

LES 'RECHERCHES SUR LES RENTES' DE DUVILLARD (1787) ET LE TAUX INTERNE DE RENTABILITÉ

Yuri BIONDI (*)

RÉSUMÉ. — Cet article étudie un ouvrage dont l'intérêt a été sous-estimé : les *Recherches sur les rentes* (Paris et Genève 1787) de Duvillard (1755–1832). Son auteur a développé, il y a plus de deux siècles, une technique financière originale analogue à l'actuel «taux interne de rentabilité» (un critère pour les choix d'investissements, fondé sur l'actualisation) et il l'a appliquée à l'évaluation des rentes viagères lors de la crise qui a précédé la Révolution française. Il a utilisé à cet effet des méthodes mathématiques simples, mais intéressantes alliant les calculs analytiques et les représentations graphiques, dégageant ainsi l'existence d'une durée et d'une valeur maximales de rendement.

Afin d'apprécier la contribution théorique de Duvillard, nous donnons aussi un bref aperçu de la seconde élaboration du taux interne de rentabilité dans les années 1950–1960; des notions aujourd'hui classiques, telles que la «préférence inter-temporelle», les «techniques d'actualisation», «le problème du réinvestissement», peuvent être ainsi réinterrogés, dans une perspective comparative.

ABSTRACT. — DUVILLARD'S "RECHERCHES SUR LES RENTES" (1787) AND THE MODIFIED INTERNAL RATE OF RETURN. — This article focuses on the

(*) Texte reçu le 30 janvier 2002, révisé le 23 novembre 2003.

Remerciements : ma gratitude s'adresse d'abord à Pierre Crépel qui, par son cours de DEA, puis par son appui moral et matériel, a permis le développement de cette recherche. Je dois remercier en outre Guy Thuillier, Paola Tubaro, Nicolas Leboisne, Didier Rullière et Mireille Lapoire, qui m'ont donné leurs conseils et des suggestions précieuses. Enfin, les réviseurs anonymes et la rédaction de la RHM, qui ont accompli un travail remarquable de relecture critique, permettant de développer et améliorer la forme et le contenu de l'article. Cette recherche a été présentée au *Séminaire d'histoire du calcul des probabilités et de la statistique de l'EHESS* (Paris), le 7 décembre 2001. Y. BIONDI, Centre Auguste et Léon Walras – ISH Université Lumière Lyon 2, 14 avenue Berthelot, 69363 Lyon CEDEX 07 (France).

Courrier électronique : yuri.biondi@etu.univ-lyon2.fr

Mots clés : taux interne de rentabilité, histoire de l'économie financière, histoire des mathématiques financières, escompte, actualisation

Classification AMS : 01A50, 91B28

neglected contribution of Duvillard (1755-1832), especially on his *Recherches sur les rentes* (Paris and Geneva 1787). More than two centuries ago, Duvillard developed with creativity a financial measure technically analogous to the Modified Internal Rate of Return (an investment decision, discounting-based criterion) and applied it to the calculation of the life annuities during the period of crisis which preceded the French Revolution. He used simple but interesting mathematical methods that united the calculus with graphical representations, in order to obtain the existence of a maximum for the duration and value of return. In order to assess Duvillard's theoretical contribution, we also take a brief look at the calculation of the modified internal rate of return developed in the decade of the 1950s. Notions now considered classical like time preference, techniques of actualization, and the reinvestment problem are likewise considered from a comparative perspective.

L'homme aux quarante écus :

Cela me paraît impraticable et impossible.

Le géomètre :

Vous avez très grande raison, et cette impossibilité est une démonstration géométrique qu'il y a un vice fondamental de raisonnement dans nos nouveaux ministres.

Voltaire, *L'homme aux quarante écus*

1. INTRODUCTION GÉNÉRALE

Emmanuel-Étienne Duvillard de Durand est surtout connu comme l'un des premiers auteurs de tables de mortalité. C'est pour elles que les historiens de la démographie ont étudié son œuvre, notamment pour sa table de mortalité insérée dans l'ouvrage *Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole à chaque âge et celle qu'un préservatif tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité* [Duvillard, 1806]¹. La «fortune critique» de Duvillard reste donc essentiellement liée à ses tables de mortalité. En 1807, le Dr Odier en a rédigé un compte rendu très favorable dans la *Bibliothèque britannique*. Mais, dès 1830, d'autres spécialistes les ont fortement critiquées, ce qui a nui à la réputation de

¹ Guy Thuillier [1997] a écrit un ouvrage de référence sur Duvillard, publiant une sélection de textes pour la plupart inédits. Giorgio Israël [1991, 1993] a effectué également une étude approfondie en lien avec la *mathématique sociale*. Ces deux auteurs s'appuient sur les fonds de manuscrits de la B.N.F. (N.a.fr. 20576-20591) dont G. Thuillier [1997, p. 495–508] donne un premier inventaire. En outre, dès le XVIII^e siècle, Vasco et Condorcet se sont intéressés aux calculs financiers développés par Duvillard. Plus récemment Baumol & Goldfeld [1968] et Crépel [1990] ont abordé certains aspects ponctuels, mais les études sur le sujet restent rares.

l'auteur². J. et M. Dupâquier [1985] signalent que Duvillard a publié ces tables en liaison avec sa querelle contre la gestion du premier «Bureau de statistique» en France, dont il était sous-directeur en août 1805 et le premier septembre 1812³. Comme l'a mis en évidence Jonckheere [1965], ces tables reposaient sur la compilation de statistiques très disparates : plusieurs paroisses françaises de l'Ancien Régime et surtout de nombreuses statistiques de la ville de Genève pour les années 1770-1783. Mais le but de Duvillard n'était nullement de proposer une table représentative de la mortalité française : il voulait plutôt mettre un point final à la querelle sur l'inoculation qui avait opposé, quarante-cinq ans plus tôt, D. Bernoulli à D'Alembert, en tranchant en faveur du premier⁴.

Dans son ouvrage de 1806, Duvillard cherche surtout à exprimer la loi de mortalité par une équation simple, prenant appui sur l'hypothèse d'une population stationnaire. D'ailleurs, l'ouvrage lui-même ne serait en fait que le chapitre dix d'une œuvre non publiée, *Travail sur une Caisse nationale d'épargnes*, présentée à l'Académie des sciences le 22 germinal an IV (11 avril 1796). L'auteur explique⁵ :

«Le travail *numérique* n'est pas la partie essentielle du dernier ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Institut. S'il y a quelque mérite dans cet ouvrage, il consiste premièrement à avoir *imaginé* qu'il existe des relations nécessaires et indépendantes des faits, entre les divers élémens d'une *population régulière*. Secondement, à les avoir découvertes & démontrées *analytiquement* dans toute leur étendue : d'avoir par ce moyen trouvé un *Criterium* pour juger d'après les faits, si la population est, ou n'est pas dans un état regulier et pour choisir l'époque où elle a le plus approché de cet état, afin de pouvoir en mettant ces faits en œuvre, en déduire la loi de mortalité et celle de la population »

Cette citation, aussi bien que les travaux de Baumol et Goldfeld [1968], Crépel [1990], Israël [1991, 1993] et Thuillier [1997], montrent bien que son intérêt premier ne se limitait pas, en fait, à la démographie. Duvillard visait également les assurances ainsi que les calculs actuariels et financiers, utilisant les statistiques démographiques, notamment dans le calcul des rentes viagères et des assurances sur la vie. Il y appliquait des méthodes

² Voir [Thuillier 1997, p. 391-448], qui publie le compte rendu du Dr Odier dans la *Bibliothèque britannique* et d'autres matériaux importants.

³ Voir [Dupâquier 1985, p. 258-261]. Sur la querelle, voir [Desrosières 2000, p. 48-54].

⁴ Voir [Dupâquier 1985, p. 245-246] et [Israël 1991 p. 29 et note 113].

⁵ Deuxième lettre de M. Duvillard, Archives de l'Académie des sciences, Institut de France, Paris, pochette de séance du 31 mai 1813, citée d'après [Israël 1991, p. 34] et [Israël 1993, p. 75], italique dans le texte.

abstraites de types analytique et géométrique. Ce sont précisément ces méthodes que nous allons étudier. Nous examinerons pour cela un travail plus ancien de l'auteur : les *Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements*, publié en 1787.

Les études sur l'œuvre de Duvillard donnent peu de renseignements biographiques ou historiques sur ce dernier ouvrage. Duvillard lui-même a d'ailleurs peu parlé de la période de sa vie au cours de laquelle il l'a conçu et rédigé. Né à Genève dans une famille française d'origine protestante, il s'était installé à Paris en janvier 1775 pour y travailler au Contrôle général des finances. Retourné dans sa ville natale après la retraite de Turgot, c'est là qu'il prépara le manuscrit de son livre et c'est pour le faire approuver par l'Académie des sciences qu'il revint à Paris en août 1786, porteur d'une lettre de Charles Bonnet à Bailly (voir Annexe III). On ne sait à peu près rien de la vie de Duvillard pendant son séjour à Genève entre 1776 et 1786. Il y obtint un doctorat le 8 mars 1777 et se maria le 20 octobre 1782 avec Marguerite Christine Rouvière [Stelling-Michaud, 1972]. Sans doute participa-t-il d'une façon ou d'une autre aux innombrables activités bancaires et spéculatives sur les rentes viagères qui se faisaient dans cette cité. En 1784, il annonça un projet de publication par souscription d'un cours de mathématiques à l'usage du commerce et de l'industrie [Thuillier 1997, p. 135-136]. Ce serait en préparant cette publication qu'il aurait conçu l'idée du maximum, qui constitue le cœur de ses *Recherches sur les rentes* [Duvillard 1787, p. 22, note 8]. Celles-ci ont été publiées à Paris et à Genève en 1787 « sous le privilège accordé à l'Académie royale des sciences de Paris ». Comme le souligne G. Thuillier [1997, p. 1 et p. 125], Duvillard se lia alors avec Condorcet qui avait rédigé le rapport à l'Académie. Ayant fait venir sa famille, il s'installa définitivement à Paris où il devait mener le reste de sa carrière.

Les *Recherches sur les rentes* de Duvillard se situent pleinement dans le débat autour des rentes viagères émises par le gouvernement français et de leur difficile remboursement. Plusieurs savants discutaient de ce problème et essayaient de trouver des solutions plus ou moins équitables⁶. Pour résumer l'idée principale, il s'agissait de trouver un équivalent d'une rente viagère à l'aide d'un calcul d'actualisation visant à ramener toutes les

⁶ On trouvera de nombreuses précisions à ce sujet dans [Thuillier 1997] et [Crépel 1990]. Nous aborderons cette question également plus loin.

sommes d'argent à une même époque⁷, et, par ailleurs, des probabilités de décès fournies par des tables de mortalité. L'auteur français de référence était alors Antoine Deparcieux. Dans le cadre des emprunts et des placements financiers, ainsi que dans l'activité d'assurance, les premières tables d'actualisation sont apparues vraisemblablement au XVI^e siècle. Les derniers Scolastiques en viennent alors à justifier certaines pratiques commerciales autrefois accusées d'usure, en s'appuyant sur l'idée d'une proportion équitable entre risque et gain, qui pouvait ainsi transformer la spéculation interdite sur le hasard en compensation du péril. Au début du XVII^e siècle, Grotius (Huig van Groot) utilise à son tour cet argument pour disculper également les banquiers d'une telle accusation. Dès le milieu du XVII^e siècle, plusieurs savants essaient de développer des questions posées par l'intérêt composé et issues du domaine des probabilités. Au plan épistémologique, ce débat s'insère dans l'évolution de la logique d'actualisation. Rétrospectivement, R.H. Parker [1968] en dégage trois sources : la science actuarielle, les ingénieurs et enfin les économistes auxquelles on peut ajouter le courant des « ingénieurs-économistes » ou l'économie appliquée⁸. Comme le note Daston [1988, p. 112], ces savants inventent alors une nouvelle manière abstraite d'aborder la question du risque, étudiée jusqu'alors par des théologiens et des juristes, en proposant des règles générales fondées « scientifiquement » pour déterminer son prix.

Créée en Angleterre un peu après le milieu du XVII^e siècle, en particulier par Graunt et Petty, et assez rapidement diffusée sur le Continent, d'abord en Hollande par les frères Huyghens, Hudde et de Witte, puis partout en Europe, l'arithmétique politique représente une étape importante du développement des sciences économiques. C'est à cette époque, en outre, que sont construites les premières tables de mortalité par E. Halley. La nouvelle science s'est ensuite diversifiée notamment en relation avec les grands savants probabilistes du XVIII^e siècle, tels les Bernoulli, de Moivre, Condorcet, Laplace. Plusieurs traditions se sont tantôt confrontées, tantôt ignorées, mais toujours en rapport plus ou moins étroit avec le calcul des rentes viagères. Ainsi, en France, les travaux menés par des académiciens des sciences tels Deparcieux ou Buffon, puis Condorcet et Laplace, ont

⁷ Lorsque le taux d'intérêt est i , la valeur actuelle d'une somme S due à l'instant t est égale, à l'instant 0, à $S/(1+i)^t$.

⁸ Sur ce courant, voir les références à la note 41. En général voir aussi [Poitras 2000].

conflué avec les enquêtes administratives vers la fin du siècle. Les débats ont aussi été marqués par les discussions âpres entre D'Alembert et Daniel Bernoulli sur les calculs probabilistes relatifs à l'inoculation de la petite vérole. En Angleterre, c'est le calcul « plus privé » des rentes viagères qui attire l'attention d'auteurs comme Moivre, Simpson, Price et Morgan. Par son contact précoce avec le ministère Turgot (1774-1776), Duvillard se rattache plutôt à la tradition « française ». Son style très mathématique, le fait qu'il soumette en 1786 son ouvrage à l'Académie des sciences de Paris, le confirment. Or on sait maintenant que, malgré les relations entretenues par Price avec des encyclopédistes comme Morellet, Turgot et Condorcet, les traditions française et anglaise en arithmétique politique n'ont pas eu les rapports intellectuels que nous aurions pu supposer avant enquête. Il est donc très peu probable que Duvillard ait puisé son inspiration dans les idées (certes remarquables) de Richard Price.

Quoi qu'il en soit, au XVIII^e siècle, l'évolution des idées et les nouvelles pratiques économiques et financières à l'origine de la Révolution industrielle modifient le statut philosophique et épistémologique du développement décrit ci-dessus et issu de l'opposition à la prohibition médiévale de l'usure. Certains auteurs, tels Norton Wise [1995] et Ted Porter [1995], évoquent à ce propos l'émergence d'un « *quantifying spirit of capitalism* », qui établit dans la théorie et les pratiques l'idéal de la « quantification » et, par suite, l'habitude de se fier aux nombres (« *trust in numbers* »). Il existe d'ailleurs, depuis le début du XX^e siècle, notamment à partir des querelles croisées entre M. Weber, G. Simmel et W. Sombart, de nombreuses études en ce sens, consacrées à l'émergence, à l'évolution et aux formes de l'esprit du capitalisme. La contribution de Duvillard, étudiée et approuvée par Condorcet, Cousin et Vasco, s'inscrit dans ce mouvement général. Elle témoigne même d'une modernité certaine, notamment dans l'usage de la maximisation et dans l'analyse fondée sur une « séquence » de « flux financiers ».

