Revue d'histoire des mathématiques,
8 (2002), p. 207–262.

WALLIS ENTRE HOBBES ET NEWTON
LA QUESTION DE L'ANGLE DE CONTACT
CHEZ LES ANGLAIS [1]

François Loget (*)

Résumé. — Cet article traite d'un aspect de la controverse qui a opposé Hobbes et Wallis dans la deuxième moitié du XVII$^{\text{e}}$ siècle, celui portant sur l'angle de contact. Wallis a publié deux traités sur l'angle de contact, l'un en 1656, l'autre en 1685. Entre ces deux dates sa position sur la question de l'angle de contact a sensiblement évolué. Durant la même période, il s'est opposé à Hobbes sur divers sujets de mathématiques, dont l'angle de contact. J'étudie les positions des deux protagonistes à travers les différents textes qu'ils ont consacrés à cette question, y compris dans leurs publications polémiques. J'étudie enfin deux textes écrits durant la même période dans lesquels Newton aborde la question de l'angle de contact et élabore la solution qu'il publiera dans les *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Je défends l'hypothèse que Wallis a été poussé à changer sa manière de considérer l'angle de contact d'une part pour réagir à la solution originale proposée par Hobbes et d'autre part pour prendre en compte l'évolution de la conception des objets mathématiques issue du développement des mathématiques infinitésimales.

Abstract. — Wallis between Hobbes and Newton. The question of the horn angle in England. — This paper treats an aspect of the dispute during the second half of the 17th century between Thomas Hobbes and John Wallis concerning the horn angle. Wallis published two treatises on this subject, one in 1656,

(*) Texte reçu le 3 octobre 2002, révisé le 19 mars 2003.
François Loget, Université de Caen (CERLA), MRSH, 14032 Caen Cedex (France).
francois.loget@mrsh.unicaen.fr

Mots clés : Hobbes, Wallis, Newton, géométrie, angle de contact.

Classification AMS : 01A45.

[1] L'étude qui suit prolonge le dernier chapitre de ma thèse [Loget 2000] et a été réalisée pour l'essentiel grâce à une bourse post-doctorale de la Maison française d'Oxford. Marco Panza et Patricia Radelet-de Grave ont bien voulu en lire une version préliminaire et m'adresser leurs conseils. J'ai aussi été sensible aux observations des deux rapporteurs auxquels cet article a été soumis. Qu'il me soit permis ici de tous les remercier.

the other in 1685. During this time, his views on the question of the horn angle changed perceptibly, as he confronted Hobbes on various mathematical topics, including the horn angle. Here, I analyze the positions of both protagonists via the texts they wrote throughout their polemic. I also explore two texts written by Newton during the same period, in which he treats the question of the horn angle and presents the solution he would soon publish in the *Philosophiae naturalis principia mathematica.* I argue that Wallis was led to change his interpretation of the horn angle both in reaction to the solution originally proposed by Hobbes and to accommodate changing views on mathematical objects resulting from the development of infinitesimal mathematics.

Au début du Livre I des *Éléments*, Euclide donne les deux définitions suivantes :

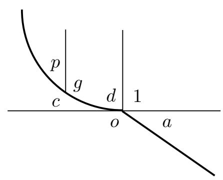
I,8 : Un *angle plan* est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite.

I,9 : Et quand les lignes contenant l'angle sont droites, l'angle est appelé *rectiligne*.

La première de ces définitions énonce quatre conditions pour que deux lignes forment un angle : l'inclinaison, le contact en un point, le fait que ces deux lignes sont situées dans le même plan et enfin celui qu'elles ne sont pas placées « en ligne droite » — condition qui exclut le cas de l'angle aujourd'hui dit « plat ».

Si la définition I,8 définit le *genre* angle en toute généralité, la suivante définit une espèce, l'angle rectiligne. Ce duo de définitions laisse donc entendre qu'Euclide, s'il privilégie les angles rectilignes (les seuls dont il fasse véritablement la théorie dans les *Éléments*), n'exclut pas pour autant du domaine de la géométrie d'autres espèces d'angles, les *curvilignes* et les *mixtes*, formés les uns par deux lignes courbes, les autres par une courbe et une droite. Les trois définitions suivantes (I,10, I,11 et I,12), où est défini l'angle droit et où sont distingués les angles aigus et obtus, laissent envisager que deux de ces angles étant donnés, on pourra en toutes circonstances les *mesurer*, c'est-à-dire s'assurer que l'un est plus grand que, plus petit que ou égal à l'autre. Ces cinq définitions suffisent à donner à l'angle, *ou du moins à l'angle rectiligne*, le statut d'une grandeur au sens euclidien. Mais dans une des quelque 480 propositions que comptent les *Éléments*, apparaissent presqu'inopinément deux angles *mixtes* : l'angle de contact et l'angle du demi-cercle. Présentons-les, en compagnie des autres angles, rectilignes et mixtes, au moyen d'une figure et de quelques notations :

— angle droit : 1,
— angle aigu rectiligne : a,
— angle obtus rectiligne : o,
— angle du demi-cercle : d (angle compris entre la circonférence et le diamètre),
— angle de contact : c (angle compris entre la circonférence et la tangente),
— angle du segment plus grand que le demi-cercle : g,
— angle du segment plus petit que le demi-cercle : p.



À la fin de la proposition III,16, l'angle de contact est dit « plus petit que tout angle aigu rectiligne ». Euclide montre aussi, dans cette même proposition, que l'angle du demi-cercle est « plus grand que tout aigu rectiligne ». Un peu plus loin, en III,31, il montre encore que l'angle du segment plus petit que le demi-cercle est plus petit que l'angle droit et l'angle du segment plus grand que le demi-cercle, plus grand que l'angle droit. Déjà la définition I,9 autorisait à penser que les angles mixtes étaient, au même titre que les rectilignes, des *grandeurs*, au sens défini plus haut. Les propositions III,16 et III,31, en établissant des inégalités entre angles mixtes et rectilignes, semblent le confirmer. Pourtant, la démonstration de III,16, qui fait de l'angle de contact une sorte de « grandeur minimale » et de l'angle du demi-cercle une « grandeur maximale », a attiré l'attention des géomètres dès l'Antiquité, comme en témoignent en particulier les commentaires de Proclus. Cette attention ne s'est pas démentie dans les commentaires médiévaux, occidentaux ou arabes. Cet objet ne satisfait pas un réquisit pourtant commun à toutes les grandeurs reçues dans la géométrie d'Euclide : multiplié « autant de fois qu'on veut », suivant les termes de la proposition X,1 (dite aussi « axiome d'Archimède »), il ne surpasse jamais un angle rectiligne, si petit soit-il. Si l'angle de contact et le rectiligne sont des grandeurs homogènes, ne doivent-ils pas avoir une mesure commune ? S'ils n'en ont pas, l'angle de contact est-il vraiment de même genre que le rectiligne ? Est-il seulement un angle ?

Au début de l'époque moderne, un nouvel examen du texte d'Euclide a remis ces interrogations à l'ordre du jour. La dynamique de l'humanisme impose un retour à un texte des *Éléments* que l'on rêve authentique, débarrassé d'altérations qu'on impute aux médiévaux. C'est dans les éditions d'Euclide imprimées dès la fin du XV^e^ siècle, en Italie dans le premier tiers du XVI^e^ siècle, et en France, dans les milieux humanistes, qu'un débat sur la « restauration » des *Éléments* stimule la réflexion sur l'angle de contact. Bientôt, une vive querelle s'engage, diffusée dans quelques textes, opuscules ou éditions des *Éléments* publiés entre 1557 et 1593, dans lesquels des arguments sur le problème sont proposés et opposés. Son point de départ est la lecture que donne Peletier de la proposition III,16 d'Euclide [Peletier 1557 ; 1563]. Ce qui fait d'abord scandale pour beaucoup de ses lecteurs, c'est l'affirmation que « la géométrie n'est pas si certaine qu'on le dit et contient même des contradictions » : dans la partie de la proposition III,16 concernant l'angle de contact, Euclide aurait commis une erreur. Pour la corriger, Peletier modifie la définition de l'angle et argue que le « contact n'est pas un angle ». Face à lui, les voix de mathématiciens humanistes s'élèvent pour (comme le dira l'un d'eux) restaurer l'honneur d'Euclide.

L'opposition la plus forte vient du Père Clavius [1574 ; 1589]. Au cours de leur polémique, Peletier et Clavius explorent profondément la question, mais ni l'un ni l'autre n'ont encore les moyens de la résoudre. En s'efforçant d'éclaircir la nature de l'angle de contact, Peletier est conduit à admettre un objet géométrique « sans grandeur ». Quant à Clavius, sa tentative de résoudre le paradoxe de l'angle de contact dans un cadre strictement euclidien est sans issue.

À la suite de Peletier et Clavius, beaucoup de mathématiciens, entre la fin du XVI^e^ siècle et les années 1650, se sont penchés sur le problème de l'angle de contact, mais il n'a à ma connaissance été abordé par aucun commentateur anglais d'Euclide durant cette période[2]. Sans doute cela

[2] Si ce n'est, très brièvement, de la part du premier d'entre eux, Henry Savile, dans son seul ouvrage publié, les *Prælectiones* [Savile 1621] mais aussi dans des notes de cours manuscrites que Wallis citera. Un autre auteur anglais, Thomas White a abordé la question de l'angle de contact dans son traité *De mundo* [White 1642, *Nodus XI*, p. 236–239]. Ce passage sur l'angle de contact apparaît au détour d'une discussion des

tient-il au fait que l'édition et le commentaire des *Éléments* a pris très vite, outre-Manche, une dimension pédagogique. Chez un Barrow par exemple, il faut effacer les problèmes internes aux *Éléments*, pour en faire un outil d'enseignement.

C'est pourtant en Angleterre que la querelle de l'angle de contact va connaître un de ses épisodes les plus violents mais aussi son issue. Hobbes entreprend de corriger, dans le *De corpore* [Hobbes 1655], les principales définitions du Livre I d'Euclide. Il modifie la définition de l'angle et propose une solution à la question de l'angle de contact qui ne doit plus rien ni à Peletier ni à Clavius[3]. Au même moment, Wallis défend et prolonge la réflexion de Peletier dans une *Disquisitio geometrica.* Et lorsque s'engage la longue polémique entre les deux hommes sur diverses questions de mathématiques, l'angle de contact apparaît naturellement comme un point de fixation. Hobbes s'efforce dans la plupart de ses publications polémiques ultérieures de contester la position de Wallis sur ce sujet. Quant à Wallis, sa position évolue entre 1656 et 1685, année où paraît un opuscule dans lequel il adopte un point de vue proche de celui de son adversaire désormais décédé.

Le second opuscule de Wallis sur l'angle de contact paraît lorsque Newton arrive au terme du cheminement intellectuel qui débouche sur la publication des *Philosophiæ naturalis principia mathematica* où il donne une solution du problème qui clôt le débat sur l'angle de contact. Et bien avant les *Principia*, il avait pris parti sur cette question. J'étudie ci-après les positions de ces trois auteurs sur l'angle de contact[4].

---

positions de Galilée sur le mouvement circulaire. C'est donc une digression et c'est la seule question de géométrie abordée dans cet ouvrage tout entier consacré à la philosophie naturelle.

