'analyse : la permanence de la forme. Dans le premier cas, on peut juger le point de vue de D'Alembert pertinent, et dans le second cas, il est très discutable.

Il n'en reste pas moins que cet état de fait le conduit à un certain pessimisme quant à sa capacité de venir à bout des deux problèmes évoqués.

Dans la question de l'écoulement des fluides, nous avons vu que le problème, selon D'Alembert, ne peut être résolu si les rapports qu'entretiennent l'EDP et ses équations complémentaires ne permettent pas d'aboutir à une solution analytique. Quoique cette dernière notion coïncide avec la nôtre, nous savons néanmoins aujourd'hui que la résolution explicite de ce genre de problèmes représente un cas de figure assez rare : les mathématiciens sont, le plus souvent, contraints de recourir à une résolution approchée du problème via l'application de méthodes numériques adéquates. Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la démarche du savant, fondée sur la recherche de solutions explicites, ne le mène à un système d'EDP et d'équations complémentaires analytiquement « intordable ».

Dans le problème des cordes vibrantes, l'idée de D'Alembert selon laquelle la généralité d'une solution dépend de sa compatibilité avec différents types d'équations complémentaires, n'a également rien d'aberrant d'un point de vue moderne. Cependant, les problèmes d'irrégularité auxquels D'Alembert se trouve confronté le poussent à conclure à l'impossibilité de « résoudre ». Dans de semblables situations, les mathématiciens envisageraient aujourd'hui la recherche de solutions moins régulières, ou solutions faibles, via la définition de nouveaux espaces fonctionnels dotés de conditions de régularité adéquates.

Aussi, ces deux démarches s'avèrent nécessairement infructueuses parce que le cadre mathématique conceptuel dans lequel D'Alembert se débat et la nature même des problèmes abordés ne lui permettent pas, en l'état, d'obtenir des « solutions » telles qu'il en conçoit les contours dans son œuvre. Elles n'en recèlent pas moins un grand nombre d'idées innovantes : l'étude des rapports à l'EDP et les équations complémentaires, le passage dans le champ des nombres complexes en hydrodynamique, ou encore ses réflexions sur la « régularité » admissible d'une solution.

2.3. *Caractérisation de la démarche de D'Alembert*

Unicité de la solution

Nous avons précédemment évoqué (2.1) le cas d'une corde vibrante dont on lâche les deux extrémités à $t = 0$, cas de figure abordé par D'Alembert dans le Mémoire 25 de ses *Opuscules* [D'Alembert 1768a, p. 180–184]. Persuadé que ce problème devait avoir une solution déterminée, il l'avait utilisé pour justifier le postulat selon lequel une fonction ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Il s'exprimait alors en ces termes :

> « cependant il est évident par la nature de la question que le problême ne peut avoir qu'une solution, & que la position initiale de tous les points étant donnée, le mouvement de tous ces points est déterminé & unique. » [D'Alembert 1768a, p. 181]

Cette phrase, emblématique du point de vue de l'auteur, nous permet de clarifier la notion d'unicité de la solution chez D'Alembert. Il déduit le caractère « unique » d'une solution grâce à deux types d'arguments :

– la constatation qu'un phénomène physique précis se produit,
– ses intuitions quant aux facteurs déterminant ce phénomène, ou, en d'autres termes, ce qui fait qu'un phénomène se produit plutôt qu'un autre.

Le premier argument pourrait être qualifié d'empirique, si les problèmes envisagés par D'Alembert ne correspondaient pas le plus souvent, comme ici, à des situations théoriques sans vérification expérimentale possible. Le second relève d'intuitions plus ou moins pertinentes concernant les équations complémentaires, leur nombre et leur nature. Fondamentalement, l'unicité de la solution émerge donc d'une forme de déterminisme physique implicitement associée à la nature physico-mathématique de ses recherches.

Existence ou possibilité de déterminer la solution

La situation est semblable pour ce qui concerne la notion d'existence. Le rôle des considérations physiques est prépondérant : le simple fait, selon lui, qu'un phénomène ait lieu garantit l'existence d'une solution. On ne rencontre d'ailleurs pas de polémiques entre D'Alembert et ses contemporains autour du concept moderne équivalent. De plus, et contrairement aux mathématiciens actuels, il ne s'intéresse pas à l'existence abstraite d'une solution, mais plutôt à la *possibilité de résoudre*, notion que nous allons maintenant tenter d'éclaircir.

D'Alembert a conscience qu'une solution peut exister, sans qu'il dispose pour autant des outils mathématiques lui permettant de l'expliciter. Dans ses mémoires sur les cordes vibrantes, il répète en effet régulièrement à partir de 1750 :

> « dans plusieurs cas le Probleme ne pourra être resolu, & surpassera les forces de l'analyse connue. » [D'Alembert 1761a, p. 38]

Essayons donc de comprendre ce que le savant entend par *possibilité de résoudre*. Voyons cela sur deux citations extraites de ses recherches sur l'écoulement des fluides :

> « Le vase doit avoir une certaine figure pour que le mouvement du fluide puisse être représenté par une formule analytique. » [D'Alembert 1768d, p. 42]

> « Pour pouvoir déterminer analytiquement le mouvement d'un fluide dans un vase, il faut que la figure de ce vase soit assujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de φx, forme qui dépend elle-même de la condition $\varphi(b+u) \pm \varphi(b-u) = 0$. » [D'Alembert 1768e, p. 96–97]

On remarque que D'Alembert y emploie les termes de « formule analytique » et de « détermination analytique », lesquels correspondent à la notion moderne de solution analytique, ou explicite, que l'on peut, autrement dit, exprimer à l'aide de fonctions usuelles [26]. Les méthodes qu'il propose visent donc uniquement à l'obtention d'une formule ou d'une équation, seules formes sous lesquelles la « solution » puisse exister selon lui.

En somme, la possibilité de résoudre peut revêtir deux sens, qui ne s'excluent pas mutuellement et ne sont pas nécessairement distingués par D'Alembert :

26 Rappelons qu'une solution analytique s'exprime explicitement à l'aide de fonctions usuelles. Le terme analytique n'a pas le même sens ici que lorsque l'on parle d'une fonction analytique, qui se développe localement en une série entière convergente.

– la capacité à « résoudre » avec les outils mis à disposition par l'Analyse du moment,

– la possibilité d'expliciter la « solution » à l'aide de fonctions que l'on dirait aujourd'hui usuelles.

Il y aura donc *impossibilité de résoudre* lorsque :

– l'Analyse s'avère incompétente en l'état présent. C'est l'argument invoqué par le savant lorsqu'il se trouve confronté à des problèmes du type de ceux évoqués en 2.2, qu'il s'agisse de problèmes d'irrégularité des équations complémentaires, ou d'incompatibilité de ces équations avec l'EDP ;

– il n'existe pas de solution pouvant être exprimée à l'aide de fonctions usuelles et l'Analyse est définitivement incompétente. Le cas d'une courbe tracée arbitrairement pousse ainsi le savant à conclure :

> « Donc si la courbe initiale est tracée au hasard, & n'a point d'equation, [...] la solution ne pourra avoir lieu ». [D'Alembert 1768a, p. 198]

Bien que D'Alembert ne s'intéresse pas à l'existence d'une solution, qu'il ne serait pas apte à déterminer, précisons cependant qu'il n'hésite pas à envisager des stratégies alternatives lorsque la sienne se trouve mise en défaut. Confronté à certaines situations délicates dans le problème des cordes vibrantes, il explique ainsi, dès 1747, qu'il « n'y a donc point autre chose à faire, que de chercher le mouvement de la corde, en la regardant comme composée d'un grand nombre de points, unis ensemble par des fils extensibles » [D'Alembert 1749b, p. 246].