Dans cet article, nous tenterons d'analyser les calculs financiers de Duvillard et ses « vues économiques »⁹, en les situant dans leur contexte

⁹ Nous laisserons néanmoins de côté ses considérations et calculs remarquables sur les sociétés mutuelles d'assurances sur la vie. Duvillard fait en effet référence explicite à la « Société Amicale de Londres » [1787, p. 77, note], peut-être la première société mutuelle d'assurances sur la vie fondée en 1762 sur une théorie scientifique : Richard Price a été conseiller technique de cette société (*Equitable Society*) et il a contribué, par

et en les comparant avec le cadre analytique actuel. Dans la première partie, nous montrerons l'exactitude de ses calculs financiers (que soulignait déjà G.B. Vasco dans son compte rendu de 1787 pour la *Biblioteca Oltremontana*). Duvillard développe, par des méthodes mathématiques alliant les calculs analytiques et les représentations graphiques, une technique financière originale, analogue à l'actuel taux interne de rentabilité, qu'il applique à l'évaluation des rentes viagères. Au-delà de la constatation de l'identité calculatoire entre les formules de Duvillard et le taux d'aujourd'hui, la question de l'interprétation à donner à ce dispositif analytique reste ouverte. Notre deuxième partie sera consacrée aux «vues économiques» de l'auteur, notamment à sa prise en compte *des* manières d'escompter. Des repères classiques de nos jours, tels que la préférence intertemporelle et la logique de l'actualisation, peuvent être ainsi réinterrogés dans une perspective comparative.

PREMIÈRE PARTIE : LES CALCULS DE DUVILLARD

2. LE SUJET DE L'OUVRAGE

Duvillard commence ainsi ses *Recherches* :

«Je fais voir en particulier, dans l'ouvrage que je présente au public, qu'un mathématicien exercé à ces matières, travaillant sous les ordres du Ministre des Finances, auroit pu, dans bien des occasions, faire emprunter à l'État les mêmes sommes qu'il a empruntées ci- devant, en lui laissant économiser plusieurs millions, sans diminuer aucunement l'attrait offert aux prêteurs, ni leur avantage réel» [Duvillard 1787, Avertissement].

Puis il expose le sujet qu'il va aborder, en donnant aussi quelques définitions. D'abord, les emprunts remboursés par des annuités :

«Si l'on ne veut pas rembourser un capital tout-à-la-fois avec les intérêts, on peut en rembourser d'abord la quantité a , ensuite la quantité b , puis successivement les quantités $d, e, f, g, \dots u$, jusqu'à l'entière extinction de la dette.

Soit donc un capital quelconque c à rembourser avec les intérêts annuels au i pour 1, & soit fait $1 + i = q$.

On devroit pour la première année $c \cdot i$ pour les intérêts; & si l'on paie a , ce qui sera donné à compte du capital sera $a - c \cdot i$; ainsi il sera encore dû $c - (a - c \cdot i)$ ou $c \cdot q - a$ » [Duvillard 1787, p. 1].

ses calculs, à sa réussite presque fabuleuse [Laboureix 1970; Poitras 2000]. Cependant, il existait aussi une *Amicable Society*, établie à Londres depuis 1706 [Thiveaud 1996; Poitras 2000].

Il s'agit donc d'un remboursement par ce que l'auteur appelle les annuités a, b, d, \dots, u . Si le nombre des annuités est fixé à l'avance et si celles-ci sont toutes égales, on peut toujours imaginer qu'une fraction de chaque annuité est consacrée à payer les intérêts et l'autre fraction au remboursement du capital. Ces annuités constantes sont alors un mode de remboursement du capital qui est intermédiaire entre un remboursement par fractions constantes (donc un amortissement constant chaque année) et un remboursement en masse à la dernière échéance (donc un amortissement unique à la fin de la période fixée, dit *in fine*), comme on voit dans la table suivante :

PÉRIODES						
VERSEMENT (en compte capital)	1	2	3	4	5	total
constant chaque année	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	100,00
fraction de l'annuité	18,10	19,00	19,95	20,95	22,00	100,00
remboursement <i>in fine</i>	0	0	0	0	100,00	100,00

Duvillard explique toutefois ce mode de remboursement de façon plus générale, avec ses notations :

«Et en général, au bout de t ans, il resteroit dû [en compte capital] $c \cdot q^t - (a \cdot q^{t-1} + b \cdot q^{t-2} + d \cdot q^{t-3} + e \cdot q^{t-4} + \dots + u)$.

Je suppose ici que l'intérêt est composé. [...] Je supposerai de même que l'escompte est composé & pris comme il faut.

Or, les quantités $a, b, d, e, \&c.$ peuvent être telles & en tel nombre que la dette soit réduite à zéro, c'est à dire que $c \cdot q^t - (a \cdot q^{t-1} + b \cdot q^{t-2} + d \cdot q^{t-3} + \dots + u) = 0$, ce que nous supposerons » [Duvillard 1787, p. 1-2-3].

Duvillard ajoute en outre que les quantités $a, b, d, \&c.$ peuvent être égales, croissantes ou décroissantes selon toutes sortes de lois.

Il va aborder en particulier le cas où elles sont égales et annuelles : il s'agit alors des annuités constantes. L'équation précédente deviendra

$$cq^t - a(q^{t-1} + q^{t-2} + q^{t-3} + \dots + q^0) = 0$$

ou encore

$$(1) \quad m = c(1+i)^t = cq^t = \frac{a(q^t - 1)}{i}.$$

Il s'agit de la valeur capitalisée à l'année t du capital initial emprunté, ou bien du «montant m de toutes ces annuités perçues, au moment où

l'on cesse de les recevoir» [Duvillard 1787, p. 20]. Nous l'appellerons par la suite «valeur future» (*future value*), selon la terminologie actuelle.

En partant de cette formule l'auteur applique ses calculs aux rentes viagères : c'est sans doute pour cela que, dans la suite de son analyse, il va considérer le temps t de cet intervalle comme variable. Ce passage d'un temps fixé à l'avance à un temps variable rapproche son cadre analytique de ce qu'on peut nommer aujourd'hui une série de flux résultant de l'investissement en compte capital d'une dépense initiale à *fonds perdu* (voir §§ 9–10).

Duvillard essaie ainsi d'avancer vers son objectif pratique, à savoir la crise financière de l'État français, provoquée notamment par les intérêts très élevés des rentes viagères¹⁰. Après avoir établi cette formule de base, Duvillard examine ces types de rentes et il distingue en particulier ce qu'elles apportent au rentier («taux naturel du viager») et le «prix» qu'il paye pour les acheter :

«Si les rentes viagères n'étoient calculées que sur le taux d'intérêt ordinaire, cela ne suffiroit pas pour entraîner autant de Prêteurs que l'Emprunteur pourroit en désirer. De-là est résultée la nécessité d'augmenter le taux naturel du viager sans en augmenter le prix » [Duvillard 1787, p. 13].

Dans son cadre analytique, Duvillard ne relie donc pas la rentabilité calculée du placement et le prix courant de marché. Ce point de vue l'amène à développer ses calculs économiques hors de toute référence à l'idée actuelle d'un «marché financier» censé aligner le prix de l'offre et le coût pour l'acheteur du titre, au moins à l'équilibre (voir §6 et §10).

Il s'agit pour l'Emprunteur, c'est-à-dire le Trésor public, *d'aller au-dessus du taux d'intérêt ordinaire*. L'auteur ne précise pas davantage le sens exact de ce dernier niveau ; il ne s'agit pas du taux légal, mais plutôt d'un niveau coutumier, acceptable en général sans référence spécifique au secteur économique ou au placement financier. En fait, il était usuel au XVIII^e siècle et encore au XIX^e siècle de considérer comme «ordinaire» un taux autour de 5 %, comme Duvillard semble faire pendant tout l'ouvrage.

Il définit ainsi un «taux apparent de la rente» r , c'est-à-dire le rapport entre l'annuité reçue chaque année et le capital initial investi, par

$$r = \frac{a}{c} > i$$

¹⁰ Les historiens ont longuement insisté depuis deux siècles sur la place de cette question dans la crise politique qui a conduit à la Révolution française.

où i est le taux ordinaire. Il s'agit du taux de la rente perpétuelle à termes constants¹¹, une façon courante à l'époque d'évaluer les investissements et utilisée encore aujourd'hui, notamment dans les investissements immobiliers¹².

Duvillard [1787] distingue trois classes de personnes susceptibles d'acheter ces rentes « augmentées » :

1) D'abord, ceux qui ne peuvent accumuler à intérêt composé qu'une partie de la rente.

2) Ensuite, les investisseurs professionnels, à savoir « les banquiers & tous ceux qui jouissent d'un crédit assuré » [Duvillard 1787, p. 15], qui doivent soutenir des dépenses annuelles et ne peuvent donc non plus accumuler toute leur rente.

3) Enfin, « les capitalistes qui cherchent à faire valoir le mieux possible leurs fonds » [*ibid.*, p. 17], et donc à accumuler les rentes et les intérêts qui viennent de l'accumulation des rentes mêmes.

Bien qu'il s'intéresse à ceux qui accumulent seulement une partie de leur rente et aussi à ceux qui la dépensent entièrement (aucune accumulation, à savoir aucun réinvestissement n'est alors accompli), c'est surtout la troisième classe de prêteurs, qu'il appelle « capitalistes », qui fera l'objet de l'exposé de Duvillard « car il s'en faut bien qu'accumulant leurs rentes dans ce commerce à un intérêt si fort au-dessous de celui que l'Emprunteur supporte, ils puissent porter leurs profits aussi haut que les sacrifices de l'Emprunteur semblent le promettre » [*ibid.*].

Il précise alors l'aspect pratique de son ouvrage : montrer en effet que le prêteur ne doit pas viser cette exploitation de l'emprunteur.

Le cadre analytique devient ici celui d'un investissement à fonds perdu, qui produit des flux annuels positifs, qu'on ne peut évidemment replacer qu'à un taux courant (à savoir, l'intérêt usuel i) plus faible que le rendement de l'investissement même (dans notre cas, l'intérêt r auquel est établie l'annuité).

Comme on l'a vu auparavant, Duvillard se propose d'utiliser les

¹¹ Sachant que la limite, lorsque le nombre de termes n tend vers l'infini, de la valeur actuelle VA_r d'une rente à termes constants est a/r , cette définition de r fait que le capital initial c et la valeur actuelle sont égaux.

¹² Ce que note déjà Vasco [1787]. On pourra comparer ceci aux considérations modernes de Schlachter [1989, p. 66].

annuités comme points de repère pour analyser les rentes viagères [Duvillard 1787, p. 54 et suiv.]. Dans le cas de ces dernières, le nombre des annuités (au sens qu'avait ce terme au XVIII^e siècle) n'était pas fixé à l'avance : la notion d'annuité (avec un nombre de périodes fixé à l'avance) glisse ainsi, chez l'auteur, vers la notion actuelle d'un «flux» ayant ou non le même montant chaque année, payé pendant un nombre indéterminé de périodes et donc variable en fonction du temps. Cette idée peut être confirmée par le fait que l'auteur aborde aussi les cas où les annuités sont de montant variable.

Voici donc les deux hypothèses, explicitement considérées par Duvillard, et qui représentent les clés de voûte de son analyse :

- l'investissement doit être à fonds perdu ;
- le prêteur replace la rente annuelle reçue à un intérêt plus faible que celui r de l'annuité même.

3. LE 'TAUX INTERNE DE RENTABILITÉ' DANS LA FORMULATION DE DUVILLARD

«En effet, soit proposé de trouver à quel intérêt [composé] on place son argent, lorsqu'on le place à fonds perdu pour une certaine annuité, payable seulement pendant un certain temps donné?» [Duvillard 1787, p. 20].

Duvillard établit les deux calculs qui l'intéressent pour développer son analyse; le temps est ici encore donné.

On cherchera d'abord le montant m , appelé plus haut «valeur future», de la suite des annuités accumulées.

«On cherchera ensuite à quel intérêt [composé] auroit dû être placé le capital primitif pour être monté à cette dernière somme [m] pendant la durée t de l'annuité a , ce qu'on trouvera par cette autre formule¹³

$$(2) \quad y = -1 + \sqrt[t]{\frac{m}{c}}$$

Après avoir déterminé ces deux valeurs, à savoir la «valeur future» des annuités accumulées et le taux d'intérêt composé y , la solution sera complète,

¹³ Formule originale de l'auteur [Duvillard 1787, p. 20], obtenue en remplaçant dans (1) i par y .

«& l'on pourra dire que le placement en annuité, ainsi qu'il a été dit, équivaut à un simple placement, pendant la durée de l'annuité supposée $[t]$, au taux [composé] que l'on vient de déterminer $[y]$ » [Duvillard 1787, p. 20].

C'est à partir de ces principes que Duvillard a construit la table qui résume les formules et a développé ses calculs, notamment avec le temps variable.

Duvillard expose ici ce que nous appelons aujourd'hui le «taux interne de rentabilité» (ou TIR, *internal rate of return*) de l'investissement en question, même si c'est dans un cadre analytique différent¹⁴. Comme dans les techniques contemporaines d'analyse financière, Duvillard considère le taux composé du placement-dépôt équivalent.

Analysons en effet la formule qui définit y :

$$m = c(1 + y)^t$$

où d'après (1)

$$c(1 + y)^t = \frac{a(q^t - 1)}{i} = a(q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + q^0).$$

On voit qu'il s'agit, à gauche, de la valeur future du capital primitif placé au «taux interne de rentabilité» y , taux que Duvillard construit à partir de la valeur future : l'auteur arrive au même résultat qu'avec le calcul effectué aujourd'hui. Montrons la raison de cette équivalence. On construit aujourd'hui le taux interne de rentabilité comme le taux qui annule la valeur actuelle nette (VAN), c'est-à-dire, pour une série a_0, \dots, a_τ , au taux ρ ,

$$\text{VAN}_\rho = \frac{a_0}{(1 + \rho)^0} + \frac{a_1}{(1 + \rho)^1} + \dots + \frac{a_\tau}{(1 + \rho)^\tau}.$$

avec, par souci de simplicité, $a_0 < 0$ (investissement initial), $a_1, \dots, a_\tau \geq 0$ et $\rho > 0$. Dans le cas des annuités (c'est-à-dire, $a_1 = \dots = a_\tau$ et $a_0 = -c$) :

$$\text{VAN}_\rho = -c + a \left(\frac{1}{1 + \rho} + \frac{1}{(1 + \rho)^2} + \dots + \frac{1}{(1 + \rho)^\tau} \right).$$

¹⁴ Nous croyons que sa réflexion s'appuie au départ sur la recherche du taux réel ou effectif de l'opération réalisée, analyse proche de la notion contemporaine du *taux actuariel* de l'emprunt, c'est-à-dire le taux qui assure l'égalité des valeurs actuelles des flux monétaires correspondant aux engagements respectifs de l'emprunteur et des prêteurs [Duvillard 1787, p. 62 ; p. 70-72].

En effet, il faut noter que, d'un point de vue technique, les définitions contemporaines du taux actuariel et du taux interne de rentabilité (désormais, TIR) sont égales ; cette influence des mathématiques actuarielles sur l'analyse financière contemporaine peut remonter notamment à L. Walras. Voir notre § 9.

On définit alors le «taux interne de rentabilité» (TIR) comme la valeur du taux ρ pour lequel VAN_ρ est égale à zéro. C'est-à-dire, dans ce dernier cas,

$$(3) \quad c = a \left(\frac{1}{1 + \text{TIR}} + \dots + \frac{1}{(1 + \text{TIR})^\tau} \right).$$

Nous allons voir comment Duvillard a calculé le TIR adopté de nos jours, même s'il fonde son analyse sur la valeur future.