[3] Dans un commentaire inédit au *De mundo* composé en 1643, Hobbes avait déjà pris parti sur l'angle de contact [Hobbes 1973, chap. XXIII, p. 268–288]. Il critiquait Clavius et se rangeait à l'avis de Peletier dont il jugeait toutefois certains arguments insuffisamment démontrés. Il engageait dès cette date la critique des définitions d'Euclide et la réflexion sur la nature de l'angle qui aboutit au texte du *De corpore* étudié ci-après. Je dois à l'un des rapporteurs de cet article d'avoir pris connaissance de ce premier texte sur l'angle de contact qui aurait mérité un plus long commentaire.

[4] Luigi Maierù a consacré à quelques épisodes de la querelle de l'angle de contact quatre articles [Maierù 1984 ; 1988 ; 1990 ; 1992] qui demeurent des études de référence. La question que j'aborde ici a été évoquée très brièvement par Malet [1997]. Plus généralement, la controverse entre Hobbes et Wallis a fait l'objet d'une belle

1. LES POSITIONS INITIALES DE HOBBES ET WALLIS

La réponse à Clavius et la défense de Peletier

La *Disquisitio* ou Enquête géométrique sur l'angle de contact [Wallis 1656b] est parue dans le recueil baptisé *Operum mathematicarum pars altera*, qui contient en outre l'*Arithmetica infinitorum* et le Traité des sections coniques. C'est le compte rendu de leçons dispensées par le *Savilian Professor* John Wallis[5]. Des justifications plus précises de cette publication apparaissent à travers deux brèves remarques ; d'abord, affirme Wallis au début de la *Disquisitio*, il s'agit de faire taire les dissensions sur un sujet « purement géométrique » où il s'étonne qu'elles aient pu naître[6]. Et il s'agit aussi, rappelle-t-il dans la préface au premier tome de ses *Opera mathematica*, d'expliquer la doctrine de Peletier[7].

Les deux premiers chapitres tiennent lieu d'introduction. La question de l'origine euclidienne de la controverse y occupe quelques lignes à peine. Elle est remplacée par une analyse précise de la proposition litigieuse[8]. Qu'a en effet démontré Euclide en III,16 ? Seulement que :

1) $d > a$: l'angle du demi-cercle est plus grand que tout aigu rectiligne ;

2) $c < a$: l'angle de contact est plus petit que tout aigu rectiligne.

étude de Jesseph [1999] ; celui-ci présente une analyse très fine sur les divers aspects mathématiques (la question de l'angle de contact est évoquée p. 159–173), mais aussi sur le contexte académique (chap. II), religieux et politique (chap. VII) de la controverse.

[5] Il entrait en effet dans les attributions du titulaire de la chaire de Savile de commenter Euclide. La question de l'angle de contact était précisément l'une de celles que Savile avait laissé le soin à ses successeurs de résoudre. Les leçons dont est issue la *Disquisitio* ont été dispensées après 1649, sans qu'on puisse les dater précisément.

[6] « Tirant occasion de cette proposition d'Euclide, s'est élevée entre Peletier et Clavius (ce qui est remarquable, dans une question purement géométrique) une controverse amère, dont, que je sache, n'est pas résulté jusqu'à présent le consensus unanime des mathématiciens » [Wallis 1656b, p. 2].

Toutes les traductions sont miennes.

[7] « Le traité de l'angle de contact ne contient pas une doctrine vraiment nouvelle (puisque Peletier en avait traité auparavant) mais elle était à peine assez admise et mal reconnue, et méritait une meilleure compréhension » [Wallis 1693–1699, I, *Ad lectorem praefatio*, f. 4v.].

[8] Rappelons que la proposition III,16 démontre successivement que : a) la tangente à un cercle tombe en dehors de ce cercle ; b) il est impossible d'interposer une demi-droite prenant origine au point de contact et traversant le lieu situé entre la tangente et la circonférence ; c) l'angle du demi-cercle est plus grand que tout aigu rectiligne ; d) l'« angle restant » (l'angle de contact) est plus petit que tout aigu rectiligne.

Mais, remarque Wallis, l'inégalité 1) demeure vraie pourvu qu'il n'y ait aucun aigu tel que $a > d$ et la seconde reste vraie « même si on suppose que l'angle de contact n'est rien »[9]. Or, Euclide n'affirme ni ne démontre aucun des deux énoncés suivants :

3) $d < 1$: l'angle du demi-cercle est plus petit que l'angle droit ;

4) « l'angle de contact est véritablement un angle et réellement une quantité » [*revera quantum*].

L'Alexandrin, remarque-t-il dans le deuxième chapitre, « en a moins dit qu'il pouvait en dire et qu'il en savait »[10]. Quoiqu'il en soit, c'est bien sur les résultats 3) et 4) que s'opposent Peletier et Clavius, le second ayant supposé à tort que 3) et 4) étaient contraires à l'opinion d'Euclide. On voit que pour Wallis, le problème doit être abordé avec pour arrière-plan l'histoire récente — c'est Peletier et Clavius qu'il jugera et non Euclide, dont l'autorité est préservée, sur la foi du présupposé, courant chez les mathématiciens de l'âge baroque[11], selon lequel les Anciens nous ont caché une partie de leur science. Et il l'aborde avec d'autres sources que le seul texte d'Euclide. Il puise dans le *Commentarius* de Peletier [1563], dont il fait parfois une véritable explication de texte[12].

Sur les définitions de l'angle

Peletier avait modifié la définition I,9 de l'angle plan pour exclure du domaine des angles le « contact ». Pour le Manceau, le fait que deux lignes se rencontrent ne suffit pas à définir un angle[13] : il faut qu'elles se

---

[9] « nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi suppositis ille angulus contactus nihil sit » [Wallis 1656b, chap. I, p. 2].

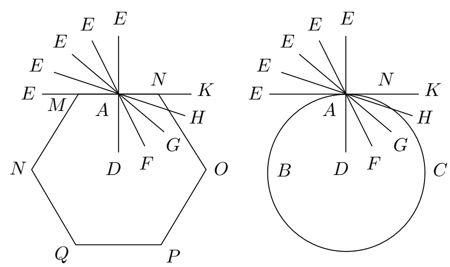
[10] « Certum enim est, Euclidem aliquando minus asserere, quam & asserere potuisset, & ipse senserit ; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commode ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa » [Wallis 1656b, chap. II, p. 3].

[11] Qu'on songe au Descartes du *Discours de la méthode*. On trouve la même attitude chez Borelli [1658].

[12] Wallis n'a pas lu l'*Apologia* [Peletier 1579] et, s'il est au courant qu'il existe un autre *Commentarius* [Peletier 1581], il ne l'a pas consulté. Cf. Wallis [1656b, chap. IX, p. 30] : « J'ignore ce qu'a ajouté Peletier dans son *Apologie* contre Clavius, du fait qu'il ne m'a pas encore été donné de voir cette Apologie. Mais dans l'*un* de ses commentaires *Sur le contact des lignes* [...], il avance quelques arguments [...] ». C'est moi qui souligne ; le commentaire dont Wallis tire ces « quelques arguments » est clairement celui de 1563.

[13] Rappelons que suivant la définition I,8, pour qu'il y ait angle, il faut a) que des lignes soient inclinées mutuellement, b) qu'elles soient situées dans un (même) plan, c) qu'elles se touchent et d) qu'elles ne soient pas placées « en ligne droite ».

coupent. Wallis examine la définition I,9 dans les chapitres III et IV de la *Disquisitio.* Il rejette la modification de Peletier, mais renforce la première condition euclidienne : s'il suffit pour faire un angle que deux lignes soient inclinées l'une sur l'autre, il faut en outre considérer cette inclinaison au point de contact entre les lignes et nulle part ailleurs. Pour illustrer cet énoncé, il utilise (comme Viète avant lui) ce qui va devenir un leitmotiv de la *Disquisitio*, une analogie entre un polygone et le cercle (considéré comme un polygone ayant une infinité de côtés). Au chapitre IV, Wallis explique sur la base de cette analogie comment, selon Peletier, l'inclinaison s'annule dans l'angle de contact :



« Si en effet DE, droite passant par le centre et coupant la circonférence BAC au point A, effectue une rotation sur ce point [en passant] par les points F, G, H, il se forme avec la circonférence des angles sans cesse différents jusqu'à ce que, la section cessant, la ligne ED devienne la ligne EK et qu'elle touche le cercle. Alors on ne concevra plus la ligne ED ou EK comme étant inclinée, mais comme immergée dans cette circonférence BAC exactement comme si BAC était une droite [...].

Peut-être comprendra-t-on mieux cela si, à la place de la circonférence du cercle, on met le périmètre d'une figure rectiligne : si en effet DE coupe à angles droits le périmètre de l'hexagone au point A, autour duquel DE effectue une rotation par les points F, G, H, elle forme des angles toujours plus obliques jusqu'à ce qu'elle parvienne à la position EK, car là cesse la section et l'angle disparaît »[14].

[14] « Si enim DE, recta per centrum, peripheriam BAC secans in puncto A, super eo circumducatur per puncta FGH, fient anguli continue varii cum peripheriam, donec, cessante sectione, linea ED facta sit EK, ac tangat circulum. Atque jam linea ED vel EK non inclinata intelligitur, sed immersa in ipsa BAC peripheriam, quantum ad angulum attinet, non aliter quam si ipsa BAC esset linea recta.

Sur la contradiction entre III,16 et X,1

À l'origine de la querelle de l'angle de contact, il y avait ce que Peletier présentait comme une contradiction interne à la géométrie : si les résultats d'Euclide concernant les angles mixtes sont vrais, alors il est impossible de vérifier X,1 en prenant pour grandeurs un angle aigu rectiligne et un angle de contact. Là était le véritable motif de sa modification de la définition I,8 et du rejet de c hors des domaines des angles et des quantités. Dans les chapitres V à VIII, Wallis développe à son tour longuement cet argument. Il montre au chapitre V, que, tout comme on trouve pour chaque angle plan, rectiligne ou curviligne, p_1, un angle rectiligne ou curviligne p_2 tel que $p_1 = p_2$ ou $p_1 < p_2$ ou $p_1 > p_2$, de même on trouve des angles mixtes égaux à des curvilignes. Mais si on cesse de considérer c comme une quantité, les notions communes ne nous assureront plus des mêmes égalités et inégalités : la soustraction $1 - c$, au lieu d'avoir d pour résultat, sera une « soustraction imaginaire » d'un angle imaginaire et ne diminuera en rien la quantité de l'angle droit[15]. Comme Peletier, Wallis aboutit à la conclusion que c n'est ni un angle, ni une quantité (*quantum*).

L'homogénéité de c *et* a

Un des points majeurs d'opposition entre Peletier et Clavius était la question de l'homogénéité de c et a. Pour Peletier, le simple fait que c et a soient des objets plans suffisait à montrer leur homogénéité ; Clavius lui rétorquait que, bien qu'étant tous deux des objets plans, ils étaient « dans une certaine mesure » hétérogènes, raison pour laquelle ils ne pouvaient avoir une proportion mutuelle. Wallis défend Peletier de la manière suivante (chapitre VII). On peut poser $1 - c = d$ et $d + c = 1$, opérations qu'admettent aussi bien Peletier que Clavius et qu'autorisent les notions communes[16]. Cela renforce pour Wallis la thèse de l'homogénéité de c et a. Wallis souligne aussi que X,1 tient lieu

---

Hoc autem fortasse melius concipietur, si, pro circulo peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum : si igitur DE perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usque dum ad situm EK perveniat, hic enim cessat sectio, & evanescit angulus » [Wallis 1656b, chap. IV, p. 9–10].