Il applique cette stratégie pour quelques cas simples, mais ce sera surtout Lagrange qui en fera usage dans ses « Recherches sur la nature, et la propagation du son » [Lagrange 1759]. Dans la polémique sur la notion de fonction des années 1750, ce dernier poursuivra d'ailleurs l'objectif de conforter, du moins dans un premier temps, le point de vue d'Euler contre celui de D'Alembert.

Synthèse et mise en perspective

La démarche dalembertienne est donc simultanément marquée par un attachement profond aux expressions formelles des fonctions, au détriment notamment de leur représentation géométrique, ainsi que par une très forte imbrication entre l'Analyse et les considérations émanant de la physique. Le premier de ces deux aspects conduit D'Alembert à nourrir un certain pessimisme quant aux moyens lui permettant de venir à bout des problèmes abordés. Et la réunion de ces deux aspects constitue la spécificité de son approche. Bien qu'elle soit parfois sous-estimée par certains historiens et qu'elle puisse paraître incongrue à un regard moderne, cette démarche ne restera pas sans répercussions. Avant de nous pencher sur un exemple particulier de celles-ci, nous pouvons dresser un panorama général de la postérité des différents aspects de son approche.

Tout d'abord, l'imbrication entre mathématiques et physique telle que la concevait D'Alembert laissera la place à une plus nette distinction, par ses successeurs directs, entre l'étape de traitement physique du problème et la phase mathématique d'étude de l'équation. Néanmoins, il serait hâtif de conclure que ces aspects resteront à jamais disjoints. Si nous nous penchons par exemple sur le rôle du déterminisme physique dans l'approche moderne, nous observons que son lien avec la notion d'unicité dans l'approche de D'Alembert n'est pas aberrant. Cependant, ce lien prend aujourd'hui une toute autre forme car il faut distinguer deux niveaux dans la démarche actuelle : le choix d'un modèle dont la mise en équation garantit *a priori* l'existence et l'unicité d'une solution, et la preuve de cette unicité à l'aide de théorèmes mathématiques. Le déterminisme physique intervient donc en amont de la phase de résolution. Il n'est pas directement responsable de l'unicité comme chez D'Alembert. En somme, les considérations physiques ne font plus ingérence dans les lois de l'Analyse de nos jours.

Concernant l'existence et l'unicité, les concepts dalembertiens ne sont bien sûr pas équivalents aux nôtres, même si on peut les considérer comme des versions embryonnaires. Il faut ajouter que, bien que les mathématiciens disposent de théorèmes d'existence et d'unicité dès le début du XIX^{e} siècle, leur démarche générale s'articulera encore très souvent en trois phases[27], à l'instar du schéma de la fig. 5 décrivant la façon de faire de D'Alembert. Chacune de ces étapes pourra en revanche faire

27 Particulièrement pour des problèmes se résolvant explicitement comme celui des cordes vibrantes.

appel à des outils différents émanant de l'algèbre ou de la géométrie. Ce n'est que plus tard que les théorèmes prendront tout leur intérêt avec l'apparition de méthodes de résolution approchée rendant indispensable la connaissance *a priori* de l'existence et l'unicité de la solution.

Pour ce qui est des préoccupations présentes chez D'Alembert concernant la régularité des équations complémentaires, il faudra attendre Riemann [Riemann 1898] [28] et, plus tard, des théories comme celle des distributions, pour que la difficulté soit prise en compte et trouve des réponses. Néanmoins, cette question est intimement liée à celle concernant la notion même de fonction. Elle entraînera d'ailleurs un débat sur le sujet entre les principaux géomètres contemporains de D'Alembert. Cette polémique, sur laquelle nous proposons à présent de nous pencher, constitue une répercussion de l'approche du suivant au-delà de la seule question des EDP.

3. IMPACT SUR LE DÉBAT CONCERNANT LE CONCEPT DE FONCTION

Comme nous l'avons vu, l'un des aspects importants de la démarche de D'Alembert, la *possibilité de résoudre*, dépend de la nature des fonctions arbitraires intervenant dans les données du problème, c'est-à-dire dans les équations complémentaires. L'enjeu crucial du débat sur la nature des fonctions arbitraires apparaît ainsi clairement. Ses conclusions éventuelles sont cruciales pour la validité des solutions des problèmes faisant appel à des EDP, comme notamment celui des cordes vibrantes et de l'écoulement des fluides. En l'occurrence, il est déterminant de savoir si l'on doit accepter ou rejeter les fonctions changeant d'expression.

Certains des aspects et des protagonistes de ce débat, tels qu'Euler et Lagrange, ont déjà été abordés par A. Youschkevitch [Youschkevitch 1981] et J. Dhombres [Dhombres 2004]. Comme nous nous intéressons aux recherches plus tardives de D'Alembert, nous nous concentrerons pour notre part sur la période allant du début des années 1760 à sa mort

28 Le mémoire intitulé « Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie » auquel nous faisons allusion est initialement publié en allemand dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Göttingen*, t. VIII, 1860.

en 1783, puis nous analyserons chronologiquement les réflexions de D'Alembert dans ce domaine et leurs répercussions.

3.1. *Origines de la position de D'Alembert et premiers doutes*

La défense de la permanence de la forme

Les premières interrogations de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires apparaissent au sein de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes [D'Alembert 1752a; 1761a; 1768a]. Nous avons déjà fait observer que sa position, dans ce contexte, consiste à affirmer que, pour pouvoir intervenir dans la solution du problème, une fonction donnée ne doit pas faire de « sauts de courbure ». Cela implique, selon lui, qu'elle ne doit pas changer d'expression sur ce qu'on appellerait aujourd'hui son ensemble de définition. Au passage, il nous faut dès maintenant apporter des précisions indispensables pour la suite quant à l'emploi des termes *continu* et *discontinu* par D'Alembert et ses contemporains, ces mots n'ayant pas le même sens qu'aujourd'hui. Comme l'explique très justement A. Youschkevitch :

> « continuité signifie invariabilité, immuabilité de la loi de l'équation déterminant la fonction sur tout le domaine des valeurs de la variable, alors que la discontinuité d'une fonction signifie un changement de la loi analytique, l'existence de lois différentes sur deux intervalles ou plus de son domaine. » [Youschkevitch 1981, p. 42]

En somme, la *continuité* des savants du XVIII^e^ correspond à ce que nous avons appelé *permanence de la forme*. Deux motifs poussent donc D'Alembert à exiger la *continuité* des fonctions :

1°. Il observe tout d'abord, exemples à l'appui, qu'un changement d'expression d'une fonction génère souvent une difficulté dans la détermination de ses dérivées première et seconde [29]. Constatant les difficultés liées aux changements d'expression, D'Alembert tire ainsi la conclusion suivante : *toute* fonction changeant d'expression doit être rejetée. On interpréterait aujourd'hui cette affirmation comme une généralisation

29 Précisons toutefois qu'en termes modernes, les situations envisagées correspondent à des problèmes d'existence de la dérivée plutôt qu'à des problèmes de discontinuité.

hâtive d'observations faites sur une série de cas particuliers. Soulignons toutefois qu'il est l'un des seuls à s'intéresser à ce type de problème local, avec, par ailleurs, des intuitions assez intéressantes du point de vue de l'histoire de la notion mathématique de continuité.