En effet, il y a une relation mathématique élémentaire entre la VAN et la valeur future (VFN) couramment définies :

$$(4) \quad \text{VFN}_\rho = (1 + \rho)^t \cdot \text{VAN}_\rho \quad \text{si} \quad -1 < \rho < \infty.$$

On peut donc tirer $\rho = \text{TIR}$ soit de l'équation $\text{VAN}_\rho = 0$, soit de $\text{VFN}_\rho = 0$, les deux démarches étant tout à fait équivalentes; l'équation (4) deviendra :

$$(5) \quad c(1 + \text{TIR})^\tau = a[(1 + \text{TIR})^{\tau-1} + (1 + \text{TIR})^{\tau-2} + \dots + 1].$$

Dans cette relation, le second membre fait apparaître un placement des flux au taux TIR pendant le temps τ donné. On rejoint ainsi la logique du calcul de Duvillard, si l'on imagine qu'on replace les annuités au taux i plutôt qu'au TIR.

Duvillard avait bien sûr mis en évidence que, si le taux de l'annuité ρ et le taux de remplacement i sont égaux, le «taux interne de rentabilité» y qu'il définit, est égal, lui aussi, à ces deux valeurs [Duvillard 1787, p. 18].

Si l'on imagine, dans l'équation (5), le cas où ce taux de remplacement i est inférieur au taux ρ de l'annuité a , avec $q = 1 + i$, on arrive à la définition suivante du taux interne de rentabilité «modifié» (noté TIRM) :

$$(6) \quad c(1 + \text{TIRM})^\tau = a \sum_{j=1}^{\tau} (1 + i)^{\tau-j} = a(q^{\tau-1} + q^{\tau-2} + \dots + q^0).$$

En d'autres termes, le taux interne de rentabilité «modifié» (*modified internal rate of return*) est défini comme le taux TIRM pour lequel la valeur future du placement du capital initial au taux TIRM et la valeur future du placement de l'annuité au taux i sont égales. On peut facilement vérifier l'identité de cette formulation avec l'équation (1) de Duvillard, puisque le second membre de (6) est égal au second membre de (1).

Nous appellerons donc par la suite TIRD le taux interne de rentabilité «modifié» tel qu'il est défini par Duvillard. Il s'agit d'un cas simplifié du TIRM d'aujourd'hui¹⁵.

4. LE MAXIMUM DE DUVILLARD DANS LE TAUX INTERNE DE RENTABILITÉ 'MODIFIÉ'

Le véritable but de l'analyse de Duvillard n'était pas néanmoins la seule construction de cet indicateur financier y , ou TIRD, mais plutôt l'analyse d'un *maximum*, qu'il trouve dans l'évolution de y pendant le temps. Par rapport à l'analyse contemporaine, en effet, cette recherche implique un décalage important, que nous aborderons dans la deuxième partie (voir notamment § 9).

«Il se présente ici un résultat curieux & important, qui paroit d'abord un paradoxe, & qui sera pris pour une absurdité par toute personne qui ne pourra ou ne voudra pas me suivre avec attention. Ce paradoxe, c'est qu'il y a ici un maximum; c'est à dire une certaine durée de l'annuité telle que pour cette durée l'intérêt demandé est plus fort que pour aucune autre, en sorte qu'en augmentant de même qu'en diminuant la durée de l'annuité ainsi fixée, l'intérêt demandé diminuera» [Duvillard 1787, p. 20].

Pour trouver ce maximum, Duvillard [1787, p. 22] formule la question suivante :

«Si l'on demande quel est l'intérêt y pour un ; auquel on se trouve avoir placé son capital, lorsqu'on reçoit de ce capital une rente a pour un , que l'on replace à mesure à i pour un au bout du temps t ? »

La réponse est évidemment contenue dans la formule (1), avec $c = 1$:

$$(7) \quad c(1 + y)^t = \frac{a(q^t - 1)}{i},$$

où, $y = \text{TIRD}$, $i = \text{taux courant}$, $a = r = \text{taux de la rente}$.

L'auteur établit ainsi une fonction $y(t)$, dont il cherche pour a et i donnés, le maximum y^* , atteint au temps t^* . Il met en œuvre une méthode que l'on peut dire géométrique¹⁶, mais il explique d'abord intuitivement

¹⁵ Voir annexe I : La deuxième naissance du 'Taux interne de rentabilité'.

¹⁶ Voir [Duvillard 1787, p. 19, note 7] qui renvoie à sa figure 3 (retracée dans notre annexe III). L'auteur donne d'ailleurs d'autres interprétations graphiques pour divers calculs [Duvillard 1787, p. 3, 8, etc.].

l'existence de ce maximum¹⁷ : il existe un certain moment où « les annuités & leurs intérêts composés s'accumulant » seront équivalents au capital primitif [Duvillard 1787, p. 20]. À ce moment-là, le taux interne de rentabilité modifié qu'il définit (TIRD) est nul ; après ce point, le TIRD reste encore croissant et bientôt il va devenir plus grand que l'intérêt ordinaire i auquel fructifient les annuités.

C'est pour cela, nous explique Duvillard, qu'il y aura un maximum : puisque le premier membre de (7), d'abord plus petit, s'accroîtra selon un taux y plus fort que le taux i auquel fructifie le montant des annuités (second membre). Il y aura donc nécessairement

« une fois une augmentation annuelle (du capital primitif) égale à la double augmentation (par l'intérêt *ordinaire* et par l'annuité constante qui sera payée) que reçoit le montant des annuités » [Duvillard, 1787, p. 21].

Au-delà de cet instant, le TIRD sera toujours compris entre le taux auquel on replace les annuités i et le taux r (par définition plus grand que i).

Il y aura donc un maximum du TIRD par rapport au temps, que Duvillard calcule en différentiant l'équation (7)¹⁸.

Il suggère plusieurs façons d'obtenir cette valeur maximum, y compris une méthode par récurrence intéressante¹⁹.

Il s'agit de choisir une valeur quelconque pour t , pourvu que la valeur

¹⁷ Duvillard raisonne souvent sur des figures jointes dans les annexes et sur les relations entre les variables expliquées par ces courbes. Il le fait par exemple dans son exposé des différentes manières d'escompter (voir notre § 8).

¹⁸ Voici comment Duvillard procède :

« Maintenant t étant variable, on demande quelle valeur il doit avoir pour que y soit un maximum ? Pour cela, qu'on différencie l'équation, on aura

$$a \cdot q^t dt \cdot Lq - i(1+y)^t dt \cdot L(1+y) = ti(1+y)^{t-1} dy;$$

faisant $dy = 0$, on a

$$\frac{a \cdot q^t \cdot Lq}{i} = (1+y)^t L(1+y)$$

équation qui, divisée par l'équation donnée (7), laisse pour quotient celle-ci

$$\frac{q^t Lq}{q^t - 1} = L(1+y) = \frac{1}{t} L\left(\frac{a}{i}(q^t - 1)\right),$$

ou $q^{tq^t/(q^t-1)} = \frac{a(q^t-1)}{i} = (1+y)^t = Q^t$ » [Duvillard, 1787, p. 22].

¹⁹ La voici dans les mots de Duvillard :

de y qui en résultera soit positive; on substituera alors la valeur ainsi trouvée pour $Q = y + 1$ dans l'équation calculée et donnée par Duvillard; on pose ce résultat égal à t et on le réintroduit dans l'équation initiale, jusqu'à approcher le temps cherché du maximum de profit d'intérêt.

En présentant ses recherches scientifiques dans une lettre à l'Académie des sciences, en mai 1813, Duvillard considère cette méthode de récurrence comme nouvelle :

«Ainsi, par exemple, dans mes Recherches sur les rentes, les emprunts, les remboursements, page 23, j'avais à tirer la valeur de r de l'équation exponentielle [...] or inutilement je lui donnai différentes formes, jamais le théorème de Lagrange ne put me donner cette valeur en série convergente. Je fus obligé de chercher une nouvelle méthode. Je l'ai exposée dans le texte. Elle fut trouvée fine et ingénieuse par les Commissaires [Condorcet et Cousin] chargés de l'examen de cet ouvrage. J'aurais pu facilement la généraliser si la nature de mon objet principal me l'eût permis»²⁰.

Lagrange et Legendre ont souligné l'intérêt des techniques mathématiques utilisées par Duvillard²¹ :

«Il fait ainsi participer cette partie des Mathématiques mixtes aux progrès que les Géomètres modernes ont fait faire à l'Analyse» .

Duvillard construit également plusieurs tables avec les valeurs corres-

« Dans l'équation donnée $a(q^t - 1)/i = (1 + y)^t = Q^t$ ou $\sqrt[t]{a/i(q^t - 1)} = Q$, on fera telle supposition que l'on voudra pour t , pourvu que la valeur de y qui en résultera soit positive; c'est-à-dire, que l'on prendra $t > L(1 + i/a)/Lq$. On substituera la valeur de Q qui résultera de cette supposition de t dans l'équation suivante $x = (L(aLq) - L(iLQ))/(LQ - Lq)$, pour laquelle tous les logarithmes peuvent être pris dans les tables vulgaires, on fera de nouveau $t = x$ dans l'équation $\sqrt[t]{a/i(q^t - 1)} = Q'$; on substituera la nouvelle valeur de Q' qui en résultera dans l'équation $x' = (L(aLq) - L(iLQ'))/(LQ' - Lq)$ on aura déjà une valeur très approchée du temps du *maximum* de profit d'intérêt; & on en approchera aussi près que l'on voudra en répétant l'opération. Par exemple, soit $a = 0,1$; $i = 0,05$; & $t = 22$ d'où $Q = 1,063199$; on aura \dots , $x = 37,2387$, $Q' = \sqrt[37]{a/i(q^{37} - 1)} = 1,0646737$; $x' = 31,906$; $Q'' = \sqrt[31]{a/i(q^{31} - 1)} = 1,0651546$; $x'' = 30,40076$, qui est à très-peu-près le temps du maximum cherché. Cette méthode résulte d'une remarque que je fais ci-après sur une autre courbe» [Duvillard, 1787, p. 23-24].

²⁰ Lettre de M. Duvillard, Archives de l'Académie des sciences, Institut de France, Paris, pochette de séance du 31 mai 1813, citée d'après [Israël 1993, p. 74].

²¹ Voir leur compte rendu du travail de Duvillard relativement à l'établissement d'une *caisse nationale d'épargnes* [Séance de l'Académie des sciences, le 11 Vendémiaire an V (2.10.1796)]. Voir aussi [Thuillier 1997, p. 188-234, p. 238 pour la cit.] et [Israël 1993, p. 61-66, notamment p. 63].

pondantes du temps optimal, du TIRD et de la valeur future²².

Montrons enfin l'existence du maximum y^* en étudiant la fonction $y(t)$ et sa dérivée première, dans les hypothèses faites par Duvillard.

Revenons alors à l'équation (7) de Duvillard (dans laquelle c n'est pas forcément égal à 1); on peut l'écrire de la façon suivante, a, i, c étant donnés :

$$\begin{aligned} y(t) &= -1 + \sqrt[t]{\frac{a(q^t - 1)}{ci}} = -1 + \sqrt[t]{\frac{a}{c}} \sqrt[t]{\frac{q^t - 1}{i}} \\ &= -1 + \sqrt[t]{\frac{a}{c}} \sqrt[t]{q^{t-1} + q^{t-2} + \dots + q^0}. \end{aligned}$$

Duvillard calcule d'abord t en supposant $y(t)$ égal à zéro, ce qu'il reporte dans la table annexée à l'ouvrage; notons que ce cas est proche de l'idée d'aujourd'hui du «délai de récupération» *modifié en tenant compte des flux actualisés*²³. Pour Duvillard :

$$t = \frac{\log(a + i) - \log(a)}{\log(1 + i)}$$

et donc $y(t) = 0$. Il remarque en outre que

$$\lim_{t \rightarrow +0} y(t) = -1^+, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = i^+.$$

On peut écrire sa dérivée première sous la forme suivante, en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées :

$$y'(t) = \left(-\frac{1}{t^2} \log \frac{a(q^t - 1)}{ci} + \frac{q^t \log q}{t(q^t - 1)} \right) \exp \left(\frac{1}{t} \log \frac{a(q^t - 1)}{ci} \right).$$

Quand on étudie la dérivée $y'(t)$, on vérifie que pour t suffisamment petit, elle est proche du deuxième facteur; pour t suffisamment grand, elle est proche du premier, dès que le deuxième tend vers $q = 1 + i$. On peut montrer ainsi l'existence du zéro cherché²⁴.

²² Comme on fait usuellement dans les calculs financiers de ce genre, nous avons procédé à des simulations numériques sur ce calcul de maximisation. Elles montrent que ce maximum a été bien calculé par Duvillard.

²³ C'est-à-dire le nombre d'années tel que la valeur actuelle nette (VAN) soit nulle. Duvillard applique ce calcul du zéro à la fois dans le cas de remplacement à intérêt composé, à intérêt simple et sans intérêt.

²⁴ En fait, Duvillard utilise une méthode personnelle intéressante à ce sujet, que nous ne commenterons pas ici, parce qu'elle n'a qu'un rapport lointain avec notre thème.

5. ANNUITÉS CROISSANTES ET DÉCROISSANTES; RENTES VIAGÈRES

Même s'il s'occupe, à cet endroit, des annuités constantes, Duvillard n'oublie pas d'aborder, au moins brièvement, les cas plus généraux. Il parle par exemple d'une suite d'annuités en progression arithmétique : il s'agit d'annuités qui décroissent d'une quantité constante (qui est un pourcentage de la rente a) ; il en calcule le TIRD et le temps du maximum. Il trouve que, dans ce cas, sous certaines conditions, il y aura toujours un maximum [Duvillard 1787, p. 39–40].

Dans le cas des annuités régulièrement croissantes, si le taux r de l'annuité est plus grand que le taux du remplacement i , il y aura toujours un maximum et, si l'accroissement est lui-même variable, il pourrait y en avoir plus d'un selon lui [Duvillard [1787, p. 41].

Il aborde en outre plusieurs modalités de remboursements dans les rentes viagères, avec tirage au sort et primes au remboursement, ou bien par amortissement en progression arithmétique ou géométrique. Il considère également son taux y et le temps du maximum [Duvillard [1787, p. 42–54].

Il compare en outre deux annuités de montants différents, payables chacune jusqu'au temps différent de leur maximum et avec le même taux de réemploi des encaissements.

Cette comparaison n'est pas possible avec le TIR tel qu'on l'utilise aujourd'hui²⁵. En fait, avec le TIRD (ou bien le TIRM) la comparaison peut se faire à condition de choisir comme référence la durée la plus longue et d'imaginer les encaissements de l'autre annuité moins longue comme placés au taux de réemploi i jusqu'à la fin de la durée plus longue. C'est en effet l'hypothèse utilisée par Duvillard [1787, p. 29] lui-même :

«De plus, il est aisé de voir qu'il n'y a pas lieu d'hésiter sur le choix de deux annuités différentes, payables chacune jusqu'au temps de leur maximum ; quoique le temps T pendant lequel on payera la plus petite annuité a , fût plus grand que celui t , pendant lequel on payeroit la plus grande A ; car l'on a à comparer ces deux produits [...] $q^{tq^t}/(q^t-1) \cdot q^{T-t}$ & $q^{Tq^T}/(q^T-1)$.»

Son résultat consiste à dire qu'il est toujours préférable de choisir la rente A la plus grande, si elle est payée jusqu'au temps de son maximum.

Il souligne en outre que les temps des maxima relatifs aux taux de 6

²⁵ Voir notre annexe I : La deuxième naissance du 'Taux interne de rentabilité'.

à 12 pour cent sont compris dans les limites de la vie humaine, le taux ordinaire étant de 4 à 6 pour cent. Enfin, il fait les remarques suivantes :

« En général, plus l'intérêt auquel on placera la rente [i] sera fort, plus le terme du maximum sera éloigné; & au contraire, plus l'annuité sera grande [donc r élevé], l'intérêt de l'accumulation [i] restant le même, plus le terme de son maximum sera court, & la somme accumulée petite » [Duvillard 1787, p. 29].