Ici et dans la suite de l'article, les figures, qu'elles soient de Wallis ou de Hobbes, sont celles des textes originaux qui ont été redessinées par mes soins.

[15] « at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur » [Wallis 1656b, chap. IV, p. 8].

[16] Rappelons que les notions communes sont un ensemble d'énoncés qu'Euclide pose

de principe. Toutes les grandeurs homogènes, explique-t-il, peuvent se dépasser l'une l'autre par multiplication [Wallis 1656b, chap. VII, p. 22]. Euclide (en X,1) et Archimède (dans la première proposition de *De la sphère et du cylindre*) tiennent cela pour un postulat[17]. Cet axiome est universel et convient aussi bien à c et a qu'aux autres angles. Ainsi, si c et a sont des angles homogènes, le plus petit pourra surpasser le plus grand par multiplication et ils devront avoir mutuellement une raison déterminée.

Le « lemme de Peletier »

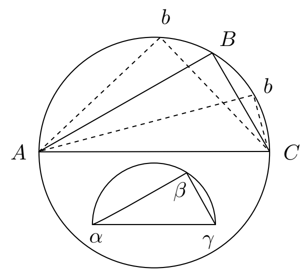
Dans les chapitres IX à XI, Wallis porte son attention sur ce que Hobbes appellera plus tard le « lemme de Peletier » : tous les angles du demi-cercle sont égaux. Pour le démontrer, le Manceau s'appuyait sur le fait que, tous les demi-cercles étant des figures *semblables*, leurs angles doivent être égaux. Ainsi, des cercles cotangents intérieurement forment avec leur diamètre commun des angles du demi-cercle égaux et si on tire la tangente à l'extrémité du diamètre, l'angle du demi-cercle formé sur le plus petit cercle « n'ajoutera rien » à l'angle de contact par rapport à celui formé sur le plus grand cercle. Peletier voyait là une confirmation que l'angle de contact n'a aucune quantité et, si c'est le cas, il n'ajoutera rien non plus aux angles du demi-cercle qui seront par conséquent égaux à un droit. Le nerf de ces démonstrations, c'est l'axiome posé par Euclide au début du Livre I, selon lequel « le tout est plus grand que la partie ». Wallis s'efforce de démontrer le lemme de Peletier par de nouveaux moyens. Ainsi au chapitre X, il démontre par plusieurs arguments l'égalité de l'angle inscrit et de l'angle du segment. La preuve principale est la suivante : en s'appuyant sur la définition III,11[18], Wallis étend aux angles des mêmes segments les résultats acquis pour les angles dans les mêmes segments à

au début du Livre I, parmi lesquels les cinquième et septième sont essentiels pour juger respectivement de l'inégalité et de l'égalité des angles dans le cadre des *Éléments* : « Le tout est plus grand que la partie » (relation de partie à tout) et « les choses qui s'appliquent l'une sur l'autre sont égales » (congruence) [Euclide 1990-2001, vol. I, p. 178–179]. Avant le Livre V, ces deux notions communes sont les seuls outils dont dispose le géomètre euclidien pour comparer les angles (la théorie des proportions n'est d'ailleurs appliquée aux angles que dans la proposition VI,33).

[17] Wallis aurait aussi pu mentionner la définition V,4, qui est un autre enjeu de la controverse entre Peletier et Clavius.

[18] « Des segments de cercles semblables sont ceux qui admettent des angles égaux ou ceux dans lesquels les angles sont égaux entre eux. » [Euclide 1990-2001, I, p. 389]

la proposition III,21[19]. Autrement dit, Wallis infère de l'égalité des angles (rectilignes) inscrits dans le demi-cercle l'égalité des angles (mixtes) du demi-cercle. Il utilise pour cela un raisonnement cinématique :



« Ainsi la droite AB, portée à la position AC, fait maintenant avec la circonférence les mêmes angles qu'elle faisait auparavant avec la droite BC, à savoir les angles ABC et leur complément à deux droits ; c'est-à-dire que l'angle inférieur (celui qui est l'angle du segment opposé) et l'angle ABC sont les mêmes ; et (pour la même raison), l'angle supérieur est le même que son complément à deux droits. [...]

Par la même opération il est démontré que, si ces segments semblables sont des demi-cercles, leurs angles sont égaux à des angles droits rectilignes. En effet dans l'angle du demi-cercle, tant l'angle ABC que son complément à deux droits sera un angle droit.

De même, en général, l'angle dans le segment est égal à l'angle du segment opposé. Ou, ce qui est la même chose, l'angle dans la circonférence qui est placé sur un segment est égal à l'angle de ce segment sur lequel on le place »[20].

---

[19] « Dans un cercle, les angles qui sont dans le même segment sont égaux entre eux. » [*Ibid.*, p. 433]

[20] « Adeoque recta AB, ad situm AC delata eosdem nunc angulos cum peripheria facit quos prius fecerat cum recta BC producta, nempe angulum ABC, ejusque residuum ad duos rectos ; hoc est, angulum inferiorem (qui est oppositi segmenti angulus) eundem cum angulo ABC, atque (eadem ratione) angulum superiorem eundem cum ipsius complemento ad duos rectos [...]. Atque etiam eadem opera demonstratum est, si segmenta illa similia sint semicirculi, eorum angulos æquales esse rectis rectilineis ; erit enim in semicirculo, tam angulus ABC, quam ipsius residuum ad duos rectos, angulus rectus.

Item, in universum, Angulus in segmento, æqualis est angulo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit » [Wallis 1656b, chap. X, p. 34–35].

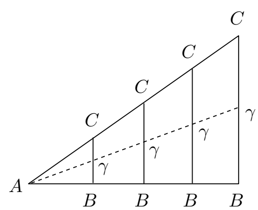
S'appuyant sur ce résultat, il montre au chapitre XI que les cercles cotangents ne produisent pas des angles du demi-cercle plus ou moins grands. L'angle dans un demi-cercle étant droit (tout comme son complément à deux droits), si son sommet parcourt toute la circonférence jusqu'à ce que l'un des côtés se confonde avec le diamètre (l'autre côté se réduisant à un point à l'extrémité de ce diamètre), l'angle dans le demi-cercle est toujours droit et son complément, qui est l'angle inférieur ou opposé au demi-cercle, l'est également. Mais, affirme Wallis, ce qui vaut pour les angles (rectilignes) dans le segment vaut également pour les angles (mixtes) du segment. L'angle du demi-cercle est par conséquent égal à un droit.

La « mesure » de l'angle de contact

Bien qu'il rejette comme Peletier l'angle de contact hors du domaine des quantités, Wallis est conduit pourtant, par un détour, à déterminer la mesure de l'angle de contact. Dans le chapitre XII, il présente un principe qu'il dit être admis, tacitement ou expressément, par Euclide et Archimède : « ce qui est plus petit que toute quantité positive est une non-quantité ». Il pousse alors plus loin qu'auparavant l'analogie entre polygone et cercle, en raisonnant sur un polygone à N côtés et N angles. La somme de ces angles sera égale à $2N - 4$ angles droits et chacun aura pour mesure $(2N - 4)/N$. Si l'on bissecte cet angle en tirant de son sommet une droite au centre du polygone, on obtient un angle dont la mesure est $1 - 2/N$, c'est-à-dire un droit moins $2/N$. Cette différence à un droit du demi-angle d'un polygone décroît à mesure que le nombre N de côtés croît, si bien que si N est infini, le quotient sera infiniment petit. Alors, Wallis peut conclure :

« Mais un polygone à un nombre infini de côtés est soit un cercle, ou au moins inscriptible dans un cercle. Dans le premier cas, la différence d'un angle du demi-cercle à un angle droit sera infiniment petite ; dans le second cas, cette différence sera encore plus petite (car le côté d'un polygone inscrit dans un cercle fait avec l'extrémité du diamètre un angle moindre que la circonférence avec la même extrémité du diamètre et ainsi son déficit à un droit est supérieur à celui de l'angle du demi-cercle). Mais ce qui est infiniment petit ou (si possible) moindre que l'infiniment petit est moindre que toute quantité positive et donc une non-quantité. L'angle de contact, qui est la différence de l'angle du demi-cercle à l'angle droit rectiligne est donc une non-quantité. Ce qu'il fallait démontrer »[21].

Disons encore un mot du chapitre XIII qui, au même titre que le précédent, préfigure les développements du deuxième opuscule de Wallis sur l'angle de contact, la *Defense* [Wallis 1685]. Il s'appuie sur un lemme que Wallis exprime en ces termes : « Si deux quantités croissent ou décroissent en même temps proportionnellement, lorsque l'une d'entre elles est réduite à rien, ou à une non-quantité, l'autre est aussi réduite à rien ou à une non-quantité »[22]. Wallis illustre d'abord ce point sur le cas de deux droites :



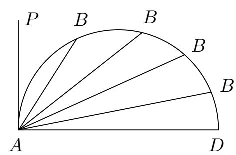
« Voici un exemple : les droites AB et AC font un angle quelconque en A. Et plaçons sur AB la droite BC qui fait l'angle ABC droit (ou si on préfère, un autre angle, au choix). Maintenant, si on suppose que la ligne droite BC se meut sur la droite AB, l'angle ABC demeurant constant, à mesure que le point B s'éloigne ou s'approche du point A, la droite BC augmente ou diminue en même raison, suivant VI,4 ; puisque donc AB et BC sont en proportion $AB : AB :: BC : BC$, où qu'on prenne le point B, si, dis-je, on pose le point B au même point que A, la distance AB sera nulle (à cause de la coïncidence des points A et B) et la longueur de la droite BC également nulle. Cela pourra être prouvé si

[21] « Jam vero Polygonum infinitorum laterum, vel circulus est, vel saltem circulo inscriptibile : Si prius ; erit igitur differentia anguli semicirculi ab angulo recto infinite parva : Si posterius ; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inscripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideoque magis a recto deficit quam angulus Semicirculi). Quod vero vel infinite parvum est, vel (si fieri possit) minus quam infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoque non-quantum. Angulus igitur contactus, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non-quantus. Quod erat demonstrandum » [*Ibid.*, chap. XII, p. 41–42].

[22] « Si duæ quantitates simul proportionaliter vel crescunt vel decrescunt ; ubi earum una reducta est ad nihilum seu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum seu non-quantum reducitur » [*Ibid.*, chap. XIII, p. 45].

besoin est par VI,16. Et bien que la raison de la droite AB à la droite BC soit ailleurs autre que celle de AB à $B\gamma$, cependant, si on prend ce point B au point A, alors BC comme $B\gamma$ se réduisent également en ce point »[23].

Puis il applique son raisonnement au cas de l'angle de contact :



« Ceci posé, l'argument est ainsi conduit : soit la droite PA perpendiculaire au point extrême du diamètre AD et touchant la circonférence ABD au point A ; puisque la droite AB (prolongée aussi loin que nécessaire) rencontre la circonférence au point B placé où l'on veut, si la droite AB effectue une rotation, elle coupera la circonférence en différents points successifs que nous noterons tous B. Durant ce trajet la circonférence BA et l'angle rectiligne BAP croîtront ou décroîtront toujours ensemble et proportionnellement, suivant III, 32 et VI, 33. Ainsi, lorsque le point B atteint le point A, la circonférence BA disparaîtra et n'aura aucune grandeur, en même temps que l'angle BAP disparaîtra et deviendra nul, ou d'aucune grandeur. Mais dans ce cas, cet angle BAP est soit un angle de contact, soit à tout le moins non moindre que l'angle de contact ; donc l'angle de contact n'est d'aucune grandeur, ou un non-angle. Ce qu'il fallait démontrer »[24].