2°. L'autre motif relève de ce que D'Alembert estime être les fondements de l'Analyse, comme en témoigne cet extrait du Mémoire 1 des *Opuscules* :

> « J'ajoute qu'il est contre toutes les règles de l'analyse, de faire ainsi changer de forme, suivant le besoin qu'on croit en avoir, à l'intégrale d'une équation différentielle ». [D'Alembert 1761a, p. 32]

La crainte sous-jacente est que l'infraction à ces règles conduise à multiplier le nombre de solutions, là où le bon sens impose qu'il n'y en ait qu'une, ainsi que nous l'avons vu en 2.2. D'Alembert considère également que certaines de ces nouvelles solutions seraient des lois parfaitement arbitraires, les changements d'expression n'étant pas contrôlables.

Cependant, contrairement au préjugé répandu par certains de ses pairs [30], et malgré le nombre de pages écrites pour en défendre le bien-fondé, cette position de D'Alembert n'est pas figée dans le temps. Examinons donc ce qui nous semble correspondre, à partir de 1768, à la première étape d'une évolution de son point de vue sur la question.

La question de la propagation du son

En 1747, D'Alembert notait que l'équation des cordes vibrantes, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$, pouvait également représenter les vibrations longitudinales d'une colonne d'air et donc correspondre à l'équation de la propagation du son :

30 Dans son *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Jacques-Antoine-Joseph Cousin écrit en effet : « C'est encore M. Euler qui a dit le premier que rien ne devoit limiter la généralité des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales completes des équations aux différences partielles ; qu'on y devoit comprendre les fonctions irrégulieres et discontinues. M. d'Alembert a combattu cette idée tant qu'il a vécu ; il n'a jamais voulu reconnoître toute l'étendue des solutions qu'il avoit données lui-même dans ses *Réflexions sur la cause des vents*, dans son *Mémoire sur les Cordes vibrantes*, et dans l'*Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides* » [Cousin 1787, Discours préliminaire, p. xv].

« Si on supposoit que la corde fit des vibrations longitudinales de C vers A, au lieu de les faire perpendiculairement à sa longueur, alors imaginant que y fut l'espace décrit par un point quelconque, on auroit la même équation que ci-dessus [...] entre y & s. Par là on pourroit calculer la vitesse du son d'une maniére beaucoup plus génerale, qu'on ne l'a fait jusqu'ici ». [D'Alembert 1749b, p. 248]

Après que Lagrange [Lagrange 1759] s'est intéressé au problème, D'Alembert va mettre en pratique cette remarque dans le Mémoire 34 § II de ses *Opuscules*, intitulé « Sur la vitesse du son » [D'Alembert 1768f]. Désignant par $y(x,t)$ l'excursion longitudinale de la particule d'abscisse x à l'instant t, il reprend l'expression issue de « l'intégration » de l'équation [31] $\frac{d^2y}{dt^2} = k^2 \frac{d^2y}{dx^2}$:

$$y = \Phi(x+kt) + \Psi(x-kt),$$

et dispose, dans ce nouveau cadre d'étude, de l'équation complémentaire :

$$y(x,0) = 0.$$

La confrontation de ces deux relations le conduit dès lors aux équations :

$$y = \Phi(x+kt) - \Phi(x-kt)$$

et

$$\frac{dy}{dt} = k\Delta(x+kt) + k\Delta(x-kt),$$

dans laquelle Δ désigne la dérivée de la fonction Φ. La vitesse initiale de chaque particule d'abscisse x se trouve ainsi décrite par la fonction $2k\Delta(x)$, ce qui n'est pas sans lui poser de difficultés. Ce résultat doit effectivement s'accorder avec son appréhension physique du phénomène de propagation sonore, considéré comme une transmission d'oscillations entre particules d'air successives. Puisqu'une impulsion doit être donnée à une petite portion de la colonne d'air afin d'initier les vibrations, la fonction Δ présentera nécessairement le profil de la fig. 6 [32] (nous parlerions aujourd'hui d'une fonction à support compact).

Il s'en justifie ainsi :

31 Pour des raisons de lisibilité, nous prenons la liberté de poser $k = \frac{2a\lambda}{\theta}$, λ et a désignant respectivement la hauteur de la ligne d'air et l'espace parcouru dans le temps θ.

32 Il s'agit d'une reproduction de la fig. 27 de l'imprimé d'origine [D'Alembert 1768f].

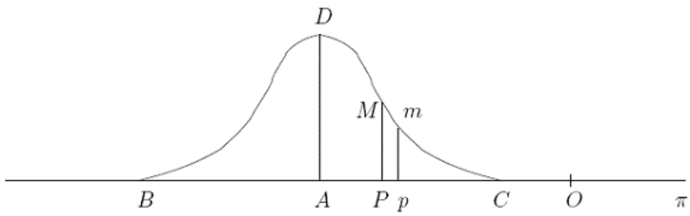

FIGURE 6. Profil de la fonction Δ à l'instant $t = 0$.

> « Cela posé, soit A le point de l'air qui a été mis en mouvement par le corps sonore, & supposons que l'agitation s'étende dans le premier instant jusqu'en B & C ; la courbe BDC, des vîtesses initiales, sera telle que faisant $AP = x$, $Pm = \frac{dy}{dt}$, on aura $PM = 2\Delta x$; ensorte que $\Delta(x)$ sera $= 0$, si $x > +AC$ ou $> -AB$. » [D'Alembert 1768f, p. 140]

Cette condition sur Δ le contraint toutefois à faire face à une situation délicate, résumée en ces termes :

> « En premier lieu, les mêmes difficultés que nous avons exposées ailleurs & dont il paroît qu'on a reconnu la solidité, prouvent que la courbe qui représente les vîtesses initiales, doit être telle que toutes ses branches soient assujetties à une même équation, & liées par la loi de continuité. Or c'est ce qui n'a point lieu ici ; car l'équation $u = 2\Delta x$, est telle que quand $x > AC$ ou $< -AB$, u est $= 0$; or il n'y a point de fonction algébrique qui puisse représenter cette condition ». [D'Alembert 1768f, p. 141]

C'est là une difficulté dont D'Alembert ne parvient pas à se défaire. Au terme du mémoire, il conclut ainsi sur une note passablement défaitiste :

> « On voit donc qu'en faisant même les suppositions les plus favorables au calcul, il ne paroît pas possible de réduire à des formules analytiques exactes les loix du mouvement des particules de l'air, ni par conséquent de rendre raison par ces formules de la propagation du son, telle que l'expérience nous l'a fait connoître ». [D'Alembert 1768f, p. 144–145]

Pour résumer, les restrictions raisonnables que lui imposait la permanence de la forme dans le problème des cordes vibrantes deviennent ici exorbitantes, parce qu'elles excluent les seules fonctions que le bon sens physique aurait toléré. D'Alembert en est ainsi réduit à renoncer momentanément à traiter le problème du son par le moyen de l'Analyse. Si cet état de fait l'incite à un certain pessimisme, il motive également de nouvelles réflexions, plus tardives, dont nous allons aborder la teneur.

Mais avant cela, il nous faut signaler une intervention notable de Condorcet dans ce débat. Dès la décennie 1760, ce dernier noue une relation étroite avec D'Alembert. Les deux savants effectuent d'ailleurs ensemble un voyage à Ferney et dans le Sud de la France du 16 septembre au 20 novembre 1770 afin de rendre visite à Voltaire [Lagrange 1882, p. 182–189] ; [Chouillet & Crépel 1994]. Dans les mois suivant leur retour à Paris, Condorcet présente deux écrits sur les EDP, parus dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences* pour les années 1770 et 1771 [Condorcet 1773 ; 1774]. Ces deux pièces s'inscrivent dans la lignée des recherches de Fontaine sur le calcul intégral et du Mémoire 26 des *Opuscules mathématiques* [D'Alembert 1768b], car Condorcet y considère l'EDP comme un objet d'étude mathématique, indépendamment de toute considération physique.