6. CONSÉQUENCES ET APPLICATIONS

Le véritable but de l'analyse de Duvillard est, on l'a dit, l'étude des rentes viagères. Le savant genevois leur applique la logique qu'on vient de présenter [Duvillard 1787, p. 54 et suiv.] afin de contester leur émission de la part du Trésor public.

La conséquence la plus remarquable de ce maximum est, à son avis, que l'avantage du prêteur n'est pas toujours croissant pendant le temps, « quoique les charges de l'emprunteur » [ibid.] deviennent encore plus grandes.

Même si l'auteur ne se réfère pas directement au contexte politique et financier de son époque, on ne doit pas oublier la crise financière de l'Ancien Régime avec toutes ses conséquences politiques et sociales.

On sait que Duvillard, en tant qu'employé du Ministère des finances, a participé aux décisions de rachat des rentes viagères sous la Révolution. Ses calculs ont été la base d'analyse du très délicat rachat de ces emprunts publics [Crépel 1990]. Malgré ses efforts, il n'est pas arrivé vraiment à influencer les décisions finales, du moins c'est ce qu'il explique dans le texte suivant :

« Je fis voir qu'il suffisait de rembourser sans diminution les capitaux reçus lorsque le taux du viager excédait celui qui était naturellement dû; et conciliant autant qu'il était possible, l'intérêt de l'État et la justice due aux rentiers, rendant service à tous, je fournis les moyens de liquider cette Dette [...]

[...] j'ai dirigé cette opération dans sa partie scientifique jusqu'au moment où une autre assemblée législative changea ce mode de liquidation et réduisit au tiers le Capital de la Dette publique²⁶. On sent bien que je n'ai pas été consulté pour cette dernière opération »²⁷.

²⁶ Il s'agit de la fameuse « banqueroute des deux tiers » [Thuillier 1997, p. 231], survenue le 30 novembre 1797 (9 vendémiaire an VI). Les deux tiers de la dette sont alors remboursés en « bons ».

²⁷ Lettre de M. Duvillard, Archives de l'Académie des sciences, Institut de France, Paris, pochette de séance du 10 mai 1813, citée d'après [Israël 1993, p. 68–69]. On voit dans ce texte plusieurs phrases qui ressemblent au texte autobiographique de Duvillard

Duvillard [1787] trouve finalement qu'il y a, dans ces rentes viagères à taux plus élevé que le niveau courant, un « chômage d'argent »²⁸. À son avis, le monarque ne devrait emprunter que pour investir dans quelque affaire avantageuse, comme le commerce, les manufactures, la culture, qu'on peut considérer comme payant les dettes consacrées à cette affaire. Il doit ainsi emprunter

« pour faire valoir dans ce commerce ou manufacture à un plus haut intérêt qu'il ne s'engage à payer. *C'est ainsi que les sujets d'un monarque font face aux engagements des emprunts qu'il fait, & il ne fait des emprunts que pour ne pas priver les uns, de fonds que leur industrie fait valoir à un taux d'intérêt beaucoup plus haut que celui auquel il emprunte, & pour faire servir de cette manière les capitaux des autres au profit de la nation* » [Duvillard 1787, p. 85–86, italique dans le texte].

Ailleurs, il est encore plus explicite :

« Ces capitaux renversés dans la circulation eussent servi à différens prêts et à différens achats; ils auraient été employés à bâtir des maisons, à défricher des terrains incultes, à amender des champs maigres et négligés, à cultiver mieux les campagnes, à mieux diriger la fécondité de la terre vers les plantes les plus utiles à l'homme, à augmenter le nombre des manufactures, à donner plus d'étendue aux affaires de celles qui existent etc., etc., et tout cela aurait été opéré par des sommes ou qui n'existaient pas auparavant, ou qui n'avaient aucune valeur » [Duvillard, cité d'après Thuillier 1997, p. 231].

Duvillard [1787] est très critique envers les rentes viagères. Il fait allusion aux banquiers qui les négocient à un prix très inférieur à la valeur réelle payée pour ces rentes :

« Chacun peut aisément vérifier ces calculs. Si on les trouve justes, on en conclura, que si plusieurs personnes ont fait une grande fortune, en s'intéressant dans les rentes *de la forme usitée*; c'est parce qu'elles les ont achetées à un prix fort au-dessous de leur valeur réelle, ou qu'elles ont négocié sur ces effets. Mais les vrais prêteurs sont ceux qui gardent toujours la rente, & c'est leur bénéfice dont il s'agit ici; or ce bénéfice est fort petit en comparaison de celui qu'on imagineroit d'abord » [Duvillard 1787, p. 68–69].

Il faudrait alors, par exemple, que l'emprunteur supprime ces rentes dès qu'elles sont arrivées à leur maximum, pourvu qu'il laisse, par exemple, aux rentiers la faculté de lui re-prêter aux mêmes conditions. Les prêteurs auront à la fin de la période une somme réellement plus forte et l'emprunteur payera le même denier de rente, mais après avoir reçu de nouveaux capitaux [Duvillard 1787, p. 34]. Comme le soutient Duvillard

publié par Thuillier [1997, « Souvenirs »].

²⁸ Voir [Duvillard 1787, p. 117 et aussi p. 87]. En d'autres termes, au-delà du maximum, tout se passe comme si une partie de l'argent était stérilisée. Cette idée est d'ailleurs reprise dans les citations ci-dessous.

lui-même :

«Il ne faut donc pas demander ici qui est ce qui perd quand tous deux gagnent, comme on me l'a demandé» [Duvillard 1787, p. 85].

On trouve ici en passant une référence aux difficultés de Duvillard à faire comprendre son analyse :

«Je fus étonné de la facilité avec laquelle M. de Calonne saisit la cause de ces résultats [de ses *Recherches*] qui paraissaient aux autres des paradoxes» [Duvillard, cité par Thuillier 1997, p. 1].

L'auteur consacre plusieurs paragraphes²⁹ à développer des solutions aptes à éviter le plus possible cette dépense excessive de la part de l'État. Toutes ces méthodes utilisent en fin de compte les résultats analytiques du TIRD.

La plus simple, à son avis, consiste à les transformer en rentes à intérêt composé, fixé au niveau du taux TIRD, pendant le temps du maximum ou même pendant un temps indéfini³⁰. L'emprunteur aura ainsi une épargne considérable sur les intérêts payés.

Une autre méthode est fondée sur la substitution à la rente viagère de plusieurs annuités égales ou plus grandes, pendant un temps plus bref. Par exemple une suite de 104 annuités de 9 % peut devenir deux emprunts de 52 annuités chacun, ou mieux encore trois emprunts de 34 ans environ.

Dans ce cas, on fait des emprunts successifs de nouveaux capitaux. On pourrait néanmoins emprunter les annuités successives échues. Duvillard [1787, p. 102 et suiv.] expose pour ce dernier cas la solution générale. Il montre ainsi que, ne pouvant replacer la rente au même intérêt que celui supporté par l'emprunteur, les prêteurs doivent préférer à l'emprunt unique une suite d'emprunts successifs pendant toute la durée fixée [Duvillard 1787, p. 105–106] : le montant total de l'accumulation serait en effet plus élevé dans le cas des emprunts successifs.

Dans ce cas, néanmoins, le débiteur n'a pas toujours des avantages et Duvillard développe des calculs pour en vérifier les conditions, tout en prenant en compte également les époques des échéances. Il utilise alors un taux d'intérêt j que l'emprunteur est censé gagner sur les montants empruntés [Duvillard 1787, p. 107 et suiv.].

²⁹ Notamment entre les paragraphes LXIII (p. 83) et LXXXIX (p. 115).

³⁰ Cette solution est retenue par Vasco [1787] dans son compte rendu.

7. CRITIQUER LES CRITIQUES : BAUMOL ET GOLDFELD ‘REVISITÉS’

Dans leur recueil consacré aux «précurseurs de l'économie mathématique», Baumol et Goldfeld situent l'apport des *Recherches* de Duvillard ainsi :

«This book was by no means the earliest writing on actuarial mathematics but it does provide a contribution in its use of the differential calculus to calculate an optimal lending period. Professor Robertson describes Bernoulli, Paolo Frisi and Buquoy as the three earliest users of the differential calculus in economic analysis³¹. But Duvillard de Durand anticipates the relevant writings of the latter by more than a quarter of a century.» [Baumol-Goldfeld 1968, p. 151].

Ils offrent en outre des renseignements suffisants pour comprendre l'analyse du maximum de l'auteur³², notamment par des extraits traduits en anglais, tout en formulant une brève critique, qui s'avère être inexacte. En partant de la formule (2), ils considèrent en effet que

«the [right-hand] side of the equation is the present value of a sequence of repayments, a , on a debt of one unit of currency, say one dollar, lent at a rate of interest i . On the [left-hand] side y is a sort of lender's «internal rate of return» which is to be maximized. » [Baumol-Goldfeld 1968, p. 151]

Leur analyse s'appuie sur une identité obligée entre les deux taux y et i , à savoir entre le TIRD et le taux courant de marché, qu'ils prétendent imputer à l'auteur lui-même :

«But a little consideration suggests that if the rate of interest is i , then y must equal the given interest rate, i , and there is nothing to be maximized. This also follows directly from the author's own equation [...]

$$\frac{a(q^t - 1)}{i} = cq^t = c(1 + i)^t \quad (\text{voir (1)})$$

where c is the amount of money lent so that in the present case $c = 1$. Moreover, with t variable and all other entries in the equation taken to be fixed (as the author assumes in his differentiation) it should be clear that a maximum present value (rather than internal rate of return) would be obtained by lender with $t = \infty$! »

Baumol et Goldfeld n'ont pas vraiment essayé de refaire les calculs de Duvillard, comme le montrent les malentendus suivants :

³¹ Ross M. Robertson, «Mathematical Economics before Cournot», *Journal of Political Economy*, vol. LVII 1949, p. 524–527. Frisi's and Buquoy's use of the calculus is rather peripheral, and in the trace of the latter one may well question whether his writing can reasonably be labelled «*economics*». [Note de Baumol et Goldfeld].

³² Ces deux auteurs sont les seuls qui se soient intéressés spécifiquement aux calculs financiers développés par Duvillard. Voir aussi Crépel [1990].

- Ils appellent *present value* une formule qui représente évidemment la valeur future (*future value*) de la série des annuités en question, expressément définie par Duvillard lui-même (voir notre équation (1) et la citation suivante).

- Ils prétendent que le taux interne de rentabilité y doit être nécessairement égal au taux d'intérêt courant i , probablement parce qu'ils cherchent la logique de construction du TIR à partir de la formulation $\text{VAN} = 0$, c'est-à-dire du point de vue de l'emprunteur³³.

Duvillard avait lui-même souligné expressément que, si le taux de la rente r et le taux d'intérêt courant i étaient égaux, il n'y avait rien à maximiser, du fait que y , i et r sont égaux par définition. L'auteur français conduit néanmoins son analyse dans l'hypothèse explicite que r est plus grand que i et du point de vue du prêteur qui accumule et remplace les annuités.

À partir d'une lecture plus approfondie de l'ouvrage, nous avons en revanche tenté de montrer (voir nos §§ 3–6) la proximité de l'analyse de Duvillard avec le *modified internal rate of return*, ou bien l'analyse du taux interne de rentabilité dans un cadre caractérisé par plusieurs taux d'intérêt et de rentabilité, tout en prenant en compte la relation élémentaire (4) entre valeur actuelle et valeur future. Le débat autour de la valeur actuelle nette (VAN) et du TIR, pendant les années cinquante du XX^e siècle, a abordé cette question spécifique³⁴.

Dans le cadre de l'hypothèse de remplacement, il n'y a enfin aucune difficulté technique ni théorique à utiliser le TIRD pour comparer deux projets ayant deux durées différentes (voir § 6), contrairement à ce qu'affirment Baumol et Goldfeld [1968, p. 152].

Il nous apparaît plutôt, en reprenant l'expression déjà citée de Duvillard [1787, p. 20] lui-même, que le «résultat curieux & important, qui paroit d'abord un paradoxe, & qui sera pris pour une absurdité par toute personne qui ne pourra ou ne voudra pas me suivre avec attention» semble en effet pertinent.

³³ Ils font sans doute référence à l'hypothèse d'école d'unicité à la fois du taux d'intérêt et du marché des capitaux.

³⁴ Voir annexe I : La deuxième naissance du 'taux interne de rentabilité'.

DEUXIÈME PARTIE : LES VUES ÉCONOMIQUES DE DUVILLARD

Duvillard n'a pas laissé, à notre connaissance, de traité d'économie politique. Cependant, il a cherché à prolonger et à développer la «mathématique sociale» de Condorcet, comme l'ont montré Thuillier [1997], Israël [1989] et Crépel [1990].

Nous allons reprendre ici la question des vues économiques de Duvillard. Bien qu'une analyse complète de celles-ci déborderait largement du cadre de cet essai, nous voulons néanmoins aborder au moins deux thèmes, qui nous semblent particulièrement intéressants : *les manières d'escompter* et la relation entre capital et intérêt.

8. LES MANIÈRES D'ESCOMPTE ET LEURS CONSÉQUENCES SUR LE MAXIMUM

Bien que les manuels de mathématiques financières citent encore aujourd'hui les formules de l'escompte commercial et de l'escompte rationnel, toutes deux fondées sur l'intérêt simple, la théorie économique contemporaine ne doute guère de l'usage logique et épistémologique du seul escompte composé. Au XVIII^e siècle, en revanche, Duvillard semble avoir du mal à défendre et à justifier ce dernier, qu'il appelle la «bonne» manière d'escompter, par rapport aux «mœurs» et aux pratiques de son époque³⁵.

Après avoir exposé le sujet des *Recherches*, Duvillard pose en effet :

«Je suppose ici que l'intérêt est composé; parce que toute personne qui fait valoir un capital, soit dans son propre commerce, soit dans celui des autres, ajoute au moins au bout de chaque année l'intérêt au capital, & le fait fructifier avec lui. Je supposerai de même que l'escompte est composé & pris comme il faut » [Duvillard 1787, p. 2].

Juste à la fin de ce paragraphe, il ajoute la note suivante, consacrée aux manières d'escompter, analysées plus loin, où il définit «l'escompte comme il faut» :

³⁵ Pour les définitions, voir par exemple [Schlachter 1989, p. 16]. Poitras [2000] aborde *les manières d'escompter* d'un point de vue historique au chapitre V, 'Simple Interest and Compound Interest'. Certains économistes s'intéressent de plus en plus à l'escompte simple ou hyperbolique d'un point de vue théorique (voir [Laibson 1997], [Loewenstein-Thaler 1989]; pour d'autres références, voir [Biondi 2002]).

«Je dis *comme il faut*; car j'ai reconnu qu'il y a quatre différentes manières d'escompter, qu'il est nécessaire d'employer tour-à-tour dans certains cas. En effet, que l'on demande quelle est la valeur y d'une somme m , payable au bout du temps t , le denier de l'argent étant i ?

1^e. Si l'on escompte à la manière usitée entre Négocians pour des temps courts, en prenant l'escompte en dedans de la somme & à l'intérêt simple, on a $y = m(1 - i \cdot t)$; méthode qui fait, par exemple, que les remises coûtent réellement plus de provision aux commettans que les traites, quoique le tant pour 100 soit le même; qui réduiroit à zéro les plus grandes sommes payables au bout du temps $t = \frac{1}{i}$ (= 20 ans si l'intérêt est à 5 pour 100); & qui peut abuser quelques personnes lorsque le temps est plus court.