---

[23] « Exemplum hoc esto. Rectæ AB, AC, angulum A utcunque faciant ; ipsique AB ubivis insistat BC angulum ABC rectum faciens (vel, si libet, alium ad libitum). Jam si supponatur BC recta, super rectam AB moveri invariato angulo ABC ; prout punctum B remotius vel propius distat a puncto A, in eadem ratione recta BC augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur AB . AB : : BC . BC proportionales sint, ubicunque sumatur punctum B ; si, inquam, punctum B sumatur idem quod A, adeoque distantia AB nulla sit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ BC nulla erit. Quod, si opus est, probari poterit ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia sit ratio rectæ AB ad BC quam ad Bγ, tamen si B assignetur in ipso A, tam BC quam Bγ similiter in punctum degenerant » [*Ibid*].

[24] « His positis : sic procedit argumentum. Sit recta PA extremo diametri AD perpendicularis, adeoque peripheriam ABD contingens in puncto A, unde recta AB (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheria ubivis in B : circumducta jam recta AB secabit peripheriam in variis successive punctis quorum quodvis B insigniatur : semper autem, hoc transitu, peripheria BA & angulus rectilineus BAP

Dans les chapitres XII et XIII, Wallis explique le sens de l'expression « non-quantité ». C'est une quantité qui, étant « infiniment petite ou moindre que l'infiniment petit », est « moindre que toute quantité positive ».

Pour conclure, disons que Wallis n'est pas à son aise avec un angle auquel, suivant Peletier, il refuse d'assigner toute quantité, mais dont il entreprend de donner la mesure : c'est la différence infiniment petite entre d et 1. En défendant Peletier, Wallis hérite des ambiguïtés du Manceau. Il apparaît incapable de renoncer à utiliser les notions communes pour des grandeurs dont il conçoit pourtant qu'elles répugnent à s'y soumettre. Il ne parvient pas à clarifier le statut de c et met plutôt en relief le caractère « pathologique » de cet objet géométrique sans grandeur. Ces ambiguïtés, Hobbes ne manquera pas de les relever dans les passages qu'il consacrera à la *Disquisitio*. Mais la réflexion sur l'angle de contact qu'il mène dans le *De corpore* est antérieure à la publication de la *Disquisitio* et, avant que s'engage la polémique entre les deux hommes, il est presque certain que chacun ignorait les travaux de l'autre[25].

Le De corpore *de Hobbes*

C'est dans le *De corpore* (1655)[26] que Hobbes expose pour la première fois sa mathématique. Dans la troisième partie, intitulée « Des proportions,

proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per 32 e 3 & 33 e 6. Ideoque, ubi punctum B ad A ipsum A pervenerit, adeoque peripheria BA evanescat & nullius evadat magnitudinis, simul etiam angulus BAP evanescet & nullus fiet, sive nullius magnitudinis. Est quidem, hoc in casu, angulus ille BAP, vel ipse angulus contactus, vel saltem non ipso minor ; ergo angulus contactus nullius est magnitudinis, sive non-angulus. Quod erat demonstrandum » [*Ibid.*, p. 47].

[25] Si la *Disquisitio* n'est parue qu'en 1656, le texte, issu de leçons délivrées à Oxford dans les années 1650 en était déjà achevé à la mi-1655. La dédicace de la première édition est datée « anno 1655 currente » et dans l'*Elenchus* [Wallis 1655], qui a été composé en juillet et août 1655, Wallis se réfère à la *Disquisitio* comme à un ouvrage achevé. D'autre part, le *De corpore* [Hobbes 1655], qui a été imprimé à partir du printemps 1654, est finalement paru en mai ou juin 1655 et Wallis, qui avait lu certains chapitres avant même sa parution, a eu en main l'ouvrage immédiatement. Rien n'indique que Hobbes ait connu la *Disquisitio* avant la publication du *De corpore*, ni que Wallis ait modifié la *Disquisitio* en ayant pris connaissance des passages de Hobbes sur l'angle de contact. Je renvoie à l'introduction de K. Schuhmann et M. Pécharman à leur édition du *De corpore* [Hobbes 1655] pour ce qui concerne les avatars qu'a connus la publication de cet ouvrage.

[26] Je citerai l'édition de Karl Schuhmann [Hobbes 1655/2000], en indiquant en outre la pagination de [Hobbes, *Opera*] ; c'est à cette dernière édition que je me référerai pour les autres œuvres de Hobbes mentionnées ci-après.

des mouvements et des grandeurs », il propose à la fois une étude du mouvement et diverses démonstrations de mathématiques, dont ses fameuses rectifications et quadratures, qui seront au centre de la controverse avec Wallis[27]. Mais dès la deuxième partie déjà, le propos de Hobbes s'infléchit vers la mathématique. La « Philosophie première » y est présentée à travers sept chapitres où il est question successivement « Du lieu et du temps », « Du corps et des accidents », « De la cause et de l'effet », « De la puissance et de l'acte », « De l'identité et de la différence », « De la quantité », « De l'analogie ou même proportion » et enfin « Du droit et du courbe, de l'angle et de la figure ».

Les objets définis dans le dernier chapitre sont ceux qu'on trouve au Livre I des *Éléments*, mais en tant que concepts de la « philosophie première » de Hobbes, ils prennent un sens nouveau, et Hobbes les présente au moyen de nouvelles définitions. En fait, l'exposé des principes mathématiques dépend de l'organisation du système entier. Et la situation de la mathématique au cœur du *De corpore* est l'indice de la centralité de cette science dans la philosophie de Hobbes.

Les définitions de l'angle

Chez Hobbes, les principes de la philosophie sont les définitions, dont la fonction est d'exprimer la genèse c'est-à-dire la cause des choses. Or, c'est le mouvement qui produit les objets géométriques[28]. Pour la genèse de l'angle, Hobbes imagine deux lignes droites confondues ; le mouvement de l'une autour d'une de ses extrémités demeurant fixe génère naturellement l'angle rectiligne. Mais il imagine aussi qu'un autre mouvement, une flexion continue dans chacun des points d'une des lignes, produira l'angle de contact ; et si cette flexion advient dans les deux lignes, elle donnera un angle curviligne. Dans les trois cas, le mouvement produit la rencontre de deux lignes en un seul point, ce en quoi consiste l'angle. Hobbes fait ainsi entrer de plain-pied les angles curvilignes et mixtes dans sa géométrie. Mais en tant qu'il leur accorde des genèses différentes, il en fait aussi des espèces distinctes.

---

[27] Les quadratures du *De corpore* et ses tentatives ultérieures ont été la cible principale de attaques de Wallis. On en trouvera tous les détails dans l'appendice à [Jesseph 1999].

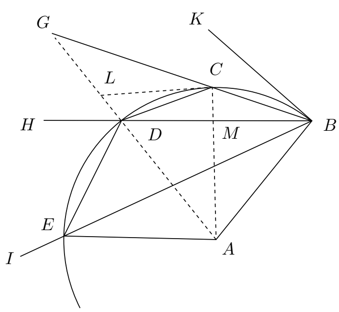
[28] Pour une présentation de la philosophie des mathématiques de Hobbes et une discussion sur son originalité, voir [Jesseph 1993 ; 1999, chap. III]. On pourra également consulter [Bird 1996], [Breidert 1979], [Probst 1993], [Sacksteder 1980 ; 1981].

La mesure de l'angle de contact

Poursuivant son développement sur la définition des angles, Hobbes en vient à la question de sa mesure. Il définit la quantité de l'angle comme le rapport à la circonférence totale de l'arc intercepté entre les côtés de l'angle. Cette mesure, dit-il, convient aux rectilignes, mais aussi bien aux angles mixtes et curvilignes, pour lesquels « la quantité de l'angle doit être estimée à la distance minimale du centre, ou au point de concours ». En effet, explique Hobbes, si l'on trace le cercle à proximité immédiate du centre, le côté courbe de l'angle de contact *doit* être tenu pour droit, « parce qu'on ne peut concevoir une ligne courbe telle qu'il n'y ait pas de ligne droite plus petite »[29]. Ainsi, pour peu qu'elle soit prise à la distance minimale, la mesure de l'angle de contact se fera comme celle des angles rectilignes. Cela semble indiquer qu'on pourra déterminer des égalités entre angles rectilignes et angles de contact. Ce n'est pas le cas comme on va le voir.

L'homogénéité de c *et* a

Au paragraphe 16, Hobbes revient sur la question de l'angle de contact pour affirmer qu'il n'a ni quantité, ni raison aucune avec l'angle rectiligne :



[29] « Quantitas anguli est quantitas arcus sive circonferentiæ circuli, determinata per rationem ejus ad totam perimetrum. Tantus itaque est angulus, quanta portio est totius perimetri arcus inter duas rectas e centro interceptus. Ex quo intelligitur, dum lineæ angulum continentes sunt ambæ rectæ, quantitatem anguli in qualibet distantia a centro sumi posse; quod si altera linearum angulum continentium, vel utraque curva sit, anguli quantitas in minima a centro sive a concursu distantia æstimanda est; nam minima distantia (quia linea curva intelligi nulla potest, qua recta non sit minor) tanquam recta linea consideranda est » [Hobbes 1655/2000, p. 138] ou [Hobbes, *Opera*, I, p. 161].

« 16. L'angle de contingence, si on le compare avec quelque angle simple si petit soit-il, a avec lui la même raison que le point à la ligne. C'est-à-dire qu'il n'a aucun rapport ni quantité aucune. D'abord en effet, l'angle de contingence se fait par flexion continue, de sorte que dans sa génération il ne se fait aucun mouvement circulaire, ce en quoi consiste la nature de l'angle simple ; c'est pourquoi il ne peut être comparé avec lui selon la quantité. Ensuite parce que l'angle externe de la [ligne] sous-tendue prolongée et de la [ligne] sous-tendue prochaine est égal à l'angle au centre sur le même arc (comme dans la figure précédente GCD est égal à l'angle CAD) ; l'angle de contingence sera égal à l'angle à partir du centre qui est contenu entre AB et la même [AB], parce qu'aucune partie de la tangente ne peut sous-tendre un arc ; mais de même qu'il faut considérer ce point de contact pour la sous-tendue, de même l'angle de contingence doit être considéré comme l'angle externe, et égal à l'angle dont l'arc serait le même point B »[30].