Cependant, dans sa seconde pièce datée de 1771, Condorcet consacre notamment une section à la question de la continuité des fonctions arbitraires [Condorcet 1774, p. 69–72], en faisant allusion à la polémique ayant impliqué D'Alembert. Quoique moins abouties que les travaux que son aîné produira quelques années plus tard, ses recherches insistent toutefois sur la nécessité d'un bon « raccord » entre des fonctions non soumises au critère de permanence de la forme. Il présente ainsi deux exemples de fonctions polynomiales par morceaux, dont il ajuste les coefficients afin que les valeurs des dérivées premières et seconde coïncident aux points de changement d'expression. Il parvient, dans ce cadre, à une conclusion qui ne laisse guère de doutes sur le fond de sa pensée :

> « On voit qu'il suffiroit ici que cette courbe fût composée de lignes qui courbes ou droites, se touchent, c'est-à-dire qu'elle fût continue quant à sa description & non quant à son équation analytique ». [Condorcet 1774, p. 71]

Même si notre sujet n'est pas ici de déterminer lequel des deux savants a influencé l'autre, cette phrase de Condorcet doit être mise en relation avec la position qui sera celle de D'Alembert sur la fin de sa vie et dont nous allons parler maintenant.

3.2. *L'évolution du point de vue de D'Alembert*

Les dernières réflexions de D'Alembert sur la nature des fonctions arbitraires révèlent effectivement une nette évolution de sa position sur le sujet. Le Mémoire 58 § VI de ses *Opuscules,* intitulé « Sur les fonctions discontinues » [D'Alembert 1780c], permet de s'en faire une première idée.

Dans cet écrit, D'Alembert envisage l'EDP $\frac{dz}{dx} + \frac{adz}{dy} = 0$ et l'expression issue de son intégration, $\Phi(ax - y)$, dans laquelle la fonction Φ change d'expression pour une certaine valeur[33] c vérifiant : $ax - y = c$. Ψ & Γ représentant respectivement les expressions de la dérivée première de Φ avant et après c, il remarque à l'article 9 :

> « Au reste, il y a des cas où la fonction, quoique discontinue, satisfait à l'équation $\left[\frac{dz}{dx} + \frac{adz}{dy} = 0\right]$. Par exemple, si lorsque $z = [c]$, les quantités Ψ & Γ étoient égales, alors la discontinuité de la fonction $\Phi(ax - y)$ ne l'empêcheroit pas de satisfaire à l'équation différentielle proposée ». [D'Alembert 1780c, p. 306]

Plus loin dans le mémoire [D'Alembert 1780c, p. 307], ce critère se trouve même généralisé au cas des fonctions arbitraires intervenant dans les EDP d'ordre n : les valeurs de leur différentielle à tout ordre, jusqu'à n, doivent selon lui coïncider aux points de changement d'expression.

Dans le tome IX de ses *Opuscules,* un imposant ensemble de manuscrits inédits, non publiés de son vivant, D'Alembert livre deux mémoires dans lesquels les réflexions précédentes sont appliquées aux problèmes des cordes vibrantes et de la propagation du son [D'Alembert 1781a ;b]. Dans le Mémoire 59 § VII, intitulé « Sur les cordes vibrantes », il donne ainsi l'exemple d'une fonction « discontinue » polynomiale par morceaux solution du problème [D'Alembert 1781b, f. 275]. Dans le Mémoire 59 § VI, « Sur la vîtesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et des problèmes semblables », il reformule le critère évoqué ci-dessus, portant sur les fonctions « discontinues » admissibles dans la résolution d'une EDP d'ordre n [D'Alembert 1781a, f. 105]. Grâce à ces nouvelles fonctions, il obtient ainsi des solutions

33 Pour des raisons de lisibilité, nous modifions ici les notations originales de D'Alembert.

au problème, ceci lui permettant d'achever ses recherches sur la propagation du son sur une note plus optimiste qu'en 1768 [D'Alembert 1768f]. Précisons d'ailleurs que cette évolution de pensée sur le sujet se retrouve également dans quelques-uns de ses textes les plus tardifs consacrés aux questions de l'équilibre, du mouvement et de la résistance des fluides. Dans deux des trois appendices portant sur le Mémoire 57 § VII [D'Alembert 1780b, p. 372–374], D'Alembert envisage des écoulements dans des vases dont la paroi s'exprime à l'aide d'une fonction changeant d'expression. Il se lance également dans une réécriture des EDP gouvernant les écoulements. Dans le Mémoire 56 § I [D'Alembert 1780a, p. 9–16], ainsi que dans le Mémoire 59 § VII [D'Alembert 1781b, f. 308–313] [34], il envisage cette fois-ci des fonctions « discontinues » dans le cadre du problème de l'équilibre des fluides, en supposant le fluide partagé en deux par une cloison solide d'épaisseur nulle détruite à l'instant initial.

Ces derniers travaux font donc état d'une considérable évolution de son approche vis-à-vis de la notion de fonction. Mais, ce n'est pas pour autant un ralliement à la position défendue par Euler, car D'Alembert continue à exiger l'absence de sauts de courbure, même s'il a renoncé à la permanence de la forme. La combinaison de ces deux aspects fait que son point de vue est assez proche de la notion moderne de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

Ce changement de position de D'Alembert reste ignoré par la plupart des historiens versés dans la discipline. Youschkevitch [Youschkevitch 1975] ; [Youschkevitch 1981, p. 50] l'avait certes remarqué, mais il en a minimisé à tort la portée en omettant que le savant maintient son opposition aux sauts de courbure. De plus, il faut ajouter qu'un géomètre éminent de la génération suivante, Laplace, échangeait encore en 1782 avec D'Alembert à propos des fonctions et des cordes vibrantes, comme en témoigne la lettre qu'il lui adresse le 10 mars [Laplace 1912, p. 351–354]. Dans son « Mémoire sur les suites », il développe d'ailleurs un point vue similaire à la position tardive de son aîné, en déclarant que :

34 Bien que cet écrit soit principalement dédié à la poursuite de ses recherches sur le problème des cordes vibrantes, D'Alembert consacre cependant quelques pages à la question de la « discontinuité » des fonctions dans le cas de l'équilibre des fluides.

« la loi de continuité ne paroît nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les constructions géométriques qui représentent ces intégrales ; il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre n, & que l'on nomme u sa variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $\left(\frac{\delta^{n-r}u}{\delta x^s \delta t^{n-r-s}}\right)$ ». [Laplace 1782, p. 300]

En dépit de tenaces préjugés, l'œuvre tardive de D'Alembert présente donc un intérêt indéniable. Ses dernières recherches continuent d'être pertinentes et influentes à de nombreux points de vue.

Cette étude partielle du débat sur la nature des fonctions arbitraires nous a finalement permis de montrer comment la démarche de D'Alembert vis-à-vis des EDP, fortement ancrée dans un cadre physico-mathématique, a pu avoir des répercussions en dehors du seul calcul aux différences partielles. La polémique en question va d'ailleurs se poursuivre après sa mort. À ce propos, nous renvoyons le lecteur à l'étude de H. Burkhardt où ce dernier donne un aperçu des travaux sur le sujet de Lagrange, Laplace, Arbogast, Monge et quelques autres, des années 1780 jusqu'au début du XIX^e siècle [Burkhardt 1908, p. 43–47].