2^e. Si, en prenant l'escompte en dedans de la somme, on compte à intérêt composé, on a $y = m(1 - i)^t$; ou pour mieux dire, cette formule fait voir à quelle somme m montera le capital y au bout du temps t , lorsqu'on aura employé ce capital à escompter d'année en année des sommes correspondantes à ses valeurs successives, & cela selon la manière usitée.

3^e. Si l'on prend l'escompte en dehors, & que l'on compose l'intérêt, ce qui est la bonne manière, on a $y = \frac{m}{(1+i)^t}$.

4^e. Si, dans cette troisième manière, on prend l'intérêt simple on a $y = \frac{m}{1+i \cdot t} = \frac{m}{i \cdot (1/i + t)}$ » [Duvillard 1787, p. 2, note 1].

Selon Duvillard, il existe donc quatre manières d'escompter différentes selon qu'elles reposent sur un intérêt simple ou composé et qu'elles sont prises «en dehors» ou «en dedans» de la somme :

LES QUATRE MANIÈRES D'ESCOMPTEUR SELON DUVILLARD		
<i>intérêt</i>	<i>simple</i>	<i>composé</i>
escompte pris en dedans	1	2
escompte pris en dehors	4	3

Ce sont les deux dernières manières qui nous intéressent le plus, en raison de la différence avec la théorie économique d'aujourd'hui. Duvillard expose en effet deux manières d'escompter «en dehors», c'est-à-dire à temps continu : l'escompte à intérêt composé et à intérêt simple. Si l'on prend une somme m égale à 100 et un taux d'escompte i égal à 5 %, alors on peut comparer les quatre manières dans le tableau 1.

À l'époque, les relations et les habitudes commerciales pouvaient utiliser d'autres arrangements, à savoir la première et la deuxième manière (qu'il appelle «escompte en dedans»). Il s'agissait alors d'un calcul linéaire en temps discret : en d'autres termes, on faisait, chaque année, la différence entre le capital en question et les intérêts relatifs à chaque période.

COMPARAISON ENTRE LES QUATRE MANIÈRES D'ESCOMPTE					
$m = 100, i = 5 \%$	1	1	1	1	1
1 ^e	95,000	90,000	85,000	80,000	75,000
2 ^e	95,000	90,250	85,738	81,451	77,378
3 ^e	95,238	90,703	86,384	82,270	78,353
4 ^e	95,238	90,909	86,957	83,333	80,000

Tableau 1

Duvillard prend parti pour la troisième manière, à savoir l'intérêt composé en dehors, pour des raisons aussi bien techniques que théoriques. Il justifie l'utilisation de cette méthode par l'hypothèse d'accumulation des intérêts avec la même rentabilité que le capital initial. Même s'il la considère comme la « bonne manière » d'escompter, il ne croit évidemment pas cette hypothèse valable dans tous les cas si les conditions du remplacement envisagé diffèrent³⁶. C'est aussi pour cela que l'auteur prend soin, tout au long de son ouvrage, de faire tous ses calculs dans les trois cas suivants : par la troisième formule, par la quatrième formule et sans aucun remplacement (dans le TIRD, le taux usuel i étant alors nul).

Duvillard ne semble pas totalement isolé à son époque. Son mentor, Condorcet, s'intéressait aux mêmes sujets : nous pouvons y reconnaître la même logique sous-jacente. Dans un manuscrit non daté qu'il n'a pas publié, ce dernier présente en effet l'escompte « en dehors » à intérêt composé :

« Dans le calcul qui a été fait dessus on a pris la manière ordinaire d'évaluer les intérêts des emprunts. Cette méthode consiste à rappeler [= rapporter] les sommes qu'il faut paier aux différentes époques à une seule époque [,] celle où l'emprunt a été fait, et d'évaluer ces sommes en supposant que la valeur d'un somme 100 payable dans un an par exemple est si l'intérêt de l'emprunt est 8 pour cent par exemple $100 \cdot \frac{100}{108}$, s'il est 7, $100 \cdot \frac{100}{107}$ [...] » [Condorcet 1994, p. 593, remarques des éditeurs]³⁷.

³⁶ Voir également [Schlachter 1989].

³⁷ Dans ses contributions à l'édition de Kehl des *Œuvres* de Voltaire, dont les derniers volumes paraissent en 1789, Condorcet ne semble pas convaincu qu'on puisse changer les arrangements relatifs aux rentes viagères « sans injustice » : Les emprunts en rentes viagères ont de grands inconvénients :

« [...] 3^e. On est toujours le maître de changer, par des remboursements réglés, un emprunt en rentes perpétuelles à annuités à terme fixe, et l'on ne peut, sans injustice, rien changer aux rentes viagères une fois établies; [...] ». [Condorcet 1994, p. 663].

On pourrait *peut-être* en déduire que ce fragment non daté de Condorcet est posté-

Condorcet remarque cependant :

« mais cette manière me paraît défectueuse, en effet elle suppose que si je dois paier dans un an 100 livres par exemple je [?] n'ai qu'à prêter maintenant $100 \cdot \frac{100}{108}$ pour an à 8 pour cent, ou bien que je suis en droit de donner [à] celui à qui je dois 100 livres dans un an $100 \cdot \frac{100}{108}$ dans le moment présent » [Condorcet 1994, p. 593].

Il adopte ici la même logique que Duvillard : pour justifier l'actualisation, l'auteur suppose un remplacement au taux d'escompte, qui permet notamment le calcul d'équivalence entre le moment présent et le moment futur. Condorcet, en effet, suggère que l'emprunteur (« je ») re-prête lui-même l'argent emprunté afin de rembourser le prêteur, ou bien que ce sera le prêteur lui-même qui le fera. Voici sa conclusion :

« Cette manière de compter n'est donc exacte que lorsque ou l'on peut rembourser les annuités ou les rentes sur le pied du denier de l'emprunt, ou bien lorsque ce denier ne s'écarte pas de l'intérêt courant. Il faudra donc du moins toutes les fois que les remboursements ne seront pas stipulés sur le denier de l'emprunt, y faire entrer, l'intérêt courant » [Condorcet 1994, p. 594].

Il n'accepte donc pas d'escompter dans tous les cas par l'intérêt de l'emprunt, sans qu'il y ait un placement équivalent disponible, d'où la référence au niveau de l'intérêt courant. Il faut donc préférer pour l'escompte, explique-t-il, cet intérêt courant du pays à celui même de l'emprunt : il s'agit encore une fois du cadre de la réflexion de Duvillard.

9. QUI A VÉRITABLEMENT INVENTÉ LE 'TAUX INTERNE DE RENTABILITÉ'? LA CONTRIBUTION DE DUVILLARD DANS UNE PERSPECTIVE COMPARÉE

Puisqu'un lecteur averti retrouve le TIRM contemporain à partir des remarquables calculs développés par Duvillard, il pourrait aussi, au-delà de la constatation de l'identité calculatoire, se poser la question épistémologique de la perspective sous-jacente et de l'interprétation à donner à ce dispositif analytique.

Chez Duvillard, les deux clés de voûte théorique et analytique sont en particulier l'idée du maximum (§ 4) et les différentes manières d'escompter (§ 8) : ces dernières ne concernent pas seulement la note 1 des *Recherches*, mais elles peuvent être reliées à l'idée cruciale d'un remplacement des fonds reçus (§ 10).

rieur à l'ouvrage de Duvillard.

Duvillard [1787, p.37 et suiv.] prend alors le temps de développer les calculs relatifs au maximum dans les cas des intérêts composés, des intérêts simples et même sans intérêt. Il aborde par là tous les cas de remplacement, donc tous les types de prêteurs, non seulement ceux qui replacent chaque année aussi bien les annuités que les intérêts de la rente, mais aussi ceux qui «accumul[ent] la rente sans la placer à aucun intérêt» ou qui «dépens[ent] cet intérêt».

Les techniques contemporaines d'évaluation des investissements, fondées sur la logique de l'actualisation, notamment le TIRM³⁸, trouvent leur justification épistémologique dans ce qu'on appelle la révolution *marginaliste*. Dans ses *Éléments d'économie pure*, pour sa «théorie scientifique de la capitalisation», Léon Walras [1900, p. 250–251] fait référence aux dispositifs développés par la science actuarielle et à l'ancienne conception du *denier*. On sait en outre l'influence considérable exercée par l'économiste français sur Irving Fisher, généralement crédité de l'introduction de l'actualisation dans la littérature économique américaine de l'époque.

Dès la fin du XIX^e siècle, plusieurs économistes étendent cette logique à des domaines autres que les rentes et les emprunts : Marshall, Böhm-Bawerk, Wicksell et, après eux, I. Fisher exposent dans leurs ouvrages une perspective intégrant l'escompte comme valeur actualisée des flux financiers futurs, conçus de manière impersonnelle, en lui donnant un nouveau statut épistémologique et théorique en économie³⁹. Ces modifications concernent les liaisons à la fois entre capital et intérêt, entre crédit et capital. On connaît bien les querelles théoriques issues de ces questions, elles permettent de situer les techniques d'actualisation au moins par rapport aux trois repères suivants : l'évaluation optimale des investissements productifs industriels, l'efficience financière comparée au taux courant de marché, l'idée d'un taux subjectif de préférence inter-temporelle.

À la même époque, les ingénieurs commencent à utiliser l'actualisation dans l'évaluation des investissements, en particulier dans le milieu ferroviaire. Néanmoins, d'après Jones-Smith [1982, p. 104–105], bien que

³⁸ Il a été nommé *Baldwin rate*, *effective rate of return* [Athapoulos 1978] et finalement *modified internal rate of return* [Lin 1976]; voir [Athapoulos 1978].

³⁹ Voir également [Alchian 1955], notamment sur I. Fisher et J.M. Keynes. Il faut néanmoins noter que la notion keynésienne de « préférence pour la liquidité » distingue taux d'intérêt et préférences intertemporelles.

l'importance de la logique de l'actualisation s'accroisse dans l'entre-deux-guerres, l'évaluation des coûts (*costing*) semble encore le point clé à cette époque, au moins dans la littérature appliquée américaine et peu d'efforts sont consacrés alors au développement des techniques correspondantes.

De leur côté, les économistes semblent souligner plutôt l'aspect productif et matériel du capital ainsi que les contraintes techniques qui y sont liées, sans doute sous l'influence du caractère central des coûts de production, hérité des classiques⁴⁰. D'après Solomon [1987], il faut attendre la fin de la deuxième Guerre mondiale, en particulier les années cinquante et soixante, pour que se développe un corpus doctrinal cohérent dans ce domaine, à savoir l'emploi optimal des fonds consacrés aux investissements en compte capital⁴¹. C'est à la même époque qu'aux États-Unis d'abord puis en Europe, la logique de l'actualisation s'affirme dans les pratiques d'entreprise, au moins d'un point de vue théorique⁴².

Si l'on veut dépasser le constat d'un simple décalage entre les époques, les repères intellectuels, les manières de voir et de dire, alors l'idée du maximum développée par Duvillard peut encore suggérer :

(a) un point de vue économique peu orthodoxe sur le rapport entre capitaux, temps et escompte ;

(b) une formulation renouvelée du maximum, qui le considérerait comme une sorte de durée minimale endogène (*endogenous optimal duration*) du rendement de l'investissement en question⁴³.

La technique de l'escompte permet aujourd'hui de prendre en compte

⁴⁰ D'après Gintchel [1999, p. 327], Fisher s'inscrit dans la même perspective : « *Interestingly, Fisher [The theory of Interest, New York, 1930] [...] fleshes out his theory by analyzing how the investment opportunity set can be derived from the underlying technology. Unlike most modern financial economists, Fisher interprets his investment opportunity set as more than a collection of cash-flow vectors. Rather, it is a complete characterization of available technology.* »

⁴¹ « *Dean's work triggered much academic activity on the discounted Cash flow technique. In 1956, a trade journal, The Engineering Economist, was founded to encourage the dissemination of ideas on newly developed capital budgeting techniques, and textbooks soon followed to establish the acceptance of discounted Cash flow techniques among academic scholars and teachers* » [Johnson-Kaplan 1987, p. 164]. Voir aussi [Miller 1998].

⁴² Quelques études empiriques contestent leur application concrète à cette époque. Voir [Bierman-Smidt 1993, p. 77-78] et [Klammer 1972, p. 387].

⁴³ Tirole [1999] fait référence à une « durée optimale endogène » appliquée aux concessions autoroutières, calculée par une règle liée aux valeurs actualisées des revenus futurs bruts. Ce renouveau rétrospectif peut être aussi confirmé si l'on considère que,

le temps, dans les calculs, pour les décisions d'entreprise : il s'agit en particulier de considérer l'intérêt en tant que « prix du temps » et de calculer ce prix parmi les autres coûts et revenus des projets d'investissement, dans une analyse financière comparée.

Comme l'affirme aussi E.F. Fama [1996, p. 427], la mesure de ce prix, ou mieux *ses mesures* posent alors des problèmes d'ordre technique aussi bien que logique, dès qu'il s'agit de situer la décision présente par rapport au développement économique et, en général, aux états futurs de l'entreprise même. Comme on le voit dans l'annexe I, les auteurs contemporains s'interrogent encore, notamment sur la question du remplacement et de son taux correspondant : Duvillard leur suggérerait alors de ne pas réduire cette analyse à une préférence linéaire pour le présent (point a), calculée simplement par un poids négatif exponentiel sur les états futurs (hypothèse de l'intérêt composé).

On peut, au contraire, considérer ces mesures comme la recherche d'une valeur de synthèse propre à comparer les investissements entre eux : il s'agit d'obtenir une quantité simple qu'on puisse substituer aux quantités données sans pourtant altérer notre vision d'ensemble du phénomène considéré. Le calcul mené sur la série de flux quelconques revient ainsi à la recherche d'une moyenne pondérée de la série en question : il faut établir les poids en fonction des exigences envisagées par le sujet décideur⁴⁴. À l'instar de Duvillard, il s'agirait alors d'une valeur actualisée généralisée, notamment avec deux taux d'escompte, l'un pour les flux d'investissement (y) et l'autre pour le remplacement (i)⁴⁵ :

$$\sum_{t=1}^n f(1+i; 1+y; t; a_t) a_t \quad \text{ou bien, dans le continu,} \quad \int_1^n f(y; i; t; a_t) a_t dt.$$

L'hypothèse d'un taux d'escompte unique et celle de l'escompte simple ou composé s'expriment alors par une fonction $f(y; i; t; a)$ qui prend en

entre deux investissements de rentabilité différente, utilisés tous les deux jusqu'à leur durée optimale, le TIRD optimal conduit à choisir, comme le suggérerait le bon sens, celui qui a une rentabilité r majeure.

⁴⁴ Flemming-Wright [1971] font également allusion à la notion de moyenne.

⁴⁵ C'est par souci de simplicité que nous ne généralisons pas ici cette formule à une série de taux au lieu d'un taux unique.

compte la relation entre capitaux et temps envisagée par le décideur, généralement considérée comme indépendante des valeurs de $a(t)$ ⁴⁶.

C'est ainsi qu'on arrive à interpréter l'idée du maximum, véritable cœur des *Recherches*. Le contexte théorique pertinent semble être aujourd'hui celui des «projets co-financés» (*joint-financed projects*), en particulier la question théorique de savoir si plusieurs agents différents peuvent participer au même investissement (point b).

Si l'on sait bien que les phénomènes réels s'éloignent de l'hypothèse de marchés parfaits et complets, on peut néanmoins considérer quelquefois celle-ci comme une sorte d'idéalisation approximative. Le cadre de Duvillard s'écarte pourtant de cet idéal, puisqu'il suppose explicitement deux taux différents pour l'investissement et pour le remplacement, dans un calcul économique éloigné de la logique marchande (§ 10). Malheureusement, nous explique Hirshleifer [1987, p. 994a], la notion de richesse ou valeur actualisée n'est définie sans ambiguïtés que dans le cadre de marchés complets et parfaits. On peut alors définir des critères de choix des investissements indépendants des préférences subjectives prenant en compte les risques et les croyances.