Affirmer que l'angle de contingence (autre nom de l'angle de contact) a la même raison avec l'aigu rectiligne que le point et la ligne, cela revient à dire pour Hobbes qu'il n'a ni raison avec l'aigu, ni quantité, ou encore que c et a sont hétérogènes. La définition de l'angle nous le disait déjà : autre genèse, autre nature. Dans un second argument, Hobbes utilise un résultat antérieur. Il a établi l'égalité de l'angle au centre CAD et de l'angle GCD compris entre la corde d'un cercle et la droite prolongeant une corde égale (c'est un résultat qu'on peut obtenir à partir des propositions III,31–34 d'Euclide). Si l'on conçoit que CAD diminue jusqu'à ce que ses deux côtés se superposent, la corde DC diminuera de même jusqu'à se réduire à un point de la circonférence. On voit que ce raisonnement n'est pas très éloigné de celui que conduit Wallis au chapitre XII de la *Disquisitio*, mais Hobbes en tire une conclusion bien différente. Et il poursuit : certes, c et a

[30] « 16. Angulus contingentiæ si conferatur cum angulo quantulocunque simpliciter dicto, rationem ad ipsum habet eam quam punctum ad lineam, hoc est, neque rationem neque quantitatem ullam. Primo enim, angulus contingentiæ fit flexione continua, ita ut in generatione ejus nullus omnino fiat motus circularis, in quo consistit natura anguli simpliciter ; itaque cum illo comparari secundum quantitatem non potest. Secundo, quia angulus externus substensæ productæ et substensæ proximæ æqualis est angulo centri super eundem arcum [...], erit angulus contingentiæ æqualis angulo ex centro, qui continetur inter AB et eandem AB, quia contingentis pars nulla subtendere arcum potest, sed ut ipsum punctum contactus pro subtensa, ita angulus contingentiæ pro angulo externo habendus sit et æqualis angulo, cujus arcus sit idem punctum B » [Hobbes 1655/2000, p. 146] ou [Hobbes, *Opera*, I, p. 169–170].

sont hétérogènes. Mais c a bien, en lui-même, une quantité, puisqu'on peut comparer divers angles de contact : de même que celle de l'angle rectiligne tient au plus ou moins grand écartement des lignes, la quantité de l'angle de contingence est fonction de la courbure du cercle qui le limite :

« Mais puisque l'angle en général est défini comme l'ouverture ou la divergence de deux lignes en un point de rencontre et qu'une ouverture est plus grande qu'une autre, de même selon la génération de l'angle de contingence, on ne peut nier que cet angle soit une quantité [...]. Mais cette quantité consiste en une plus grande et plus petite flexion. Car plus la circonférence du cercle est grande, plus le cercle s'approche de la nature de la ligne droite ; [...] de même lorsque plusieurs cercles touchent la même droite, l'angle de contingence qui est fait avec le cercle plus petit est plus grand que celui qui est fait avec le cercle plus grand »[31].

La quantité de c est nulle par rapport à celle de a. Hobbes est naturellement conduit à renoncer à opérer sur ces angles avec les notions communes : la quantité d'un rectiligne n'est en rien affectée par l'adjonction ou la soustraction d'angles de contingence. En conséquence, les angles du segment seront égaux à ceux compris entre le diamètre et la droite tangente : « Donc rien n'est ajouté ou retranché d'un angle simple par l'addition ou le retranchement à lui d'autant d'angle de contingence qu'on veut. Et de même qu'un angle d'une sorte ne peut jamais être égal à un angle de l'autre sorte, de même l'un ne peut être ni plus grand, ni plus petit que l'autre. De là s'ensuit qu'un angle du segment, c'est-à-dire l'angle que fait toute ligne droite avec un arc quelconque est égal à l'angle qui est fait par la même ligne droite et une autre qui touche le cercle à leur point de rencontre [...] »[32].

[31] « Quoniam autem angulus in genere definitur, ut sit apertio sive divergentia duarum linearum in uno puncto concurrentium, est autem una apertio major quam alia, etiam per generationem anguli contingentiæ negari non potest, quin angulus ille quantitas sit [...]. Sed quantitas hæc consistit in majore et minore flectione. Nam quo major est circuli circumferentia, eo magis accedit ad naturam lineæ rectæ [...]. Ideoque quando plures circuli contingunt eandem rectam, major est angulus contingentiæ qui fit cum minore circulo, quam qui fit cum majore» [Hobbes 1655/2000, p. 147] ou [Hobbes, *Opera*, I, p. 171].

[32] « Nihil ergo addunt neque adimunt angulo simpliciter dicto additi vel adempti quotcunque anguli contingentiæ ; et sicut alter alteri æqualis non est, sic neque major, nec minor est.

Ex quo sequitur angulum segmenti, id est, quem facit recta quæ libet cum arcu quolibet, æqualem esse angulo qui fit ab eadem recta et linea quæ contingit circulum

Hobbes admet des égalités entre angles du segment et angles rectilignes. De là il pourrait naturellement déduire la thèse $d = 1$, mais celle-ci reste implicite dans le *De corpore*.

Les passages examinés ci-avant montrent que Hobbes est un lecteur critique d'Euclide. Pour lui, ce sont surtout les principes posés par Euclide qui sont déficients et parmi ceux-ci, les définitions de l'angle. Conscient du déséquilibre du couple formé par les définitions I,8 (où Euclide définit les angles en toute généralité) et I,9 (où il introduit l'espèce particulière de l'angle rectiligne), Hobbes a voulu rassembler dans une même définition les angles rectilignes, mixtes et curvilignes. Il accorde du même coup aux deux catégories négligées par Euclide un statut qu'elles n'ont pas chez ce dernier.

Mais la réflexion de Hobbes sur ces objets ne s'arrête pas là. Il est le premier à accorder une quantité à l'angle de contact tout en le tenant pour une grandeur hétérogène à l'angle rectiligne. Il maintient sans ambiguïté que les notions communes ne valent pas pour sommer ou soustraire angles de contingence et rectilignes[33]. Il est conscient que l'ensemble des angles du segment est ordonné. Mais ces thèses, exposées maladroitement et étayées par des arguments fallacieux, Wallis n'aura pas de peine à les tourner en dérision.

2. LA CONTROVERSE

Tout au long de la controverse, la position de Wallis n'évolue pas. Le professeur d'Oxford se contente de souligner les incohérences de son adversaire et la faiblesse de ses ripostes. Hobbes au contraire tente d'étayer sa position. Plutôt que d'en suivre pas à pas les péripéties, j'ai choisi de rassembler les arguments de l'un et l'autre selon les thèmes polémiques relevés auparavant : définitions et mesure de l'angle, homogénéité de l'angle de contact et du rectiligne, etc. Mais il faut auparavant examiner ce qui donne son impulsion à la querelle : les brèves critiques qu'adresse Wallis au texte du *De corpore* dans l'*Elenchus geometriæ Hobbianæ* [Wallis 1655].

in eodem cum ipso puncto» [*Ibid.*] ou [Hobbes, *Opera*, I, p. 170–171].

[33] Wallis a, dans la *Disquisitio* (comme Peletier avant lui) une position ambiguë sur ce point, puisqu'il utilise les notions communes dans certaines de ses démonstrations, par exemple au chapitre VII.

L'offensive de Wallis

Comme son titre l'indique, l'*Elenchus geometriæ Hobbianæ* est une réfutation en règle de la géométrie de Hobbes. Il a été publié peu avant la parution de la traduction anglaise du *De corpore* et peu après les *Vindiciæ Academiarum* où Seth Ward, un autre professeur d'Oxford, s'en prenait à d'autres aspects de la pensée de Hobbes [Ward 1654; 1656][34]. La question de l'angle de contact occupe dans l'*Elenchus* une position très marginale par rapport à celle des quadratures et cubatures. Deux courts passages s'y rattachent.

Dès l'introduction, Wallis annonce ce qu'il reproche principalement à la géométrie de Hobbes : son imprécision. Cette imprécision, les définitions de Hobbes l'illustrent parfaitement. Les mathématiciens, explique Wallis posent arbitrairement leurs définitions, mais il ne faut pas « abuser de cette liberté ». Il faut prendre garde que les locutions qu'on choisit pour expliquer les notions de la géométrie « expliquent seulement ce qu'elles signifient » et qu'on ne puisse pas leur donner des contenus trop larges ou trop étroits. Or, conclut-il, « qui prend garde à cela, prend [Hobbes] facilement en défaut »[35].

La définition de l'angle révèle cette imprécision. Par exemple, la double genèse ne s'appuie pas sur une partition pertinente, car elle n'inclut pas les angles formés par la section d'une courbe et d'une droite[36]. Wallis reformule la définition de Hobbes dans les termes qui lui semblent traduire exactement la pensée du philosophe : « la quantité de l'angle est comme la

[34] L'*Elenchus* a été imprimé à la mi-octobre et a dû être mis en vente fin octobre ou début novembre 1655. La version anglaise du *De corpore* est parue en juin 1656.

[35] « Quamvis enim Mathematicis licere non negem definitiones suas, hoc est verborum aut phrasium explicationes, sive determinatas aut definitas significationes pro arbitrio ponere, quibus illæ phrases aut locutiones apud illos deinceps intelligendæ sint : cavendum tamen ne hac sua libertate abutantur. Cum enim verborum aut rerum notiones eædem apud eos cum aliis explicandæ occurrunt, illas ubi explicatum eunt curandum est iis locutionibus id faciant quæ tantumdem significant : & deinceps limitatis illis aut definitis significationibus perpetuo insistant, ut neque latius, neque strictius quam par est accipiantur. Qua in re multoties te peccare qui animadverterit facile deprehendet » [Wallis 1655, p. 5].

[36] « At illud saltem rogitem, si recta curvam secet, num angulum contineant necne? Cur vel angulum esse neges, vel etiam Superficialem, non video. Si affirmes; quæro, ad utram harum superficiarum referas? Non ad priorem; non enim servatur *crurum rectitudo*, cum alterum supponatur curvum : sed neque ad posteriorem; nam *Angulus contingentiæ* non est, supponimus enim se mutuo contingere; sed secare duas hasce lineas : Ad neutram igitur. Ideoque peccat tua distributio » [*Ibid.*, p. 27].

circonférence du cercle (décrit sur le point angulaire pris comme centre) intercepté par ses côtés par rapport à tout le périmètre », c'est-à-dire que la raison qu'a l'arc intercepté à tout le périmètre est la même que la raison de l'angle mesuré à... À quoi ? À quatre droits, mais Hobbes ne le dit pas. La bonne traduction de la définition de Hobbes sera finalement : « La raison de tout angle (rectiligne) à quatre droits est la même que la raison de la circonférence du cercle (décrit au point angulaire pris pour centre) intercepté par les côtés à tout le périmètre »[37]. Enfin, si, comme l'affirme Hobbes, la mesure des angles mixtes ou curvilignes doit être prise « à la distance minimale » du point de contact et si, comme il l'affirme par ailleurs, le point a une quantité, ce point sera lui-même à la fois cette distance minimale et cette mesure et tous ces angles seront égaux. Wallis conclut sur ce point :

« Ainsi, lorsque tu détermines la quantité de l'angle par une circonférence, tu n'indiques ni le centre du cercle à décrire, ni les limites de la circonférence, ni même qu'il est censé avoir la même raison que celle qu'a cette circonférence à tout le périmètre. Autrement dit, pour déterminer la quantité de l'angle, tu ne détermines rien »[38].

Plus loin, un bref paragraphe est consacré au paragraphe 16. Hobbes aurait voulu clore le débat entre Peletier et Clavius, mais au lieu de prendre parti pour l'un des protagonistes, il se fait l'opposant de tous :

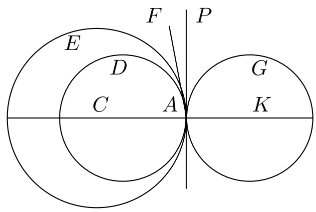
« Tu touches à la controverse sur l'angle de contact agitée autrefois entre Clavius et Peletier [...]. Mais toi tu te détermines de telle façon que tu n'es d'accord avec aucun des deux [adversaires], ni avec toi-même. Car si deux cercles inégaux, à savoir DA, EA, touchent la même droite PA au même point A, tu affirmes (avec Clavius contre Peletier), qu'ils sont inégaux, et tu affirmes que les angles du demi-cercle (avec Peletier contre Clavius) sont égaux entre eux et tous les deux égaux à un angle droit. Que ces deux propositions s'accordent bien entre elles, on en jugera facilement, pour peu

---

[37] « Ecquis enim verbis tuis, *Quantitas anguli est circumferentia circuli determinata per rationem ejus ad totam perimetrum, hoc satis significatum putet, Anguli cujusvis (rectilinei) eam esse rationem, ad quatuor rectos ; quæ est circumferentiæ circuli (puncto angulari ut centro descripti) anguli cruribus interceptæ, ad totam perimetrum ?* Hoc autem dici oportuit, dum illud dictum est » [*Ibid.*, p. 29].