Dans la seconde phase de sa production scientifique, D'Alembert devient un personnage important pour une nouvelle génération de savants. Il entretient notamment une étroite relation avec Condorcet, une correspondance active avec Lagrange et se trouve au centre d'un univers d'une dizaine de géomètres de renom, dont Monge et Laplace. Nous aurions pu aborder, dans un registre un peu différent mais concernant toujours les EDP, l'influence du Mémoire 26 de ses *Opuscules* [D'Alembert 1768b] sur ce cercle de savants dans les années 1770. Parallèlement aux recherches d'Euler en la matière dans le 3^e volume de ses *Institutions du calcul intégral* [Euler 1770] et à celles de Lagrange dans le tome II des *Mélanges de Turin* [Lagrange 1762], ce mémoire amorce un tournant vers une étude mathématique de l'objet EDP, indépendante de toute considération d'ordre physique. Il s'agit d'une autre facette de la contribution de D'Alembert dont nous tenions également à souligner l'importance [35]. Dans la droite

35 Voir [Jouve 2008].

ligne de cet écrit, Laplace et Lagrange, à l'instar de Condorcet dont nous avons évoqué les mémoires [Condorcet 1773 ; 1774], s'attaquent à l'intégration des EDP et dégagent des méthodes et des résultats remarquables. Monge, quant à lui, opte pour une approche plus géométrique [Monge 1776a ;b], celle-ci lui permettant d'être moins soucieux que ses contemporains des changements de forme algébrique. Signalons enfin que Condorcet, Monge et Laplace sont les auteurs des premières tentatives de dénombrement des fonctions arbitraires.

BIBLIOGRAPHIE PRIMAIRE

Sources manuscrites

D'Alembert (Jean Le Rond)

[1755] Observations sur deux mémoires de MM. Euler et Daniel Bernoulli insérés dans les Mémoires de 1753, 1755 ; Mss I-M6 et I-M7, Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften.

[1772] Registres Manuscrits de l'Académie des Sciences, *Archives de l'Académie des science de Paris*, 1772 ; f. 7–10.

[1781a] Mémoire 59 § VI : Sur la vitesse du son et à cette occasion sur l'usage des fonctions discontinues dans la solution de ce problème et de problèmes semblables, *Opuscules mathématiques*, 1781 ; tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 95–160.

[1781b] Mémoire 59 § VII : Sur les cordes vibrantes, *Opuscules mathématiques*, 1781 ; tome inédit, Ms 1790 de la Bibliothèque de l'Institut (Paris), f. 271–334.

Sources imprimées[36]

Bernoulli (Daniel)

[1738] *Hydrodynamica, sive De Viribus et Motibus Fluidorum Commentative*, Strasbourg, 1738.

[1755a] Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les Mémoires de l'Académie de 1747 & 1748, *HAB*, 1755, p. 147–172.

36 Nous utiliserons ici les abréviations suivantes : *HAB* pour *Histoire de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin*, *MARS* pour *Mémoires de l'Académie royale des sciences* et *NMAB* pour *Nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences et belles-lettres de Berlin.*

[1755b] Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps, *HAB*, 1755, p. 173–195.

Bernoulli (Jean)

[1742] Hydraulica nunc primum detecta ac demonstrata directe ex fundamentia pure mechanicis. Anno 1732, *Opera omnia*, 4 (1742) ; Lausanne et Genève, p. 387–493.

Clairaut (Alexis-Claude)

[1741a] Recherches générales sur le calcul intégral, *MARS* (1739), 1741, p. 425–436.

[1741b] Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre, *MARS* (1740), 1741, p. 293–323.

[1743] *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743.

Condorcet (Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, marquis de)

[1765] *Du calcul intégral*, Paris, 1765.

[1773] Mémoire sur les équations aux différences partielles, *MARS* (1770), 1773, p. 151–178.

[1774] Sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, *MARS* (1771), 1774, p. 49–74.

[1785] Partielles, équations aux différences partielles, dans *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, vol. II, Paris, 1785, p. 526–529.

Cousin (Jacques-Antoine-Joseph)

[1787] *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Paris : Didot l'aîné, 1787.

D'Alembert (Jean Le Rond)

[1743] *Traité de dynamique*, Paris, 1re édition, 1743.

[1744] *Traité des fluides*, Paris, 1re édition, 1744.

[1747] *Réflexions sur la cause générale des vents*, Paris, 1747.

[1749a] Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration, *HAB* (1747), 1749, p. 214–219.

[1749b] Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration : Suite, *HAB* (1747), 1749, p. 220–249.

[1751–1765] *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences des arts et des métiers*, 1751–1765 ; t. I-VII, Paris ; t. VIII-XVII, Neufschastel.

[1752a] Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration, *HAB* (1750), 1752, p. 355–360.

[1752b] *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris, 1752.

[1756] *Recherches sur différens points importans du système du monde*, vol. III [les deux premiers tomes paraissent en 1754], 1756.

[1758] *Traité de dynamique*, Paris, 2e édition, 1758.

[1761a] Mémoire 1 : Recherches sur les vibrations des cordes sonores, *Opuscules mathématiques*, I (1761), p. 1–64.

[1761b] Mémoire 4 : Réflexions sur les Loix du mouvement des fluides, *Opuscules mathématiques*, I (1761), p. 137–168.

[1766] Extrait de différentes lettres de M. D'Alembert à M. De la Grange écrites pendant les années 1764 & 1765, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin* pour les années 1762–1765, III (1766), p. 381–396.

[1767] Sur les tautochrones, *HAB* (1765), 1767, p. 381–413.

[1768a] Mémoire 25 : Nouvelles réflexions sur les vibrations des Cordes sonores, *Opuscules mathématiques*, IV (1768), p. 128–224.

[1768b] Mémoire 26 : Recherches de Calcul intégral, *Opuscules mathématiques*, VI (1768), p. 225–253.

[1768c] Mémoire 30 : Sur l'Équilibre des Fluides, *Opuscules mathématiques*, V (1768), p. 1–40.

[1768d] Mémoire 31 : Nouvelles réflexions sur les Loix du mouvement des Fluides, *Opuscules mathématiques*, V (1768), p. 41–67.

[1768e] Mémoire 33 : Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides, *Opuscules mathématiques*, V (1768), p. 95–131.

[1768f] Mémoire 34 § II : Sur la Vitesse du Son, *Opuscules mathématiques*, V (1768), p. 138–146.

[1770] Extrait de différentes Lettres de Mr. d'Alembert à Mr. de la Grange, *HAB* (1763), 1770, p. 235–277.

[*Sup. Panck.*] *Supplément à l'Encyclopédie*, vol. I–IV, Paris : Panckoucke, 1776–1777.

[1780a] Mémoire 56 § I : Nouvelles réflexions sur les loix de l'équilibre des fluides, *Opuscules mathématiques*, VIII (1780), p. 1–35.

[1780b] Mémoire 57 : Nouvelles Recherches sur le mouvement des Fluides dans des Vases, *Opuscules mathématiques*, VIII (1780), p. 52–230 ; avec des appendices, p. 365–387.

[1780c] Mémoire 58 § VI : Sur les Fonctions discontinues, *Opuscules mathématiques*, VIII (1780), p. 302–308.

[1780d] Mémoire 58 § XII : Additions aux Recherches sur la Cause des Vents, *Opuscules mathématiques*, VIII (1780), p. 327–353.

[*Encycl. Meth.*] Cordes (vibration des), dans *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, vol. I, Paris, 1784 ; II, Paris, 1786.