Cet auteur termine alors en imaginant une règle «à l'unanimité» (*unanimity*) dans ces choix d'investissement par l'entreprise (*joint financing projects*), règle qui établit notamment un taux d'escompte conventionnel à employer dans le calcul de la valeur actualisée même avec marchés incomplets ou bien imparfaits.

Dans ce contexte, le maximum proposé par Duvillard pourrait fournir aux décideurs une durée optimale du financement, liée à la rentabilité des investissements en question, qu'on peut appliquer par exemple à l'achèvement endogène d'une concession, alors que le cadre contractuel

⁴⁶ Si l'on accepte l'idée du remplacement des fonds, on sait que les taux internes ne sont pas directement comparables au taux d'intérêt courant : la comparaison usuelle entre le taux dit «*risk-free*» des obligations et la rentabilité de l'investissement devrait en effet s'appuyer sur l'escompte simple, d'où l'on peut tirer soit la valeur actuelle et future, soit le taux interne correspondant. En outre, les différents TIR, calculés à partir des différentes hypothèses de remplacement, peuvent constituer un intervalle d'évaluation, tandis que les techniques usuelles n'élaborent qu'une valeur unique. Enfin, le cas «sans remplacement» (avec i nul), qui exclut de l'analyse le «*time value of money*», pourrait constituer une sorte de cas limite, adapté à l'évaluation de projets avec une prédominance technologique ou stratégique [Baldwin 1959, p. 103a] plutôt que financière : dans ce cas, les sommes ont la même valeur dans tous les instants présents ou futurs : il n'y a aucune préférence établie entre présent et futur [Biondi 2002].

et institutionnel réglant les contrats l'écarte du « marché parfait » par des accords à long terme fixant la tarification, les quantités à produire, les décisions à prendre, etc.

Dans cette direction, il sera intéressant de généraliser le maximum de Duvillard à *des flux quelconques* et de vérifier les conditions d'existence de ce maximum.

10. LA RELATION ENTRE CAPITAL-FONDS ET INTÉRÊT-FLUX

Dans l'analyse de Duvillard, on voit apparaître une idée qui ressemble étrangement à la notion actuelle de « capital à fonds perdu » ; ceci peut nous évoquer aussi, en Angleterre, les travaux du pasteur Richard Price, connu pour ses théories sur l'amortissement des dettes fondées sur le jeu des intérêts composés⁴⁷. Thiveaud [1994, p. 5] explique ainsi cette transition logique et épistémologique :

« Entre l'intérêt simple et l'intérêt composé s'opère un passage d'un temps discontinu à un temps continu, faisant disparaître la distinction entre le capital et son prix dans l'intérêt. L'intérêt composé entraîne un système de crédit plus sophistiqué que celui qui était régi par l'intérêt simple, transformant les définitions du dépôt et du dépositaire. »

Duvillard semble bien considérer tant la dépense initiale que les annuités comme des flux, au moins d'un point de vue analytique et calculatoire⁴⁸. Comme on l'a vu auparavant, les annuités des rentes, aussi bien viagères que perpétuelles, mélangent en effet le remboursement du capital et la remise des intérêts.

Dans un *Mémoire* rédigé en 1790 et repris en l'an XI (1800), Duvillard aborde brièvement l'origine de sa « théorie de l'intérêt de l'argent »⁴⁹ :

« Le calcul [fait par *la mathématique sociale*] ne pourrait s'appliquer immédiatement qu'à une seule chose à la fois, et ses usages seraient très bornés, si les hommes n'avaient été conduits par la nécessité à établir pour les choses une mesure commune

⁴⁷ Comme Duvillard, Price était critique à l'encontre des rentes viagères ; voir [Laboucheix 1970] et [Poitras 2000].

⁴⁸ Voir également [Vasco 1787], qui, dans le cadre général d'un investissement risqué en capital, considère que tout intérêt plus élevé que le niveau courant se transformera en une perte de capital présente ou bien future.

⁴⁹ Il semble qu'il y a une influence entre le « Tableau Général » de Condorcet et ce *Mémoire sur l'utilité d'une place de géomètre du gouvernement et d'une chaire de mathématiques appliquées aux intérêts sociaux* de Duvillard (voir [Israël 1993, p. 48 et 58–59] et [Thuillier 1997, p. 144–145]).

de leur valeur. Mais l'existence de cette mesure commune permet de comparer toutes les choses entre elles, et de les soumettre au calcul malgré leurs différences naturelles dont alors on fait abstraction.

La valeur d'une chose peut n'être pas la même si on la considère comme actuellement et absolument disponible, comme ne l'étant que pour un temps après lequel elle doit cesser de l'être pour le même individu, comme ne devant le redevenir qu'à certaine époque.

Ces diverses considérations s'appliquent à toutes les choses dont on ne peut tirer un service quelconque sans les altérer, ou dont les altérations peuvent être évaluées. De là naît la théorie de ce qu'on nomme intérêt de l'argent » [Duvillard cité par Thuillier 1997, p. 149].

Duvillard établit par là une relation entre la disponibilité d'une chose dans le temps, son usage effectif et sa valeur. Comme pour Condorcet, «la théorie des grandeurs susceptibles d'accroissements proportionnels au temps, [...] renferme celle de l'intérêt de l'argent » [Duvillard, cité par Thuillier 1997, p. 151]. Dans la suite de ce texte, il affirme, encore une fois, l'existence de son maximum, à savoir le résultat le plus remarquable de ses *Recherches*, en particulier dans le cas d'un emprunt. Dans cette perspective, l'intérêt ne peut plus être simplement le «prix» du capital, pour reprendre l'expression de Thiveaud [1994] citée plus haut, mais il devient une conséquence de l'utilisation des fonds mêmes⁵⁰. Dans la logique de Duvillard, aussi bien que chez Condorcet et Vasco, l'escompte demande une justification spécifique, que ceux-ci trouvent en particulier dans l'idée du remplacement effectif des fonds reçus, permettant ainsi le calcul d'équivalence entre présent et futur.

À plusieurs endroits, dans les *Recherches*, l'auteur imagine en effet les fonds empruntés comme destinés à donner des profits :

«J'ai supposé ici que l'emprunteur pouvoit faire valoir au $3\frac{8}{99}$; parce qu'il est censé que tout emprunteur, quel qu'il soit, ne prend des capitaux que pour faire des profits ; tel, par exemple, emprunte au 5 pour faire valoir au 10, & pourroit par conséquent payer le 6. Il est vrai qu'on pourroit imaginer qu'un emprunteur ne fit un emprunt que pour payer une dette ; mais alors il feroit une mauvaise affaire pour lui-même & pour les prêteurs, & il ne trouveroit pas de crédit [...] » [Duvillard 1787, p. 85].

Dans ce contexte, chaque emprunt (ou remboursement) est considéré comme donnant lieu à un placement à un taux donné, l'escompte étant possible et justifié seulement si ce placement (remplacement) existe : ce n'est donc pas un hasard si Duvillard [1787, p. 70–71] conçoit ses calculs à partir de la différence fondamentale entre les emprunteurs, qui détiennent

⁵⁰ Voir également [Vasco 1787, p. 715–716].

réellement les fonds, et les prêteurs, qui ne reçoivent que les remboursements annuels pendant la durée de l'emprunt en question, différence qui le conduit à développer sa théorie de la durée maximale.

D'une part, Duvillard introduit l'idée du capital à fonds perdu, mais de l'autre il considère que toutes les sortes d'emprunt doivent être à but lucratif : on peut ainsi considérer ces emprunts comme « payant les dettes avec les fonds consacrés à cette affaire » [Duvillard 1787, p. 85–86]. Il faut également noter que Duvillard distingue fortement l'activité d'intermédiation des banquiers et les emprunts productifs à finalités lucratives : il ne semble donc pas envisager le rôle du crédit bancaire dans le financement des activités productives.

Son analyse de l'intérêt composé sur le capital investi à fonds perdu n'accepte donc pas l'idée d'aujourd'hui du « *time value of money* », qui fonde l'actualisation sur la notion de coût-opportunité de l'argent⁵¹ : aujourd'hui on considère l'investissement comme un arbitrage entre le présent et le futur ; or les agents n'éprouveraient pas le même attrait pour une satisfaction immédiate et pour une satisfaction à venir ; le taux d'actualisation constitue alors une mesure de l'intensité de la préférence pour le présent (*time preference*), qui existe indépendamment de la notion de taux d'intérêt⁵².

Duvillard imagine au contraire qu'il s'agit d'un remplacement effectif et systématique du capital et de ses intérêts. Les quatre manières d'escompter, prises en compte tout au long des *Recherches* (§ 8), correspondent en effet à plusieurs cas de remplacement, à la fois avec accumulation complète (à intérêt composé) ou partielle (à intérêt simple), ou bien sans aucune accumulation (aucun intérêt tiré du remplacement).

Dans son compte rendu de l'ouvrage de Duvillard, Vasco [1787] conclut également que le véritable « gain perdu » (*lucrum cessans*) ou bien la « perte ajoutée » (*damnum emergens*) sont la justification de l'application des intérêts accumulés (ou composés) à tous les emplois de l'argent, par conséquent que ce calcul est inutile pour quelqu'un qui dissipe son capital sans le faire fructifier.

Si l'on veut situer Duvillard parmi les « précurseurs de l'économie

⁵¹ « *subjective time-preference rate* », selon une expression utilisée par Hirshleifer [1958].

⁵² Néanmoins, si un agent peut placer de l'argent, on considère qu'il s'en prive en échange d'un intérêt, d'où l'idée du coût-opportunité.

mathématique », il faut alors le considérer comme le premier qui ait utilisé la notion d'optimum d'un point de vue de l'agent individuel, en la formalisant par le calcul différentiel⁵³. Même si D. Bernoulli et P. Frisi avaient déjà utilisé le calcul différentiel, le premier ne l'utilisait pas pour optimiser, le deuxième se bornait à calculer un optimum «social». Duvillard calcule quant à lui cet optimum d'un point de vue individuel, on dirait aujourd'hui micro-économique, et parvient à en tirer des conséquences valables pour la collectivité en général, notamment pour l'État. Il associe alors au TIRD la possibilité d'une conciliation exacte entre la charge de l'emprunteur (à savoir l'État) et le bénéfice des prêteurs⁵⁴, calculée par «un ordre économique à établir dans les époques des paiements» [Duvillard 1787, p. 119]. Cependant, on ne peut pas accepter les conclusions suivantes de Baumol et Goldfeld [1968, p. 152] :

«Duvillard de Durand did show noteworthy ingenuity in his approach and may perhaps be considered the father of the (rather unfortunate) internal-rate-of-return measure of the desirability on an investment. »

Par son point de vue analytique et théorique, Duvillard s'applique, en effet, à distinguer le taux apparent pour le prêteur, la rentabilité calculée et le taux courant du marché.

Duvillard ne considère pas le TIRD comme «*the expected rate of return*» au sens qu'à aujourd'hui le mot anticipation, «*expectation*»⁵⁵, ni comme une mesure de désirabilité (*desirability*), mais comme la rentabilité réelle du prêt pour le prêteur : on le constate bien dans son ouvrage comme dans ses «Souvenirs». Comme Vasco [1787] dans son raisonnement, Duvillard [1787] base ses calculs sur la *valeur future* de l'emploi des fonds et se préoccupe également du cadre dans lequel le calcul est fait :

«Je suppose ici que les rentes sont nettes de tous fraix & exemptes de retenues; qu'il n'y a point d'arrière; qu'elles sont constituées sur des têtes bien choisies; que *l'augmentation annuelle du numéraire n'affaiblira point sensiblement la valeur des rentes dans le temps à venir*; & que les banquiers les ont cédées au prix d'achat» [Duvillard 1787, p. 66, note 18, italique ajouté].

Il ne s'agit pas non plus d'une mesure de la désirabilité de l'investissement, que l'auteur considèrerait exprimée, même si c'était de façon trompeuse, par le taux apparent de la rente r .

⁵³ Je dois remercier Paola Tubaro pour ses suggestions.

⁵⁴ Voir également [Thuillier 1997, p. 38].

⁵⁵ Voir [Theocharis 1983, p. 85]

«Or, 1^e. j'ai déjà fait voir que, même dans le cas des annuités constantes, bien loin que les profits d'intérêts des prêteurs augmentent du taux que l'emprunteur supporte, lorsque les annuités sont fortes & de longue durée; ces profits d'intérêts décroissent après un certain temps. Mais 2^e. cette disproportion entre le denier de l'emprunt, & le denier de profit des prêteurs, diminueroit à mesure qu'ils pourroient accumuler à un plus haut intérêt, & s'évanouiroit tout-à-fait s'ils pouvoient accumuler au denier de l'emprunt. Donc il est généralement démontré par là, que dans les rentes viagères à gros denier & de longue durée, l'emprunteur supporte à pure perte une charge d'intérêt dont personne ne profite; que, par conséquent, cette forme de remboursement est alors très-défectueuse & qu'il feroit à souhaiter, pour l'intérêt de tous, qu'on la modifiât de manière qu'elle n'eût point le double inconvénient dont je viens de parler» [Duvillard 1787, p. 69–70].

Dans son compte rendu de Duvillard, Vasco [1787, p. 722 et suiv.] critique lui aussi durement les spéculateurs qui voudraient gagner un taux plus élevé que le niveau courant sans en soutenir les risques et donc les pertes⁵⁶. Il accepte alors le calcul de Duvillard comme la véritable rentabilité de l'emploi pour les spéculateurs.

Enfin, si Duvillard a sans doute recours aux vertus du «calcul économique», il ne semble pas utiliser plus avant l'idée d'un ajustement par le marché, car alors :

- il aurait proposé, à l'instar de Price [1772], des arbitrages sur le cours des rentes (très au-dessous de la valeur dite réelle)⁵⁷ ;
- il aurait remarqué que le taux d'intérêt devrait être unique aussi bien pour le prêt que pour l'emprunt (*Fisher's separation principle*) dans le cadre de ce que nous appelons des «marchés complets et parfaits», ou bien d'un *marché du capital*.

Dans les habitudes de l'époque, le capital et la dette ne sont pas encore, comme dans la théorie économique et financière usuelle aujourd'hui, complètement équivalents d'un point de vue financier. Par son analyse, et par sa conception mathématique, Duvillard fait un pas vers ces théories financières actuelles, mais il reste à un niveau d'abstraction intermédiaire, en conservant le souci d'un réalisme lié aux phénomènes et aux pratiques de son temps.

⁵⁶ Voir note 58.

⁵⁷ À ce sujet, le lecteur français peut se reporter à [Laboucheix 1970, p. 32–36].

11. EN GUISE DE CONCLUSION

Malgré ses contributions à des domaines variés, tels que la démographie, la mathématique sociale, enfin les assurances et les mathématiques financières, l'œuvre de Duvillard a été largement négligée. Selon les études récentes de Thuillier [1997], Israël [1989] et Crépel [1900], ce brillant «géomètre» est l'un des proches de Condorcet et l'un des plus ardents promoteurs de l'application du calcul aux sciences politiques et morales.

Dans cet article, nous avons discuté la contribution économique de l'auteur, dans lequel on peut voir, si l'on veut, un *précurseur* de l'économie financière contemporaine, tant pour l'invention du TIRD que pour l'application du calcul différentiel. Duvillard a ainsi ouvert la piste de l'optimisation du point de vue de l'agent individuel. Toutefois, le décalage entre les époques, les repères intellectuels, les manières de voir et de dire, nous a fait préférer un point de vue *comparatif*.