[38] « Tu autem, dum anguli quantitatem circumferentia determinas ; neque circuli ducendi centrum indicas, neque circumferentiæ terminos, neque etiam quid illud sit, ad quod angulus eam habiturus est rationem, quam habet illa circumferentia ad integram perimetrum. Hoc est, anguli quantitatem determinaturus, nihil determinas » [*Ibid.*].

qu'on ne délire pas. Car si du même PAC on retranche les inégaux PAD et PAE, il restera (selon toi) DAC et EAC égaux tant entre eux qu'au tout PAC »[39].



On le voit, Wallis ne fait pas dans l'*Elenchus* un examen approfondi du texte de Hobbes sur l'angle de contact. Sur ce sujet comme sur les autres, il tourne en dérision la position du philosophe. Ce n'est qu'après que Hobbes aura repris l'offensive, avec la publication dans les *Six lessons* d'une vive critique contre la *Disquisitio*, que Wallis poussera un peu plus loin le débat sur le sujet.

L'évolution de la position de Hobbes

Les *Six lessons*, [Hobbes 1656] ou [Hobbes, *Works*, VII, p. 181-356], parues dans le même volume que la traduction anglaise du *De corpore*, sont la riposte de Hobbes à L'*Elenchus* de Wallis et aux *Vindiciæ academiarum* de Ward. Le philosophe contre-attaque d'abord dans une lettre dédicatoire et, dans la première leçon, il défend les positions tenues dans le *De corpore*. Dans les quatre leçons suivantes, il prend pour cible les trois publications du recueil de 1656 : L'*Arithmetica infinitorum*, *De sectionibus conicis tractatus* et la *Disquisitio*; la sixième et dernière leçon répond à Seth Ward. Les *Six lessons* sont le premier d'une longue lignée d'ouvrages dirigés contre Wallis que Hobbes publiera jusqu'en 1672. J'ai rassemblé

[39] « Controversiam illam attingis de angulo contactus, inter Clavium & Peletarium olim agitatam [...] verum tu eam ita determinas ut nec eorum alterutri, neque tibi ipsi satis assentiaris. Nempe si duos circulos inæquales, puta DA, EA, eadem contingat recta PA, in eodem puncto A; Angulos contactus affirmas (cum Clavio contra Peletarium) inæquales esse; at angulos semicirculorum (cum Peletario contra Clavium) affirmas invicem æquales esse, & utramque angulo recto rectilineo. Quam belle autem hæc inter se conveniunt, qui non delirat prorsus, facile judicabit. Nempe si ab eodem PAC, auferantur inæquales PAD, PAE, restabunt (secundum te) DAC, EAC, tam inter se, quam toti PAC æquales» [Wallis 1655, p. 34–35].

dans le développement suivant des arguments pris le plus souvent dans les *Six lessons*, mais aussi dans le second de ces opuscules polémiques, l'*Examinatio et emendatio* [Hobbes 1660].

Sur les définitions de l'angle

Les définitions de Hobbes, disait Wallis, trahissent la pensée d'Euclide. Dans les *Six lessons*, Hobbes s'en prend à son tour à l'interprétation par Wallis des définitions euclidiennes de l'angle. En affirmant (à la suite de Peletier) au chapitre IV de la *Disquisitio* que sont ἀκλίνῶς deux lignes superposées, Wallis renverserait donc le sens du propos d'Euclide :

« Mais vous, sur la question de la nature de l'inclinaison, bien que vous prétendiez ne pas vous écarter d'Euclide, vous êtes pourtant plus obscur que lui et même vous le contredisez [...]. En effet vous considérez que deux lignes droites qui gisent l'une sur l'autre sont ἀκλίνῶς, c'est-à-dire sans aucune inclinaison [...]. [Mais], selon Euclide le plus grand angle est la plus grande inclinaison ; or, un angle égal à deux angles droits, à cause de cette ἀκλισία, ne devrait pas être la plus grande inclinaison, comme c'est bien le cas, mais la plus petite qui puisse être »[40].

Mais disant cela, Wallis entendait montrer que l'angle de contact n'est pas un angle, ce qui n'est justement pas le cas pour Hobbes. D'ailleurs, même si l'on admettait avec Wallis que la circonférence n'est pas inclinée sur la tangente, il ne s'ensuivrait pas que leur rencontre ne produirait pas un angle d'une autre espèce que celle définie par Euclide :

« En outre, si on vous accordait qu'il n'y a pas d'inclinaison de la circonférence sur la tangente, il ne s'ensuit pas pour autant que leur rencontre ne forme pas une certaine espèce d'angle ; car Euclide définit ici seulement une des espèces de l'angle plan »[41].

Dans la définition I,9 Euclide définit une espèce particulière d'angle, le

[40] « But you, in your question of what is inclination, though you pretend not to depart from Euclid, are, nevertheless, more obscure than he ; and also are contrary to him [...]. For you make two straight lines, when they lie one on another, to lie ἀκλίνῶς, that is without any inclination [...]. [But], according to Euclid, the greatest angle is the greatest inclination ; and an angle equal to two right angles by this ἀκλισία should not be the greatest inclination, as it is, but the least that can be » [Hobbes *Works*, VII, Lesson V, p. 258–289].

[41] « Besides, if it be granted you, that there is no inclination of the circumference to the tangent, yet it does not follow that their concourse doth not form some kind of angle ; for Euclid defineth there but one of the kinds of a plane angle. » [*Ibid.*, p. 259].

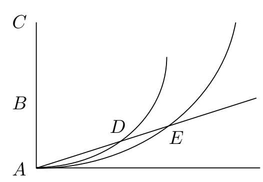
rectiligne. Rien n'interdit que c soit un angle d'une espèce non définie par l'Alexandrin et qu'il soit dans les attributs d'un tel angle d'être hétérogène à l'angle rectiligne.

Un autre argument concernant l'interprétation des définitions se retrouve à plusieurs reprises dans les *Six lessons* ainsi que dans les opuscules postérieurs : Wallis prendrait l'angle pour l'espace compris entre les côtés, c'est-à-dire pour une surface indéterminée[42].

Dans l'*Examinatio et emendatio* (1660), Hobbes [*Opera*, IV, p. 1–232] résume ses griefs contre l'interprétation par Wallis des définitions euclidiennes. « Il fallait, explique-t-il, que soit d'abord défini ce qu'est l'inclinaison avant que de définir par l'inclinaison l'angle plan. » Parce qu'il ne s'est pas donné cette peine, Wallis « se débat en vain » avec les mots κλίσις et ἀκλισία. La définition euclidienne contient plus que l'« imagination vulgaire » de l'angle qui présente l'angle comme « une certaine surface contractée » entre ses côtés et le réduit au point de contact[43].

Sur la mesure de c

Pour expliquer la différence entre des angles de contingence formés sur des cercles plus ou moins grands, Hobbes est conduit à changer la détermination de la mesure de l'angle de contingence qu'il avait proposée dans le *De corpore* :



[42] Hobbes reprend ici un thème des débats sur les définitions de l'angle dans l'Antiquité.

[43] « Oportuit prius definitum esse quid sit inclinatio, quam per inclinationem definiisset angulum planum. Quod cum non fecerit, in causa fuit quod Wallisius frustra se torserit in vocibus κλίσις et ἀκλισία. Sapit enim definitio Euclidea plus quam satis de vulgi imaginatione anguli, cum dicant hoc vel illud non factum esse in angulo. Sic quoque accipit Clavius, cum contra Peletarium disputans, angulum rectum majorem esse dicit quam est angulus semicirculi, ut totum quam pars ; deceptus eo quod superficies aliqua intercipi videtur inter arcum et tangentem. Itaque naturam anguli, vulgi more, in arcta quadam superficie consistere arbitrabatur : quod est falsum » [Hobbes, *Opera*, IV, p. 163].

« Et dans le cas où l'écartement des lignes courbes par rapport à la tangente est uniforme, comme dans les cercles, la quantité de leur écartement peut être déterminée. Car, si une ligne droite est tirée à partir du point de contact, l'écartement du plus petit cercle sera à l'écartement du plus grand cercle comme la partie de la ligne tirée à partir du point de contact et interceptée par la circonférence du plus grand cercle, est à la partie de la même ligne interceptée par la circonférence du plus petit cercle, ou, ce qui revient au même, comme le plus grand rayon au plus petit rayon »[44].

Hobbes propose ici de comparer deux angles de contingence en comparant les segments interceptés par une même droite tirée du point de contact et en s'appuyant sur la proportion $AD \cdot AE :: AB \cdot AC$ où A et B sont les centres respectifs des deux cercles. Il fait ainsi de la courbure le facteur déterminant pour fixer un ordre parmi les angles de contact. C'est une nouveauté notable par rapport au *De corpore*. En guise d'explication, Hobbes ajoute dans l'*Examinatio et emendatio* :

« On peut décrire un cercle non seulement au compas, mais aussi par la flexion continue d'une droite. Comme en effet la ligne droite peut être brisée pour former les côtés d'un polygone, de même elle peut s'infléchir, c'est-à-dire être brisée dans toutes ses parties, dans un polygone à un nombre infini de côtés »[45].

Mais, poursuit Hobbes, les courbes sont les unes plus courbes, les autres moins courbes et certes la courbure est une quantité. Si donc on demande lequel de deux arcs égaux de deux cercles différents est le plus courbe, il faudra répondre que celui du plus petit cercle est plus courbe. Hobbes conclut en ces termes :

---

[44] « And in case the digression of two such crooked lines from the tangent be uniform, as in circles, the quantity of their digression may be determined. For, if a straight line be drawn from the point of contact, the digression of the lesser circle will be to the digression of the greater circle, as the part of the line drawn from the point of contact, and intercepted by the circumference of the greater circle is to the part of the same line drawn from the point of contact, and intercepted by the circumference of the lesser circle, or, which is all one, as the greater radius is to the lesser radius » [Hobbes, *Works*, VII, Lesson I, p. 195].

[45] « Circulum non modo circino describi posse nosti, sed etiam continua flexione rectæ. Ut enim recta linea frangi potest in polygonum quotvis laterum æqualium ; ita flecti potest, id est, in omne parte frangi, in polygonum laterum numero infinitorum » [Hobbes, *Opera*, IV, p. 171].