EULER (Leonhard)

[1740a] De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis, *Mémoire de l'Académie des Sciences de Pétersbourg*, 7 (1734), 1740, p. 174–183.

[1740b] Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis, *Mémoire de l'Académie des Sciences de Pétersbourg*, 7 (1734), 1740, p. 184–200.

[1750] Sur la vibration des cordes, *HAB* (1748), 1750, p. 69–85.

[1755] Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli, *HAB* (1753), 1755, p. 196–222.

[1770] *Institutionum calculi integralis volumen tertium, in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium, ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur,* Saint-Pétersbourg, 1770.

LAGRANGE (Joseph-Louis)

[1759] Recherches sur la nature, et la propagation du son, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin,* I (1759), p. 1–112.

[1762] Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin,* II (1762), p. 11–172.

[1766] Solution de différents Problèmes de calcul intégral, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin* pour les années 1762–1765, III (1766), p. 179–380.

[1775] Sur l'intégration des équations à différences partielles du 1er ordre, *NMAB* (1772), 1775, p. 353–372.

[1882] *Œuvres complètes*, vol. XIII, Paris, 1882.

[1892] *Œuvres complètes*, vol. XIV, Paris, 1892.

LAPLACE (Pierre-Simon de)

[1777] Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles, *MARS* (1773), 1777, p. 341–402.

[1778] Recherches sur plusieurs points du Système du Monde, *MARS* (1775), 1778, p. 75–182.

[1782] Mémoire sur les suites, *MARS* (1779), 1782, p. 207–309.

[1912] *Œuvres complètes*, vol. XIV, Paris, 1912.

MONGE (Gaspard)

[1776a] Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées,* VII (1773), 1776, p. 267–300.

[1776b] Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles, *Mémoires de Mathématiques et de Physique présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans & lus dans ses Assemblées,* VII (1773), 1776, p. 305–327.

RIEMANN (Bernhard)
[1898] Sur la propagation d'ondes atmosphériques planes ayant une amplitude de vibration finie, dans *Œuvres Mathématiques*, 1898, p. 177–206.

BIBLIOGRAPHIE SECONDAIRE

BURKHARDT (Heinrich)
[1908] Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Erster Hauptteil : Die Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen und astronomischen Problemen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, X-2 (1908), p. 1–894.

CHÊNE (Julien)
[2004] *Le son dans les Opuscules mathématiques de D'Alembert*, Mémoire de DEA « Construction des Savoirs Scientifiques », Université Lyon 1, 2004.

CHOUILLET (Anne-Marie) & CRÉPEL (Pierre)
[1994] Un voyage d'Italie manqué ou trois encyclopédistes réunis, *Recherche sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, 17 (1994), p. 9–53.

DEMIDOV (Serge S.)
[1982] Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de J. D'Alembert, *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXV/1 (1982), p. 3–42.

[1989] D'Alembert et la naissance de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles, dans *Jean D'Alembert, savant et philosophe : Portrait à plusieurs voix. Actes du Colloque organisé par le Centre International de Synthèse les 15–18 juin 1983*, Paris, 1989, p. 333–350.

DHOMBRES (Jean)
[2004] Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, *Archive for History of Exact sciences*, 36 (1986), 2004, p. 91–181.

ENGELSMAN (Steven)
[1984a] Family of Curves and the Origin of Partial Differentiation, *North-Holland Mathematics Studies*, 93 (1984).

[1984b] D'Alembert et les équations aux dérivées partielles, *Dix-huitième siècle*, 16 (1984), p. 27–37.

GILAIN (Christian)

[1988] Condorcet et le calcul intégral, dans Rashed (R.), éd., *Sciences à l'époque de la Révolution française – Recherches historiques*, Paris, 1988, p. 85–147.

[1993] Condorcet, les mathématiques et le Supplément à l'Encyclopédie, *Lekton*, III-1 (1993), p. 79–92 (publication de l'Université du Québec à Montréal).

GREENBERG (John L.)

[1995] *The Problem of the Earth's Shape from Newton to Clairaut – The rise of mathematical science in eighteenth-century Paris and the fall of "normal science"*, Cambridge Univ. Press, 1995.

GRIMBERG (Gérard-Émile)

[1998] *D'Alembert et les équations aux dérivées partielles en hydrodynamique*, Thèse, Université Paris 7, 1998.

GUILBAUD (Alexandre)

[2007] *L'hydrodynamique dans l'œuvre tardive de D'Alembert 1766–1783 : histoire et analyse détaillée des concepts pour l'édition critique et commentée de ses Œuvres complètes et leur édition électronique*, Thèse, Université Lyon 1, 2007.

HOUZEL (Christian)

[2003] Les équations aux dérivées partielles : 1740–1780, dans *Analyse et dynamique, étude sur l'œuvre de D'Alembert*, Presses de l'Université Laval, 2003, p. 237–258.

JOUVE (Guillaume)

[2007] *Les cordes vibrantes dans l'œuvre tardive de D'Alembert 1760–1783*, Thèse, Université Lyon 1, 2007.

[2008] Le rôle de D'Alembert dans les premiers pas d'une étude programmatique des équations aux dérivées partielles (1760–1783), *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, XXVIII (2008).

LAVRENTIEV (Mikhail) & CHABAT (Boris)

[1952] *Méthodes de la theorie des fonctions d'une variable complexe*, Moscou : Éditions Mir, 1952.

LÜTZEN (Jesper)

[1994] Partial differential equations, dans *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London, Routledge : I. Grattan-Guiness, 1994, p. 452–469.

PASSERON (Irène)
[1994] *Clairaut et la Figure de la Terre au XVIIIe siècle - Cristallisation d'un nouveau style autour d'une pratique physico-mathématique*, Thèse, Université Paris 7, 1994.

RAVETZ (Jerome R.)
[1987] Vibrating strings and arbitrary fonctions, dans *The Logic of personal knowledge, essays presented to Michael Polanyi on his seventieth birthday, 11th March 1961*, London, 1987, p. 71–88.

SZABÓ (István)
[1987] *Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen*, Birkhäuser, 1987.

TATON (René)
[1947] Une correspondance mathématique inédite de Monge, *Revue Scientifique*, 85 (1947), p. 963–989.
[1951] *L'Œuvre scientifique de Monge*, Paris : PUF, 1951.

TRUESDELL (Clifford)
[1954] Editor's Introduction : Rational fluid mechanics, 1687–1765, dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. II/12, Zürich, 1954, p. vii–cxxv.
[1955] Editor's Introduction, dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. II/13, Zürich, 1955, p. ix–cxviii.
[1960] The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638–1788, dans *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, vol. II/11, Zürich, 1960.

VERLEY (Jean-Luc)
[1986] Les fonctions analytiques, dans Dieudonné (Jean), éd., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, Hermann, 1986, p. 129–163.

YOUSCHKEVITCH (Adolf P.)
[1981] Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle, dans *Fragment d'histoire des mathématiques*, 1981, p. 7–68.
[1975] À propos de l'histoire du débat sur les cordes vibrantes (D'Alembert et l'utilisation des fonctions « discontinues »), *Istoriko-matematitcheskie Issledovania*, 20 (1975), p. 221–231.

Inventaire des équations aux dérivées partielles dans l'œuvre de D'Alembert

Remarque : Concernant la localisation des EDP dans les traités, mémoires ou manuscrits cités dans cet inventaire, l'absence d'un numéro de paragraphe, d'article ou de page indique que l'EDP apparaît dans l'ensemble de l'écrit concerné. Notons également que les EDP apparaissant dans le *Supplément à l'Encyclopédie* [*Sup. Panck.*] apparaissent aussi dans l'*Encyclopédie méthodique. Mathématique* [*Encycl. Meth.*].