Les vues économiques de l'auteur lui font développer la logique de l'optimisation et du calcul économique hors du référentiel du marché. Ce point de vue l'éloigne certes de l'approche actuelle, mais lui permet d'inventer une technique originale et adaptée aux conditions financières difficiles de son temps. Nous en avons souligné l'intérêt théorique et pratique pour le lecteur du XXI^e siècle.

ANNEXE I : LA DEUXIÈME NAISSANCE DU 'TAUX INTERNE DE RENTABILITÉ MODIFIÉ'

Bien qu'elles aient déjà été envisagées par la *révolution marginaliste* en économie, commencée à la fin du XIX^e siècle, les techniques d'évaluation des investissements fondées sur la logique de l'actualisation ne s'imposent, au moins d'un point de vue théorique, que dans les années 1950 et 1960.

On est ici face à un paradoxe fréquent dans l'histoire des idées : lorsque cette logique de l'actualisation est devenue dominante, lorsque sa formalisation mathématique a été améliorée, on a mis en évidence des difficultés d'ordre technique et théorique, au moins dans certains cas spécifiques. Ce débat a ainsi soulevé certaines interrogations épistémologiques et fait réapparaître d'une part l'analogie du TIRD inventé par Duvillard, d'autre part des idées bien anciennes telles que la «question du remplacement» (*reinvestment problem*) et de son taux de référence. C'est par exemple le

cas de ce que ces auteurs appellent le « *pump project* », présenté par Lorie-Savage [1955]. Il s'agit (voir [Solomon 1956, p. 128]) de la série de flux suivante :

Période	Flux de trésorerie issu de l'investissement pendant la période
t_0	-\$1.600
t_1	+10.000
t_2	-10.000

L'équation (4) du deuxième degré $VAN_{tir} = 0$ qui définit alors le TIR donne deux résultats : $TIR = 0,25$ ou $TIR = 4$, c'est-à-dire que le taux interne de rentabilité est de 25 % ou bien de 400 %. Lorie et Savage [1955] concluent alors :

« *The [internal] rate-of-return criterion [IRR] for judging the acceptability of investment proposals, as it has been presented in published works, is then ambiguous and anomalous. This is in contrast to the clarity and uniform accuracy of the decisions indicated by the principle proposed earlier, which relates to the present value of an investment at the cost of capital [NPV] rather than to a comparison between the cost of capital and the rate of return* », cité par [Teichroew-Robichek-Montalbano 1965b, p. 161].

Dans ce type de projet, Hirshleifer [1958, p. 349b et suiv.] confirme la validité de la VAN, mais il accepte néanmoins de généraliser le TIR au TIRM⁵⁸.

L'analyse menée par Teichroew-Robichek-Montalbano [...] conduit néanmoins à remettre en question cette préférence des théoriciens, désormais répandue, pour la VAN par rapport au TIR :

« *The present value of project E [pump project] as a function of rate i [...] reaches a maximum of £900 for $i = 100\%$ and then decreases. [...] $DPV = 0$ for $i = 25\%$ and 400% . Under the Discounted Present Value (DPV) rule the project would be acceptable (i.e., $P(i) \geq 0$) if the rate is greater than or equal to 25% but less than or equal to 400% .*

The present value [of project E] is negative for rates less than 25% or greater than 400% ; e.g., $P(.10) = \$ - 760$. Consequently this project would be rejected by firms with $\rho < .25$ and > 4.00 and would be accepted by a firm in which $.25 \leq \rho \leq 4.00$. Clearly there is something strange in the implication that a firm with ρ [discount rate, cost of capital] = $.20$ would not accept this project, but would accept the project if it could only increase its ρ [...] to over 25% ; moreover it would

⁵⁸ Pour la généralisation, Hirshleifer fait référence à E. Solomon [1956].

Pour éviter l'impasse de la multiplicité des taux internes, le débat théorique a ensuite établi des conditions fondées sur la possibilité, largement *ad hoc*, d'interrompre le projet sans coûts ultérieurs (*truncation theorem*); voir [Arrow-Levhari 1969], [Flemming-Wright 1971], [Sen 1975], [Eatwell 1975].

attach a greater and greater value (present value) to the project as it increased its cost of capital up to 100 % » [Teichroew-Robichek-Montalbano, 1965b, p. 161, « romain » ajouté].

Les trois auteurs n'acceptent alors la VAN avec un taux d'intérêt unique que dans certains cas, mais ils introduisent plusieurs taux d'intérêt dans les autres cas : ils proposent alors une méthodologie et une technique spécifique pour généraliser la VAN, fondée sur les soldes successifs du projet.

L'idée d'utiliser plusieurs taux d'intérêt pour généraliser le TIR et la VAN aux projets de type « *pump project* » revient à Solomon [1956]. Cet auteur souligne que, si l'on applique le calcul courant du TIR et de la VAN dans le cas du « *pump project* », on aura des résultats insoutenables : « *The more the pump costs, the more « profitable » the project becomes !* » [Solomon 1956, p. 128b]. En revanche :

« *The correct solution for the investment worth of the [pump] project is simple and straightforward. But it requires an explicit answer to a relevant question : "What is it worth to the investor to receive \$10,000 one year earlier than he would have otherwise received it ?"* » [Solomon 1956, p. 129a].

Il propose ainsi d'introduire le rendement x auquel l'investisseur replace les encaisses du projet, c'est-à-dire le taux de remplacement supposé par Duvillard dans ses *Recherches*.

« *If x is 23 per cent, for example, getting \$10,000 a year earlier is worth \$2,300. In other words, if he spent \$1,600 on the larger pump now (at time t_0), he would end up at time t_2 having \$2,300 more than he otherwise would have had* » [Solomon 1956, p. 129a].

Il s'agit de la même logique que celle appliquée par Duvillard. Le « *pump project* » permet à l'investisseur de gagner \$10,000 au temps t_1 , mais il l'oblige à dépenser la même somme (\$10,000) au temps t_2 ; Solomon [1956] propose alors de calculer le taux auquel la valeur future (au temps t_2) du capital initial (\$1,600) est égale à la valeur future (au temps t_2) des encaisses successives, le taux de remplacement étant $x = 23\%$.

« *This can be stated as an equivalent « rate of return », which in this case would be about 20 per cent (\$1,600 at 20 per cent per annum would amount to \$2,304 at the end of two years). Using this approach, a unique and meaningful rate of return can always be found for any set of cash inflows and outflows* » [Solomon 1956, p. 129a].

Ce « taux équivalent de rentabilité », qu'on a nommé TIRM, a été développé complètement par Baldwin [1959]. Cet auteur refuse néanmoins d'en restreindre l'utilisation au cas dit du « *pump project* » : il considère

au contraire qu'une meilleure compréhension des principes à l'origine du calcul d'actualisation peut conduire à une planification plus efficace et à des profits plus élevés⁵⁹.

« It is to one critical assumption underlying the usual procedure [of present value and IRR] that I take strong exception. The future receipts and payments are reduced to their present value by discounting them at the same rate as that which the proposed investment is estimated to provide.

In other words, management assumes that, for the period between the base point and the time when the funds are spent or collected, the funds are, or could be, invested at the rate of return being calculated for the proposal.

This is simply not true. Indeed, it is only by coincidence that the two would be at all alike. The funds would be at work during the interim period not at a rate similar to that of the proposed investment, but at the average rate at which general corporate funds are being invested — at the over-all value of money to the company [...] It is at this rate that future cash flow must be discounted to reflect its present value in terms of the realities of the particular company's operations⁶⁰ » [Baldwin 1959, p. 98b–99a, « romain » ajouté].

Certains autres auteurs, comme Solomon [1956] ou Teichrow-Robichek-Montalbano [1965]⁶¹, considèrent que la méthode TIRM est valable seulement dans les cas où le TIR ne marche pas bien. Néanmoins, Baldwin [1959], Athanasopoulos [1978] et également Lin [1976] le considèrent comme un critère général de choix, en particulier parce qu'il est unique et facile à calculer dans tous les cas.

« The salient advantage of Effective Rate of Return [ERR] method [ici, TIRM], compared to all others, is that it combines the recognized reliability of the present worth criteria with the ease of interpretation and understanding inherent in a rate of return (percentage) analysis [...].

In view of this clear advantage of the ERR technique, serious consideration as the sole criterion for investment profitability is merited » [Athanasopoulos 1978, p. 132b].

Dans ce cadre, l'analyse menée par Duvillard autour de la relation entre le TIRM et le temps, pourrait se voir investie d'une certaine modernité. À ce propos, nous avons dépouillé les études classiques des dernières décennies sur ce thème, sans aucune prétention à l'exhaustivité : l'auteur qui a mieux abordé le problème du rapport entre le TIRM et le temps est Baldwin [1959], sans pourtant évoquer l'existence et l'interprétation

⁵⁹ Sur le thème du « *discounting approach* », voir également [Price 1993].

⁶⁰ [Baldwin 1959, p. 99a]. Notons ici que, même si un changement dans le niveau de ce taux influence la rentabilité interne du projet, néanmoins il ne change pas le classement relatif (*ranking*) entre les différentes alternatives.

⁶¹ Voir [Athanasopoulos 1978] pour d'autres références.

du maximum trouvé par Duvillard. Bernhard [1979] mentionne en passant l'existence de ce maximum, mais seulement pour critiquer l'utilisation des indicateurs du type TIRM.

ANNEXE II : LES TERMES PRINCIPAUX ET LEUR TRADUCTION EN ANGLAIS

<i>sigle</i>	<i>français</i>	<i>anglais</i>
TIRD*	«taux interne de rentabilité» dans la définition donnée dans les <i>Recherches</i> [1787]	
TIRM*	«taux interne de rentabilité modifié»	<i>Modified Internal Rate of Return (MIRR), Equivalent Rate of Return (ERR)</i>
TIR	«taux interne de rentabilité»	<i>Internal Rate of Return (IRR)</i>
VA	«valeur d'un montant actualisée au moment initial»	<i>Present Value (PV)</i>
VFN*	«valeur future nette» : valeur actualisée au temps t dans le futur d'une série de flux positifs et négatifs	<i>Net Future Value (NFV)</i>
VAN	«valeur actuelle nette» : valeur actualisée au moment initial d'une série de flux positifs et négatifs	<i>Net Present Value (NPV)</i>
VF	«valeur future» : valeur d'un montant actualisée au temps t dans le futur	<i>Future Value (FV)</i>
a	annuité/s	<i>Annuity/ies</i>
VAS*	«valeur actuelle simple» : valeur actualisée au moment initial d'une série de flux positifs et négatifs, replacés à intérêt simple	<i>Simple Present Value (SPV)*</i>
VFS*	«valeur future simple» : valeur actualisée au temps t dans le futur d'une série de flux positifs et négatifs, replacés à intérêt simple	<i>Simple Future Value (SFV)*</i>

Le signe (*) indique que ces sigles sont introduits par nous, les autres étant usuels.

**ANNEXE III : CORRESPONDANCE ENTRE
E.-E. DUVILLARD ET C. BONNET**

Extraits des correspondances de Charles Bonnet et de Emmanuel-Étienne Duillard (Bibliothèque publique et universitaire de Genève)⁶².

1) *Extrait d'une minute de lettre de Bonnet adressée à «Paris; Mr Bailly de l'Académie Royale des Sciences» et datée du 10 août 1786 (MS Bonnet 77, ff 32v-33r)*

A Genthod le 10^e d'Aout 1786

[...] Je remets cette lettre à un jeune et estimable Citoyen de notre Ville, plein d'ardeur pour les Mathématiques, qui va à Paris pour présenter à l'Académie des Sciences un ouvrage manuscrit, sur l'application du Calcul Intégral aux Matiere de Finance ou d'Intérêt. Mr Du Villard, c'est le nom du jeune Mathématicien, désireroit vivement que l'Académie voulut bien lui accorder des commissaires pour l'examen de son Ecrit, mais je ne lui ai pas caché que l'approche des Vacances me donnoit lieu de présumer qu'il n'obtint pas sa demande dans le courant de ce mois. Vous en jugerez mieux que moi, & si vous daignez le diriger dans sa démarche, il en sera extrêmement reconnoissant. [...] (*f 33*)

2) *Lettre de Du Villard à Bonnet du 3 septembre 1786 (MS Bonnet 39, ff 200-201, lettre n° 61)*⁶³.

Monsieur

Telle est la vénération que M. Baylli et toute l'Academie ont pour vous, et tel est l'heureux effet de votre précieuse recommandation, que sans même avoir eu besoin d'implorer la bonté de Mrs les Academiciens, j'ai obtenu qu'on nomma tout de suite des commissaires pour examiner mon ouvrage et qu'aujourd'hui je possède l'aprobation de cette illustre Académie en des termes beaucoup plus flatteurs que je n'aurois osé

⁶² Je dois remercier Pierre Crépel pour cette exploration des fonds genevois. Nous avons conservé l'orthographe des manuscrits.

N.B. Le catalogue de la correspondance de Charles Bonnet (établi par Jean-Daniel Candaux) indique (MS Bonnet 80) une autre lettre ultérieure de Bonnet à Duillard (12 novembre 1788) et deux à Peschier fils (11 novembre 1786 et 28 mars 1787).

⁶³ En bas à gauche de la première page était écrit « M. Bonnet ».

l'esperer. L'extrême bienveillance avec laquelle vous eutes la bonté de recevoir lorsque je [verso] fis violence à la timidité pour aller implorer votre protection a été le commencement d'un bonheur qui n'a cessé jusqu'à présent de combler mon existence. Elle fit sur moi une impression que je n'oublierai jamais. Elle me convainquit par la plus douce experience que sur la terre l'humanité et toutes les vertus pouvaient se trouver réunies au plus grand génie et que cette idée si chere aux âmes sensibles n'était bien certainement pas à mettre au rang de quelques unes de la Republique de Platon. Ah que tous les jeunes gens n'ont-ils pu être à ma place!

J'eus ensuite le bonheur de voir de près et de converser avec M. Baylli, cet Astronome, Peintre, poète moraliste et historien, en un mot cet homme grand par le genie et par le cœur. Son aménité et sa bonté pour moi fut la suite la plus douce que je pusse imaginer de celle avec laquelle vous daignates [201] m'accueillir. J'eus ensuite le bonheur d'assister à une Séance particuliere de l'Academie et de lui présenter moi même mon ouvrage, ce qui fut encore une époque extremement interessante pour moi qui de toutes les Dignités n'en conçoit point de plus belle que de mériter d'en être membre. — On me nomma M. De Condorcet et M. Cousin pour examinateurs, deux Juges bien redoutables. Mais aparamment M. Bailly daigna charmer pour moi leurs oreilles de quelques accords de sa lyre et dès lors ils m'accorderent leur indulgence et leurs encouragemens. Enfin monsieur, je ne puis mieux vous exprimer jusqu'à quel point ces Juges sont prevenus en ma faveur, qu'en vous disant qu'ils croyent que je possede assez bien le calcul pour pouvoir me laisser le maitre de refondre et d'augmenter mon ouvrage à ma volonté ce dont assurément je n'abuserai pas. [v]

Voila Monsieur, malheureusement, tout ce qu'il est en mon pouvoir de faire pour vous témoigner ma reconnaissance : Je ne puis que vous présenter et vous faire un tendre hommage des biens que j'ai reçu de vous. Mais cet hommage est pur, il vous est présenté par une ame franche et honnête et l'autel est arrosé par des larmes de joye et de reconnaissance qui ne tariront jamais en pensant au service que vous m'avez rendu. Cet hommage n'est rien mais il est cependant tout pour moi et la créature n'en offre jamais d'autre au ciel qui la fit naitre . . . Veuillez être satisfait.