« Je dis donc que la quantité de l'angle de contact est la quantité de courbure de la circonférence qui le contient. Tu vois cette figure, où deux cercles [AE] et [AD], qui se touchent en [D], sont décrits sur les centres [C] et B. La droite [AE] étant tirée qui les coupe l'un en [D], l'autre en [E], montre non seulement que les arcs semblables [AD], [AE] ont la même courbure, mais encore que cette courbure sera distribuée dans le plus grand cercle à travers de plus grands arcs que dans le plus petit ; mais au contraire, la partie [AD] dans la plus petite circonférence est plus courbe que la partie de la circonférence du plus grand [...] égale à cet arc ; et cela dans la raison de la plus grande corde [AE] à la plus petite corde [AD], c'est-à-dire dans la raison du rayon AC au rayon BC. [...] Je tire alors la tangente [...], celle-ci détermine combien l'arc [AD] s'écarte plus, à cause de sa courbure dans un arc plus petit, que l'arc [AE], à cause de la même courbure dans un arc plus grand. [...] La droite tirée de l'angle de contact, comme elle coupe proportionnellement tous les cercles intérieurs passant par [A], déterminera la quantité de courbure des arcs égaux dans chacun des cercles ; et par conséquent, il est la mesure de leur courbure ; laquelle puisqu'elle sera la ligne droite [ADE], toutes ses parties étant appliquées les unes sur les autres, les égales seront congruentes aux égales. C'est pourquoi les angles de contact sont homogènes entre eux, ils ont une quantité et ils sont hétérogènes aux angles rectilignes »[46].

[46] « Dico igitur quantitatem anguli contactus esse quantitatem curvitatis perimetri, quam contingit. Vide figuram hanc, ubi centris A et B descripti sunt duo circuli CD, CE, contigui in C. Ducta autem recta CD secans circulum alterum in E, alterum in D, non modo ostendit quod similes arcus CE, CD æqualem habent curvitatem, sed etiam quod illa curvitas distributa sit in majori circulo per majorem arcum quam in minori ; contra vero, partem CE in minore perimetro magis curvam esse quam pars perimetri majoris, puta CF, ipsi arcui CE æqualis, idque in ratione chordæ majoris CD ad chordam minorem CE, id est, in ratione radii AC ad radium BC. [...] Ducatur ergo tangens CG, determinabitque illa quanto arcus CE, propter curvitatem suam in arcu minore, magis recedit a tangente quam arcus CD, propter curvitatem eandem in arcu majore. [...] Recta a puncto contactus, cum secet omnes circulos interiores transeuntes per C proportionaliter, determinabit quantitatem curvitatis arcuum æqualium in unoquoque circulo sumptorum ; et proinde earum curvitatum est mensura ; quæ mensura cum sit linea recta CED, partes ejus omnes, applicatæ sibi invicem, æquales cum æqualibus congruent. Quare anguli contactus inter se homogenei sunt, habentque quantitatem, et sunt angulis rectilineis heterogenei » [*Ibid.*, p. 172].

J'ai modifié dans ma traduction les notations des points pour qu'elles correspondent à celles marquées sur la figure prédédente (celle des *Six lessons*).

La question du genre de c

Dans les *Six lessons*, Hobbes s'estime en mesure de donner une définition générale de la mesure qui manque chez Euclide et de définir les « grandeurs homogènes »[47]. C'est d'ailleurs faute d'une définition satisfaisante des grandeurs homogènes que s'est élevée la querelle de l'angle de contact[48]. La définition attendue doit, mieux que l'interprétation de Wallis, couper court au débat sur l'angle de contingence :

« Des quantités homogènes sont celles qui peuvent être comparées par l'application de leur mesure l'une sur l'autre. Ainsi, des solides et des surfaces sont des quantités hétérogènes parce qu'il n'y a pas de coïncidence ou d'application de ces deux dimensions »[49].

Voyons comment cette définition s'applique au cas des angles :

« La quantité de ce qu'on appelle simplement angle [nous dirions angle simple] et la quantité d'un angle de contingence sont hétérogènes. Car les mesures par lesquelles deux angles simples sont comparés sont deux arcs du même cercle qui sont applicables, mais la mesure par laquelle un angle de contingence est mesuré est une ligne droite interceptée entre le point de contact et la circonférence du cercle. Et par conséquent, l'un n'est pas applicable à l'autre, si bien que les quantités de ces deux genres d'angles sont hétérogènes. Les quantités de deux angles de contingence sont homogènes, car elles peuvent être mesurées par ἐφάρμοσις de deux lignes qui ont une extrémité commune, à savoir le point de contact, l'autre extrémité étant sur les arcs des deux cercles »[50].

---

[47] « To the principles of geometry the definition appertaineth also of a measure, which is, one quantity is the measure of another quantity, when it, or a multiple of it, is coincident in all point with the other quantity » [Hobbes, *Works*, VII, Lesson I, p. 196]. Il précise ensuite que le terme « coincident » traduit le grec ἐφαρμογὲ.

[48] « It is necessary also to the science of geometry to define what quantities are of one and the same kind, which they call homogeneous, the want of which definitions hath produced those wranglings (which your book *De Angulo Contactus* will not make to cease) about the angle of contingence » [*Ibid.*, p. 198].

[49] « *Homogeneous* quantities are those which may be compared by (ἐφάρμοσις) application of their measures to one another ; so that solids and superficies are heterogeneous quantities, because there is no coincidence or application of those two dimensions » [*Ibid.*].

[50] « The quantity of an angle simply so called, and the quantity of an angle of contingence are heterogeneous. For the measures by which two angles simply so-called are compared, are in two coincident arches of the same circle ; but the mesure by which an angle of contingence is measured, is a straight line intercepted between the

La mesure définie ci-dessus est une comparaison par « application » des grandeurs qui caractérisent la quantité des objets que l'on veut comparer. Si les grandeurs « caractéristiques » sont « applicables », les grandeurs mesurées sont homogènes, si elles ne le sont pas, elles sont hétérogènes. C'est précisément le cas de c et a, puisque selon Hobbes, la grandeur caractéristique d'un angle de contingence est une droite, celle d'un rectiligne un arc de cercle. En changeant son critère pour la mesure de l'angle, Hobbes vise donc à établir un ordre parmi les angles de contact et à justifier l'hétérogénéité de c et a.

Mais qu'en est-il des autres angles mixtes et en particulier de l'angle du demi-cercle ? Wallis avait reproché à Hobbes d'omettre la catégorie des angles mixtes formés par une courbe coupant une droite. Ce sont des angles « simples » affirme Hobbes. La mesure de l'angle simple étant un arc de cercle, celle d'un tel angle mixte ou d'un curviligne sera également un arc de cercle. Quant à l'angle du demi-cercle :

« Le diamètre et la circonférence font un angle droit et le même [angle] est produit par le diamètre et la tangente. Et parce que le point de contact n'est pas, comme vous le pensez, rien, mais une ligne non mesurée et commune à la fois à la tangente et à la circonférence, le même angle calculé dans la tangente [*i.e.* l'angle droit] est rectiligne, mais calculé dans la circonférence, il n'est pas rectiligne, mais mixte ; ou, si deux cercles se coupent, il est curviligne »[51].

Comme tous les angles formés par la section d'une droite et d'une courbe, l'angle du demi-cercle est un angle simple. Comme tel, il est homogène aux angles rectilignes. Et il est « le même », c'est-à-dire qu'il est égal à un angle droit. Hobbes reprend ensuite l'argument du *De corpore* pour expliquer ce qu'il y a de commun entre l'angle de contact et l'angle

point of contact and the circumference of the circle ; and therefore one of them is not applicable to the other ; and consequently of these two sorts of angles the quantities are heterogeneous. The quantities of two angles of contingence are homogeneous ; for they may be measured by the ἐφάρμοσις of two lines, whereof one extreme is common, namely, the point of contact, the other extremes are in the arches of the two circles » [*Ibid.*, p. 198–189].

[51] « The diameter and the circumference make a right angle, and the same which is made by the diameter and the tangent. And because the point of contact is not, as you think, nothing, but a line unreckoned, and common both to the tangent and the circumference ; the same angle computed in the tangent is rectilineal, but computed in the circumference, not rectilineal but mixed : or, if two circles cut one another, curvilineal » [*Ibid.*, p. 253].

rectiligne : de même que tout angle rectiligne est mesuré par un arc de cercle dont on peut tracer la corde, de même l'angle de contact est mesuré par un arc de cercle dont la corde est réduite à rien, ou est devenue une droite tangente. Au point de contact, c a une quantité (puisque pour Hobbes, le point en a une). C'est pourquoi les angles de contact sont des grandeurs et peuvent être comparés entre eux. Mais si l'on veut le mesurer comme le rectiligne (par l'arc de cercle), alors il n'a aucune grandeur.

Sur le "lemme de Peletier"

Wallis s'est ingénié à montrer (dans les chap. VIII et IX de la *Disquisitio*) que les angles des segments semblables sont égaux, « comme si cela n'avait pas pu être tiré *gratis* de Peletier, sans démonstration ». L'argument du chapitre IX ne serait d'ailleurs pas une démonstration, mais « un discours conjectural sur le terme *similitude* »[52]. La réponse la plus détaillée sur ce point est celle que Hobbes développe dans l'*Examinatio et emendatio*. Le « lemme de Peletier » est vrai, mais

« il s'ensuit bien que l'angle de contact n'est pas une partie de l'angle que contient la circonférence et le diamètre ; mais pas qu'il n'a pas sa quantité propre ; ni qu'un angle de contact ne peut être plus grand que ou plus petit que ou égal à un autre angle de contact »[53].

Il s'efforce ensuite de démontrer le « lemme de Peletier » à sa manière :

« Selon ma définition, la quantité de l'angle de contact est la quantité qu'a un arc intercepté entre deux rayons, comparée à la quantité de tout le périmètre. Mais l'angle formé entre le diamètre et la tangente n'intercepte aucun arc. Donc, la quantité de l'angle de contact n'est pas une partie de la quantité de l'angle rectiligne. C'est pourquoi l'arc [*sic*] du demi-cercle seul, sans l'angle de contact, est droit »[54].

[52] « In your ninth and tenth chapters, you prove with much ado, that the angles of like segments are equal ; as if that might not have been taken gratis by Peletarius, without demonstration. And yet your argument, contained in the ninth chapter, is not a demonstration, but a conjectural discourse upon the world similitude » [*Ibid.*, p. 263].

[53] « Sequitur quidem inde angulum contactus nullam partem esse anguli qui continetur a diametro et circumferentia ; non autem quod non habet suam sibi quantitatem ; nec quod angulus contactus unus altero non possit esse vel major, vel minor, vel æqualis » [Hobbes, *Opera*, IV, p. 167].

[54] « Quantitas anguli rectilinei, per definitionem meam, est quantitas quam habet arcus interceptus inter duos radios, comparata ad quantitatem totius perimetri. Sed angulus factus inter diametrum et tangentem, nullum intercipit arcum. Est ergo quantitas anguli contactus nulla pars quantitatis anguli rectilinei. Quare arcus semicirculi solus,

Hobbes pense avoir résolu dans le *De corpore* la question que Wallis remettait en débat dans la *Disquisitio.* Comme le *Savilian Professor* lui opposait dans l'*Elenchus* les arguments de ladite *Disquisitio*, il est naturel que Hobbes, en même temps qu'il défendait la position du *De corpore*, examinât à son tour les démonstrations de la *Disquisitio.* La défense de Hobbes n'apporte rien de bien nouveau — Hobbes campe sur ses positions —, mais la contre-offensive comporte quelques arguments, maladroitement exprimés, qui pouvaient ébranler Wallis. Voyons à présent comment il a réagi.

L'attitude de Wallis dans la polémique

En réponse aux *Six lessons* de Hobbes, Wallis publie la *Due Correction* [Wallis 1656a]. Il consacre la quatrième section de cet ouvrage à l'angle de contact.