<table>
<tr><th>EDP</th><th>Traité, mémoire ou manuscrit</th><th>Type (en termes modernes)</th></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Problème du fil pesant</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{ds} - (l-s)\,\frac{d^2y}{ds^2}$, ou
$\frac{dp}{dt} = q - (l-s)\,\frac{dq}{ds}$ avec $dy = pdt + qds$</td><td>[1743, art. 110]
[1758, art. 133]</td><td>Linéaires à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation représentant la vibration d'une corde uniformément pesante suspendue par l'une de ces extrémités. Il s'agit d'une généralisation du problème du pendule composé : la corde est composée d'une infinité de masses infinitésimales reliées entre elles par des fils de longueur infinitésimale.
y, s, l, et t représentent respectivement l'ordonnée verticale de la corde, l'abscisse curviligne, la longueur totale de la corde, et le temps écoulé depuis le commencement du mouvement.
Dans la 1re édition du Traité de dynamique [1743], D'Alembert se contente d'établir l'équation (c'est d'ailleurs la 1re de ses EDP). Il s'attache à sa résolution dans la 2e édition [1758].</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Réflexions sur la cause générale des vents</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = \frac{d\beta}{ds} \\ \nu\frac{d\beta}{du} = \rho\,\frac{d\alpha}{ds} + \Phi(u,s) \end{cases}$
où $\Phi(u,s) = \frac{dA(u,s)}{ds} - \frac{d\Gamma(u,s)}{du}$</td><td>[1747, art. 87]</td><td>Linéaire à coefficients constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Les inconnues sont les fonctions α et β, $\Phi(u,s)$ étant fixée. Le présent système peut être écrit sous la forme d'une unique EDP :
$$\nu\frac{d^2z}{du^2} - \rho\,\frac{d^2z}{ds^2} = \Phi(u,s).$$</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} \frac{d\alpha}{du} = \frac{d\beta}{ds} \\ \rho\,\frac{d\alpha}{ds} + p\frac{d\beta}{ds} = \gamma\,\frac{d\beta}{du} + m\,\frac{d\alpha}{du} + \Phi(u,s) \end{cases}$</td><td>[1747, art. 89]</td><td>Linéaire à coefficients constants</td></tr>
</table>

Mêmes inconnues, et même donnée $\Phi(u,s)$ qu'à la ligne précédente. Le système se ramène dans ce cas à l'EDP :

$$\nu\frac{d^2z}{du^2}+(m-p)\frac{d^2z}{duds}-\rho\frac{d^2z}{ds^2}+\Phi(u,s)=0.$$

De nombreuses autres EDP apparaissent dans cet ouvrage [1747]. Nous n'en donnons pas ici la liste exhaustive, ces équations constituant des cas particuliers des deux EDP présentées ci-contre.

$\frac{d^2q}{ds^2}+b\frac{d^2q}{dt^2}+e\frac{dq}{dt}+a+TS+T'S'=0$	[1780d, § XII, art. 51]	Linéaire à coefficients constants

L'inconnue est $q(s,t)$. b, e, a sont des constantes, et T, S, T', S' des fonctions données de t et de s.

Cordes vibrantes et propagation du son

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$ ou $\frac{1}{c^2}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$	[1749a] [1749b] [1752a] [1755] (ms) [1770] [1761a] [1768a] [1768f] [1781a] (ms) [1781b] (ms) [*Sup. Panck.*, tome I, art. « Cordes (vibration des) »]	Equation des ondes. Linéaire à coefficients constants, hyperbolique

Équation initialement présentée comme étant celle des cordes vibrantes, et utilisée dans les *Opuscules mathématiques* pour représenter la propagation du son dans un tube. $y(x,t)$ représente l'ordonnée du point sur la corde ou l'amplitude des vibrations à l'abscisse x et à l'instant t. D'Alembert pratique une résolution explicite dans les deux cas.

$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{X(x)}\frac{d^2y}{dx^2}$	[1761a, art. III]	Linéaire à coefficients non constants

Cordes vibrantes à épaisseur variable $X(x)$. D'Alembert en propose une solution sous forme de séries de fonctions.