J'ai l'honneur d'être
Monsieur

Votre très humble
 et très obeissant serviteur
 Du Villard rouviere
 Paris ce 3 7bre 1786

3) *Lettre de Peschier fils à Bonnet du 9 septembre 1786 (MS Bonnet 39, f 203, lettre n° 62)*⁶⁴.

Monsieur

J'ai un devoir bien doux et honorable pour moi à remplir en ce moment, c'est de vous présenter cette lettre qui renferme les sentimens de gratitude et de vénération de Mr Duvillard : j'avois été le témoin de la vive impression qu'avoit faite sur lui la bonté avec laquelle vous l'accueillites, quoiqu'il n'eut l'honneur d'être connu de vous par ce que j'avois la liberté de vous exposer ; cette impression étoit neuve pour lui, il n'avoit jamais eu le bonheur d'apprendre par expérience que les vrais philosophes et les plus profonds génies sont pleins d'indulgence et toujours disposés à encourager et à aider efficacement ceux qui ont l'intention de bien faire ; il partit profondément pénétré de tout ce que vous aviez fait pour lui et conçut dès lors les plus flatteuses espérances : vous verrés Monsieur par sa lettre et par l'extrait des Régistres de l'Académie, comment elles se sont réalisées et quelle a été l'heureuse influence de vôtre recommandation ; cet effet n'étoit pas douteux, mais vous apprendrés Monsieur avec plaisir [*verso*] que le travail de Mr Duvillard ait paru répondre à l'idée qu'on devoit concevoir d'un homme pour qui vous daigniez témoigner de l'estime, et cette approbation qu'il a mérite justifie la hardiesse que j'avois eue de vous intéresser en sa faveur.

Permettés Monsieur que je joigne mon hommage à celui de Monsieur Duvillard ; honoré moi même de vôtre bienveillance, vos bontés pour mon ami ajoutent encore à ma respectueuse reconnaissance ; puissè-je par ce sentiment du moins en mériter la continuation !

mon Pere vous prie d'agréer avec Madame Bonnet et Monsieur le Pasteur Bennelle l'expression de son respect.

Je suis avec une profonde vénération

⁶⁴ L'extrait des registres de l'Académie des sciences est effectivement joint au f 202 ; cet extrait a été publié dans l'ouvrage lui-même et reproduit par divers auteurs.

Monsieur
 Votre très humble et très obeissant
 Serviteur
 Peschier fils
 Plainpalais 9 sept : 1786

4) *Minute de la réponse de Bonnet adressée à «Paris, Mr Duvillard jeune Geometre» et datée du du 11 septembre 1786 (MS Bonnet 77, f 37v).*

A Genthod, le 11^e de septembre

Le peu que j'ai fait pour vous, Monsieur, ne méritoit pas une lettre aussi obligeante que la vôtre, & qui me peint si bien la sensibilité de votre Âme & l'honnêteté de votre caractère. j'en ai été, je vous assure, fort touché, et c'est avec un vrai plaisir que je partage la satisfaction si douce & si bien méritée que vous donne un succès que votre modestie ne vous laissoit pas augurer. Il ne vous manquoit que d'être connu de cette Académie, la premiere de l'Europe, dont vous ambitionniez l'approbation, comme la récompense la plus glorieuse de votre travail. Vous l'avez obtenue, cette approbation, et d'une maniere d'autant plus flatteuse qu'elle est exempte de toute réserve. Jouissez Mons. d'un triomphe que vous ne devez qu'à vos talens et à l'estime qu'ils ont inspirée pour vous à vos Juges. Je n'ai été que le canal de communication entre vous et Mr Bailly, et si quelque recommandation a pu influencer sur le bon accueil que vous a fait l'Académie, c'est principalement celle de cet excellent Académicien, qui jouit à si juste titre de l'estime publique. Je lui dirai votre reconnoissance et la mienne. Continuez, Monsieur, à vous livrer à des recherches qui vous promettent de nouveaux succès & de nouvelles marques de l'estime de l'Academie. Vous ne prévoyez pas comme moi, ce qu'elle pourroit vous accorder un jour ; mais vous croirez du moins aux assurances sincères de mes sentimens pour vous et du plaisir que je goûterai toujours à vous être utile.

ANNEXE IV : LES RECHERCHES (1787) DE DUVILLARD, LA STRUCTURE DE L'OUVRAGE

L'ouvrage est organisé par l'auteur en six parties :

1. Exposition du sujet (p. 1-17)
2. Annuités constantes (p. 18-38)

3. Annuités croissantes ou décroissantes (p. 38–54)
4. Rentes viagères (p. 54–83)
5. Moyens de faire jouir les prêteurs des plus grands avantages qu'ils puissent avoir dans les rentes viagères, sans qu'il en coûte autant à l'emprunteur (p. 83–115)
6. Récapitulation

On peut distinguer deux parties dans l'analyse développée par Duvillard dans les *Recherches* :

- 1) l'analyse théorique, véritable cœur de l'ouvrage (parties 1, 2, 3) ;
- 2) son application aux rentes viagères (parties 4, 5).

Dans le cadre théorique de notre analyse, nous avons surtout abordé le premier aspect, en examinant en particulier les calculs économiques de Duvillard.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie historique

CONDORCET (Marquis de)

- [1994] *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits (1767-1789)*, édition critique commentée par Bernard Bru et Pierre Crépel, Paris : Institut National d'Études Démographiques, 1994.

DUVILLARD DE DURAND (Emmanuel-Étienne)

- [1787] *Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements*, Paris et Genève 1787.
- [1806] *Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole à chaque âge et de celle qu'un préservatif tel que la vaccine peut avoir sur la population et la longévité*, Paris : Imprimerie Impériale, 1806.

VASCO (Gian Battista)

- [1787] *Compte rendu des Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements*, *Biblioteca Oltremontana*, XI (novembre 1787), p. 115–156, in Vasco (G.B.), *Opere*, I, Torino : Fondazione Einaudi, 1989, p. 707–726.

WALRAS Léon

- [1900] *Éléments d'économie politique pure*, IV^e édition définitive, Lausanne 1900.

Ouvrages et articles autour de Duvillard et de son époque

BARDET (Jean-Pierre)

- [1977] Aux origines du Bureau de la Statistique : Duvillard de Durand (1755–1832), *Population et Société*, 4 (1980), p. 154–164.

- BAUMOL (J. William) & GOLDFELD (M. Stephen), éd.
 [1968] *Precursors in Mathematical Economics : An Anthology*, ch. 10 : Duvillard de Durand, J.H.T. : Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements, Paris and Geneva, 1787, excerpts from p. 1–22, London : London School of Economics, 1968.
- BIONDI (Yuri)
 [2002] *Les Recherches sur les rentes, les emprunts et les remboursements* par M. Duvillard (Genève 1787) et le taux interne de rentabilité, CAMS n°205, Série *Histoire du calcul des probabilités et de la statistique* n°47, Paris : EHESS, février 2002.
- BIRABEN (J.N.)
 [1970] La statistique de la population sous le Consulat et l'Empire, *Revue d'histoire moderne et contemporaine*, 17 (1970), p. 359 et suiv.
- CRÉPEL (Pierre)
 [1990] Les calculs économiques et financiers de Condorcet pendant la Révolution, *Économies et Sociétés*, série (Economia, 13 (1990), p. 339–350.
- DASTON (Lorraine)
 [1988] *Classical Probability in the Enlightenment*, New Jersey : Princeton University Press, 1988.
- DESROSIÈRES (Alain)
 [2000] *La politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*, Paris : La Découverte, 2000.
- DUPÂQUIER (Jacques et Michel)
 [1985] *Histoire de la démographie. La statistique de la population des origines à 1914*, Paris : Librairie Académique Perrin, 1985.
- ISRAËL (Giorgio)
 [1991] El declive de la matemática social y los inicios de la economía matemática en el contexto de los avatares del Institut de France, LLULL, *Revista de la Sociedad española de historia de las ciencias y de las técnicas* (1991), p. 59–116.
 [1993] The two Paths of the Mathematization of the Social and Economic Sciences, *Physis*, 30 (1993), p. 27–78.
- JONCKHEERE (W.G.)
 [1965] La table de mortalité de Duvillard, *Population*, 20 (1965), p. 865–874.
- LABOUCHEIX (Henri)
 [1970] *Richard Price, Théoricien de la Révolution américaine*, Paris : Didier, 1970.
- LE GOFF (Jacques)
 [1986] *La bourse et la vie. Économie et religion au Moyen Âge*, Paris : Hachette, 1986.
- POITRAS (Geoffrey)
 [2000] *The Early History of Financial Economics (1478-1776) : From Commercial Arithmetic to Life Annuities and Joint Stocks*, Cheltenham : Elgar, 2000.
- PORTER (M. Theodore)
 [1995] *Trust in Numbers : The Pursuit of Objectivity in Science and Public Life*, Princeton : Princeton University Press, 1995.
- RASHID (Salim)
 [2002] Review of [Poitras 2000], publiée par EH.NET, février 2002, <http://www.eh.net/BookReview>.

STELLING-MICHAUD (S. et S.)

- [1972] *Le livre du recteur de l'Académie de Genève (1559-1878)*, t. III, Genève : Droz, 1972.

THEOCHARIS (D.R.)

- [1983] *Early Developments in Mathematical Economics*, 2nd ed., London : MacMillan, 1983, p. 84-85.

THIVEAUD (Jean-Marie)

- [1994] Condorcet, prévoyance, finance et probabilités entre raison et utopie, colloque *Monnaie et Finances chez Condorcet*, Université Lyon2 – MRASH, Lyon, 17-18 juin 1994 (sous forme manuscrite).

- [1996] Le risque et son prix : genèse d'un concept et de son évaluation juridico-financière (XIV^e-XVII^e siècles, *Revue d'économie financière*, 37 (1996), p. 253-274.

THUILLIER (Guy)

- [1997] *Le premier actuaire de France : Duillard (1755-1832)*, Paris : Comité d'histoire de la Sécurité sociale, 1997.

WISE (Norton W.) éd.

- [1995] *The Values of Precision*, Princeton : Princeton University Press, 1995.

Ouvrages et articles autour du taux interne de rentabilité (TIR) et à l'actualisation

ALCHIAN (A. Armen)

- [1995] The rate of interest, Fisher's rate of return over costs and Keynes' internal rate of return, *The American Economic Review*, XLV (december 1955), p. 938-942.

ARROW (J. Kenneth) & LEVHARI (David)

- [1969] Uniqueness of the internal rate of return with variable life of investment, *Economic Journal*, LXXIX (1969), p. 560-566.

ATHANASOPOULOS (P.J.)

- [1978] A note on the modified internal rate of return and investment criterion, *The Engineering Economist*, 23 (1978), p. 131-133.

BALDWIN (H. Robert)

- [1959] How to assess investment proposals, *Harvard Business Review*, 37 (1959), p. 98-104.

BERNHARD (R.H.)

- [1979] Modified rates of return for investment project evaluation. A comparison and critique, *The Engineering Economist*, 24 (1979, p. 161-167).

BIERMAN (Harold Jr.) & SMIDT (Seymour)

- [1993] *The Capital Budgeting Decision. Economic Analysis of Investment Projects*, 8th ed., New York : MacMillan, 1993.

DEAN (Joel)

- [1954] Measuring the productivity of capital, *Harvard Business Review*, 32 (1954), p. 120-130.

EATWELL (John)

- [1975] A note on truncation theorem, *Kyklos*, 28 (1975), p. 870-875.

FAMA (F. Eugene)

- [1996] Discounting under uncertainty, *The Journal of Business*, 69 (1996), p. 415-428.

- FLEMMING (J.S.) & WRIGHT (J.F.)
 [1971] Uniqueness of the internal rate of return : A generalisation, *Economic Journal*, LXXXI (1971), p. 256–263.
- GINTSCHEL (Andreas)
 [1999] Beyond Fisher's NPV? Much Ado About Nothing!, dans Loef (H.-E.) et Monissen (H.G.), éd., *The Economics of Irving Fisher*, UK-USA : Edward Elgar, 1999, p. 326–334.
- HIRSHLEIFER (Jack)
 [1958] On the theory of optimal investment decision, *The Journal of Political Economy*, LXVI (1958), p. 329–352.
 [1987] Investment decision criteria, in *The new Palgrave. A Dictionary of Economics*, London : Mac Millan, 1987, p. 971–994.
- JOHNSON (H. Thomas) & KAPLAN (S. Robert)
 [1987] *Relevance Lost. The Rise and Fall of Management Accounting*, Boston Mass. : Harvard B. School Press, 1987.
- JONES (W. Thomas) & SMITH (J. David)
 [1982] An historical perspective of net present value and equivalent annual cost, *Accounting Historians Journal*, 9 (1982), p. 103–110.
- KLAMMER (Thomas)
 [1972] Empirical evidence of the adoption of sophisticated capital budget techniques, *The Journal of Business*, 45 (1972), p. 387–397.
- LAIBSON (David)
 [1997] Golden eggs and hyperbolic discounting, *The Quarterly Journal of Economics*, 112 (1997), p. 443–477.
- LIN (A.Y. Steven)
 [1976] The modified internal rate of return and investment criterion, *The Engineering Economist*, 21(1976), p. 237–247.
- LOEWENSTEIN (George) & THALER (H. Richard)
 [1989] Anomalies : Intertemporal choice, *Journal of Economic Perspectives*, 3 (1989), p. 181–193.
- MILLER (Peter)
 [1998] The margins of accounting, *The European Accounting Review*, 7 (1998), p. 605–621.
- NEGRETE (L. Gabriel)
 [1978] The modified internal rate of return and investment criterion, a reply, *The Engineering Economist*, 23 (1978).
- PARKER (R.H.)
 [1968] Discounted cash-flow in historical perspective, *Journal of Accounting Research*, (1968), p. 58–71.
- PRICE (Colin)
 [1993] *Time, Discounting and Value*, Blackwell : Oxford and Cambridge, 1993.
- ROBINSON (Romney)
 [1956] The rate of interest, Fisher's rate of return over costs and Keynes' internal rate of return : Comment, *The American Economic Review*, XLVI (1956), p. 972–973.
- SAMUELSON (A. Paul)
 [1937] Some aspects of the pure theory of capital, *The Quarterly Journal of Economics*, LI (1937), p. 469–496.

SCHLACTHER (Didier)

- [1989] *Calcul financier. Initiation pratique*, notamment ch. 7 : Les choix d'investissement, Paris : Hachette, 1989, p. 85–96.

SEN (Amartya)

- [1975] Minimal conditions for monotonicity of capital value, *Journal of Economic Theory*, 11 (1975), p. 340–355.

SOLOMON (Ezra)

- [1956] The arithmetic of capital-budgeting decisions, *The Journal of Business*, XXIX (1956), p. 124–129.

- [1987] Capital budgeting, in *The new Palgrave. A Dictionary of Economics*, London : Mac Millan, 1987, p. 341–342.

STIGUM (M.)

- [1982] *Money Market Calculations*, New York : Dow Jones-Irwin, 1982.

TEICHROEW (Daniel) & ROBICHEK (A. Alexander) & MONTALBANO (Michael)

- [1965a] Mathematical analysis of rates of return under certainty, *Management Science*, 11 (1965), p. 395–403.

- [1965b] An analysis of criteria for investment and financing decisions under certainty, *Management Science*, 12 (1965), p. 151–179.

TIROLE (Jean)

- [1999] Concessions, concurrence et incitations, *Revue d'économie financière*, 51 (1999), p. 63–80.