<table>
<tr><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2y}{dx^2}$
et
$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{X(x)}\frac{d^2y}{dx^2}$</td><td>[1761a, art. IV]</td><td>Linéaires elliptiques.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Lame vibrante. La résolution est inspirée de celle de l'équation des ondes.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^ny}{dt^2dx^{n-2}} = \frac{d^ny}{dx^n}$</td><td>[1768a, 2e suppl., art. 19 et suiv.]</td><td>Linéaire à coefficients constants.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation déduite de l'équation des ondes.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - R\frac{dy}{dt}$</td><td>[1768a, 3e suppl., art. 3-6]</td><td>Linéaire à coefficients constants, hyperbolique</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation envisagée pour expliquer la cessation des vibrations (cette tentative sera d'ailleurs un échec). D'Alembert en recherche les solutions sous la forme de série de fonctions $T(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)$.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - 2\xi(x)$</td><td>[1768a, 3e suppl., art. 13 et suiv.]</td><td>Linéaire à coefficients constants, hyperbolique</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation envisagée pour expliquer la cessation des vibrations. Elle permet d'atteindre cet objectif selon D'Alembert, qui en recherche des solutions explicites.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Mouvement et résistance des fluides</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} \frac{dp}{dz}(x,z) = -\frac{dq}{dx}(x,z) - \frac{p}{z} \\ \frac{dp}{dx}(x,z) = \frac{dq}{dz}(x,z) \end{cases}$</td><td>[1752b]</td><td>Linéaire à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Système d'équations représentant l'écoulement potentiel (c'est-à-dire un écoulement dont la vitesse dérive d'un potentiel) stationnaire d'un fluide incompressible animé d'une vitesse constante à l'infini autour d'un solide de révolution immobile. $p(x,z)$ et $q(x,z)$ correspondent respectivement aux composantes axiale (suivant x) et radiale (suivant z) de la vitesse.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>$\begin{cases} \frac{dp}{dz}(x,z) = -\frac{dq}{dx}(x,z) \\ \frac{dp}{dx}(x,z) = \frac{dq}{dz}(x,z) \end{cases}$</td>
<td>[1752b]
[1761b]
[Encyc., art. « Hydrodynamique »]
[1768d]
[1768e]
[1780b, § VII, art. 14 ; appendice, p. 373]
[Sup. Panck., tome II, art. « Hydrodynamique »]</td>
<td>Linéaire à coefficients constants</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Système d'équations représentant l'écoulement plan potentiel d'un fluide incompressible dans un vase ouvert en ses deux extrémités. Les fonctions $p(x,z)$ et $q(x,z)$ résultent de la séparation des variables spatiales et temporelle au sein, respectivement, des composantes horizontale (suivant z) et verticale (suivant x) $P(t,x,z)$ et $Q(t,x,z)$ de la vitesse, de telle sorte que :
$$\begin{cases} P(t,x,z) = \theta(t)p(x,z), \\ Q(t,x,z) = \theta(t)q(x,z). \end{cases}$$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} \frac{dp}{dz}(x,z) = -\frac{dq}{dx}(x,z) \\ \frac{d}{dz}\left(q\frac{dq}{dx} + p\frac{dq}{dz}\right) = \frac{d}{dx}\left(q\frac{dp}{dx} + p\frac{dp}{dz}\right) \end{cases}$</td>
<td>[1761b, art. XII-XIII]</td>
<td>Non linéaire</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Système d'équations représentant l'écoulement plan d'un fluide incompressible soumis à un champs de force conservatif dans un vase ouvert en ses deux extrémités (le système d'équations précédent en constitue un cas particulier). Les fonctions $p(x,z)$ et $q(x,z)$ ont la même signification que dans le cas précédent.</td>
</tr>
<tr>
<td>$-\frac{d^3\omega}{dx^3}\frac{d\omega}{dz} + \frac{d^3\omega}{dx^2dz}\frac{d\omega}{dx} + \frac{d^3\omega}{dz^3}\frac{d\omega}{dx} - \frac{d^3\omega}{dz^2dx}\frac{d\omega}{dz} = 0$</td>
<td>[1761b, § XII]</td>
<td>Non linéaire</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Cette équation équivaut au système précédent. Elle fait intervenir ce que nous appelons aujourd'hui la fonction courant ω, découverte par D'Alembert dans ce mémoire et définie par les deux relations $p(x,z) = \frac{d\omega}{dx}$ et $q(x,z) = -\frac{d\omega}{dz}$.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{d^2\omega}{dx^2} + \frac{d^2\omega}{dz^2} = 0$</td>
<td>[1768d, § II, art. 6]</td>
<td>Linéaire à coefficients constants</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Équation d'annulation du Laplacien de la fonction courant ω relative à l'écoulement plan potentiel d'un fluide incompressible dans un vase ouvert en ses deux extrémités.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Équilibre des fluides</td></tr>
<tr><td>$\frac{dQ}{dx} = \frac{dR}{dy}$
ou
$\frac{d(\delta Q)}{dx} = \frac{d(\delta R)}{dy}$</td><td>[1752b, art. 19, art. 161 et suiv.]
[1768c, art. 21-42]
[1780a]</td><td>Linéaire à coefficients constants.
Linéaire à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Condition d'équilibre d'un fluide incompressible dans le cas de la 1^{re} équation, compressible de densité δ dans le cas de la 2^e, soumis à une force de composantes R et Q suivant les directions x et y, respectivement. La 1^{re} équation est découverte par Clairaut dans Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique, Paris 1743. La 2^e l'est par D'Alembert [1752b, art. 19 et 161].</td></tr>
<tr><td>$\frac{dQ}{dx} - \frac{dR}{dy} + \frac{RdQ}{d\zeta} - \frac{QdR}{d\zeta} = 0$</td><td>[1752b, art. 164]
[1780a, art. 34]</td><td>Linéaire à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">D'Alembert examine le problème de la figure de la Terre, en supposant cette dernière comme étant composée d'un ensemble de couches concentriques (appelées « couches de niveau ») de fluide en équilibre. Cette EDP représente la condition d'équilibre d'un fluide incompressible ($\delta =$ cste), dans l'hypothèse où toutes les couches possèdent la même densité δ. Les composantes R et Q suivant x et y (voir ligne supra) dépendent ici d'une troisième variable ζ, constante pour chaque couche, mais variant d'une couche de fluide à une autre.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d\delta}{dr} \cdot \frac{KdN}{dz} - \frac{d(Mr\delta)}{dr} = \frac{\delta d\Delta}{dz}$</td><td>[1768c, art. 14]</td><td>Non linéaire</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cette EDP correspond à l'équation nécessaire pour l'équilibre des couches, repérées en coordonnées cylindriques par le rayon r et l'angle z (la densité δ est supposée constante dans chaque couche, mais variable d'une couche à une autre). Les inconnues K, M, N et Δ correspondent à des fonctions de r et de z : elles forment les expressions des composantes radiale et normale de la force s'appliquant sur chaque élément de fluide.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d\delta}{dr} \cdot \frac{KdN}{dz} - \frac{d(Mr\delta)}{dr} = \frac{d(\Delta\delta)}{dz} + \frac{d\delta}{dz} \cdot \frac{d(KN)}{dr}$</td><td>[1768c, art. 17]</td><td>Non linéaire</td></tr>
<tr><td colspan="3">Même équation que la ligne précédente, dans le cas où la densité δ est également supposée varier à l'intérieur de chaque couche de fluide.</td></tr>
<tr><td>$\frac{dR}{dy} + \frac{\theta dR}{dz} = \frac{dQ}{dx} + \frac{\omega dQ}{dz}$
avec $dz = \theta dy + \omega dx$</td><td>[1780a, art. 31]</td><td>Linéaire à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">La situation est la même que deux lignes supra, si ce n'est que la troisième variable z (équivalente à ζ) est ici supposée vérifier $dz = \theta dy + \omega dx$.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Mémoires purement mathématiques</td></tr>
<tr><td>$M\frac{d^2q}{dxdt} + N\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{d^2q}{dx^2} = 0$</td><td>[1768b, art. 6]</td><td>Linéaire à coefficients constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation, d'inconnue $q(x,t)$, rencontrée en tentant de rendre deux différentielles complètes. Dans ce mémoire [1768b] dédié à l'étude des EDP sous un angle exclusivement mathématique, D'Alembert expose essentiellement des méthodes permettant de passer d'une forme différentielle complète à une EDP du 1er ordre.
Il n'y donne pas de solutions explicites, quoiqu'il s'intéresse ponctuellement à l'existence de solutions et à leur nombre. Lorsqu'il amorce une résolution, c'est par la méthode de séparation des variables.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^3q}{dx^3} + F\frac{d^3q}{dxdt^2} + G\frac{d^3q}{dx^2dt} + H\frac{d^3q}{dt^3} = 0$</td><td>[1768b, art. 7]</td><td>Linéaire à coefficients constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">L'inconnue est $q(x,t)$.</td></tr>
<tr><td>$\frac{dq}{dx} + \xi(x,z)\frac{dq}{dz} = 0$
et
$\frac{dq}{dx} + \xi(x,z)\frac{dq}{dz} + \omega(x,z) = 0$</td><td>[1768b, art. 8, 18, et 21]</td><td>Linéaire à coefficients non constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">L'inconnue est $q(x,t)$.</td></tr>
<tr><td>$\frac{dq}{dx} + A\frac{dq}{dt} + Cq = 0$</td><td>[1768b, art. 17]</td><td>Linéaire à coefficients constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation d'inconnue $q(x,t)$, également envisagée avec des coefficients non constants à l'art. 22.</td></tr>
<tr><td>$\frac{d^2q}{dx^2} + \xi(x,t)\frac{dq}{dx} + \zeta(x,t)\frac{dq}{dt} + k(x,t)\frac{d^2q}{dt^2} + \lambda(x,t)q = 0$</td><td>[1768b, art. 25 et suiv.]</td><td>Linéaire, étude de cas particuliers dont coefficients constants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Équation d'inconnue $q(x,t)$. D'Alembert en aborde la résolution par la méthode de séparation des variables. Il lui rajoute un second membre à partir de l'art. 30.</td></tr>
<tr><td>$\frac{dz}{dx} + a\frac{dz}{dy} = 0$</td><td>[1780c]</td><td>Equation d'advection. Linéaire à coefficients constants</td></tr>
</table>

Équation d'inconnue $z(x,y)$. Ce mémoire [1780c] rassemble des réflexions sur les fonctions « discontinues ».

Recherche de la courbe tautochrone		
$p\mu + \frac{dp}{dx} + \frac{u\nu dp}{du} + \rho = 0$	[1767]	Non linéaire
Nous ne faisons figurer que la principale EDP de ce mémoire. Les autres EDP en découlent et restent du premier ordre. x représente la distance à parcourir, u la vitesse et p la force accélératrice.		