À l'affirmation de Hobbes que deux lignes confondues, non inclinées, devraient avoir la plus grande inclinaison (et contenir le « plus grand » des angles, égal à deux droits), Wallis n'a aucune peine à répondre en renvoyant son adversaire à la définition euclidienne de l'angle plan :

« Dites-moi où des lignes, placées dans la même position ou parallèles, sont dites par Euclide inclinées ou s'incliner l'une sur l'autre ? Se toucher ? ou se couper l'une l'autre ? [...] Montrez-moi où Euclide a pu affirmer qu'aucun angle était égal à deux droits ? Ou, ce qui est tout comme, que deux parties contiguës de la même ligne droite sont dites par Euclide *être inclinées l'une sur l'autre* et *contenir un angle* ? Non, il dit exactement le contraire. Car dans sa définition d'un angle plan, il pose comme une condition que les lignes qui le contiennent ne soient pas placées en ligne droite »[55].

Hobbes objectait ensuite que dans la définition I,9, Euclide ne définissait

absque angulo contactus, rectus est » [*Ibid.*, p. 167–168].

[55] « Tell mee, where lines, either in the same or in parallell position, are by Euclid said to incline or to be inclined each to other ? to thwart, or crosse each other ? [...] Shew me where ever Euclide doth acknowledge any angle to be equall to two right angles ? or, which is all one, that two contiguous parts of the same right line, are by Euclide said to be *inclined to each other*, or *to contain an angle* ? Nay, he says the quite contrary. For in his definition of a plain angle, he makes it one qualification, that the lines containing it, must be such as are non *indirectum positæ* » [Wallis 1656a, p. 35].

qu'une espèce d'angle (rectiligne) et proposait l'hypothèse que le contact d'une droite et d'un cercle serait un angle d'une espèce que ne subsumerait pas cette définition. En guise de réponse, Wallis renvoie Hobbes à la définition I,8 :

« [...] qu'il ne définisse pas là un angle plan en général, cela est évident par ses propres mots. Car dans la huitième définition, il définit un angle plan (en tant que genre) [...] Il est donc manifeste que dans cette définition qui précède [définition I,9], il entendait définir l'angle plan en général, que les lignes qui le contiennent soient droites ou courbes. Et par conséquent, puisque l'angle de contact ne tombe pas dans cette définition, il ne doit pas être tenu pour un angle plan. Et ainsi, mon premier argument tient »[56].

Si Hobbes s'était référé explicitement à la définition I,8 et avait argué de la généralité de celle-ci pour soutenir que l'angle de contact devait, selon Euclide être un angle conformément à cette définition, Wallis aurait été plus embarrassé pour répondre. Ici, le professeur d'Oxford se défausse. L'angle de contact n'est pas un angle plan, il n'entre donc pas dans la définition I,8 et il ne peut être un angle d'une autre espèce, comme le prétend Hobbes.

Sur la question de l'homogénéité de c et a, que Wallis s'était efforcé de prouver, l'opposition est frontale avec Hobbes, pour qui c et a sont hétérogènes. Dans la longue réponse qu'il lui adresse dans la *Due correction*, Wallis s'applique surtout à montrer que Hobbes n'a rien objecté de solide aux démonstrations de la *Disquisitio*. Le fait que Hobbes refuse ponctuellement les interprétations usuelles d'Euclide offre d'ailleurs à Wallis un argument solide : il n'a qu'à se référer au texte des *Éléments* pour montrer que Hobbes en contredit la lettre même. Finalement, Wallis tient toujours la ligne « pélétaro-euclidienne » qu'il suivait dans la *Disquisitio*. Il ne semble pas vouloir s'écarter de la position de l'Alexandrin et maintient son opinion que l'interprétation de Peletier est conforme à celle d'Euclide.

---

[56] « [...] that he not there define a *plain Angle* in generall, and therefore all kinds of plain angles is evident from his words. For in the eighth Definition he defines a *plain Angle*, (as the *genus*) [...]. It's manifest therefore that he intended in the former definition to define a plain angle in generall; whether the lines containing it be streight or crooked. And therefore since the angle of contact falls not within that definition, it is not to be reputed a plain angle. And so my first argument stands good » [Wallis 1656a, p. 36].

Dans un autre des opuscules qu'il écrit contre Hobbes, l'*Heautontimorumenos* [Wallis 1662], il donne une réponse incisive qui montre qu'il ne prend pas Hobbes au sérieux. Si ce dernier peut prétendre que l'angle de contingence est un angle, c'est que ce qu'il appelle « angle » n'est pas ce que tout un chacun sait être un angle :

« Pourtant, dit-il c'est un angle, c'est-à-dire ce que, *lui*, il entend par angle, mais ce n'est pas ce que les autres entendent par ce mot (et il pourrait aussi bien prouver qu'un cheval est un angle ; car s'il lui plaisait d'établir d'abord que par angle il n'entend pas ce qu'Euclide appelle angle, mais ce que d'autres appellent animal, il pourrait bien déduire qu'un cheval est un angle, c'est-à-dire un animal, et de quelque grandeur). [...] Maintenant, bien que ce ne soit pas plus à propos ici de parler de ce que M. Hobbes appelle angle que d'un hameçon (car cela aussi est appelé [en anglais] un angle), il l'entreprend mal à propos »[57].

Les critiques qui suivent soulignent la confusion du propos de Hobbes. D'abord, ce que Hobbes appelle quantité d'un angle de contact n'est rien d'autre que la quantité de courbure d'une ligne circulaire. Lorsqu'il examine ensuite la façon dont Hobbes mesure la courbure ou la quantité de l'angle de contact dans l'*Examinatio et emendatio*, Wallis relève d'abord que Hobbes n'est pas en état de dire la mesure d'un angle de contact (*angulus mensuratur*), mais seulement de comparer deux angles de contact (*anguli mensurantur*) par comparaison d'une droite placée au point de contact et les interceptant. Puis, il note que les cordes sont en proportion inverse de la courbure des cercles (et non en proportion directe, comme l'écrivait Hobbes).

Sur l'hétérogénéité de c et a, il relève une autre erreur de raisonnement. Hobbes prétend que la quantité de l'angle de contact est hétérogène à celle de l'angle rectiligne, parce que « la mesure d'un angle rectiligne (*i.e.* un arc de cercle) est incongruente avec celle d'un angle de contact (*i.e.* une droite) ». Wallis rétorque que, s'il est vrai qu'on mesure les angles

[57] « Yet, he says, it is *an Angle*, that is such a thing as *He* means by Angle, though not what other means by that word. (And he might as well have proved, that *A Horse is an Angle* : For, if it shall please first to *Define*, that by *Angle* he doth not mean what *Euclide* calls *Angle*, but what others call *Animal*; he may well infer, That *A Horse is an Angle*, that is, an *Animal*, and *of some Magnitude*.) [...] Now, though it be no more to the purpose, in this controversy, to talk of Mr. *Hobs's Angle*, than to talk of a *Fishing-hook* (for that also is called an *Angle*;) Yet, since he doth so importunely intrude it » [Wallis 1662, p. 90].

rectilignes par des lignes courbes (arcs de cercles), il n'est pas vrai que c est mesuré par les seules lignes droites : en comparant les arcs eux-mêmes, on a le même rapport entre les angles de contact.

Pour conclure, Wallis répète les thèses de 1656 : l'angle de contact n'a aucune quantité, quelle que soit la courbure du cercle ; car, si les angles du demi-cercle sont tous égaux (comme l'admet Hobbes), les angles de contact doivent être de la même façon égaux et d'aucune grandeur[58]. Wallis ne reviendra plus sur la question de l'angle de contact dans ses publications ultérieures, si ce n'est dans une lettre qu'il adresse à Oldenburg le 24 juillet 1666 au sujet du *De principiis et ratiocinatione geometrarum* [Hobbes 1666]. Dans cette lettre, publiée dans le volume XVI des *Philosophical Transactions*, au début du mois d'août, Wallis renvoie à son *Heaunton-timorumenos* :

« Ce qu'il dit là, aux chapitres VIII et XIX (et dans son cinquième dialogue, p. 105 et suiv.) concernant l'angle de contact tient seulement à cela, que par angle de contact, il n'entend ni ce qu'Euclide appelle un angle de contact, ni rien d'autre semblable (et par conséquent, il ne dit rien à propos de ce qui est l'objet de la controverse entre Clavius et Peletier, lorsqu'il dit qu'un angle de contact a quelque grandeur) ; mais que par l'angle de contact, il comprend la courbure de l'arc ; et lorsqu'il dit que « l'angle de contact a quelque grandeur », il veut dire que l'arc d'un cercle a quelque courbure, ou bien qu'il est une ligne courbe, et qu'entre des arcs égaux, le plus courbe est celui dont la corde est la plus courte, ce que personne je crois ne niera (car qui a jamais douté qu'un arc de cercle est courbe ? Ou qu'entre des arcs d'égales longueurs, le plus courbe est celui dont les extrémités sont plus proches l'une de l'autre ?). Mais la raison pourquoi la courbure d'un arc devrait être appelée un angle de contact, je n'en connais aucune, sinon que M. Hobbes aime appeler "craie" ce que d'autres appellent "fromage" »[59].

---

[58] « But the *Angle of Contact*, whether of Greater or Lesser Circles, is still the same ; that is, of *No Magnitude* in either. For, since that the *Angles of Semicircles* [...] be, by Mr *Hobs*'s own grant, Both equal ; and, equal to [a right-angle] ; the *Angles of Contact* [...] must be likewise equal, and of *no Magnitude* » [*Ibid.*, p. 99].

[59] Wallis to Oldenburg – 24 july 1666, in [Oldenburg, *Correspondence*, III, p. 195] : « What he says here, Chap. 8. & 19. (and in his fifth Dial. p. 105. &c.) concerning the Angle of Contact ; amounts but to thus much That, by the Angle of Contact, he doth not mean either what Euclide calls an Angle, or any thing of that kind ; (and

3. DE WALLIS À NEWTON

La Defense

En 1685, alors qu'il n'a plus répondu à Hobbes depuis 1662, Wallis fait paraître la *Defense of the Treatise of the Horn Angle* à la suite de son traité d'algèbre. Il la présente clairement comme un complément de ce traité[60]. Dans les deux premiers chapitres, il réexpose les arguments de 1656 contre Clavius. Le troisième est le texte d'une lettre adressée au jésuite Vincent Léotaud. Dans les chapitres IV à VI, il entend développer le contenu de la lettre à Léotaud. Dans le septième et dernier chapitre, il aborde avec les mêmes ressources géométriques un problème de physique, la « composition des mouvements ». Cela donne à la *Defense* l'aspect d'un ouvrage composite[61].

Je ne m'arrêterai pas sur les deux premiers chapitres, mais la « Lettre

therefore says nothing to the purpose of what was in the controversie between Clavius and Peletarius, when he says that An Angle of Contact hath some magnitude :) But, that by the Angle of Contact he understands the Crookedness of the Arch ; and in saying, *the Angle of Contact hath some magnitude*, his meaning is, that the Arch of a Circle hath some crookedness, or, is a crooked line ; and that, of equal arches that is the more crooked, whose chord is shortest : which I think non will deny ; (for whoever doubted, but that a circular Arch is crooked ? or that of such Arches, equal in length, That is the more crooked, whose ends be bowing are brought nearest together ?) But, why the Crookedness of an Arch should be called an Angle of Contact ; I know ne other reason, but because Mr. Hobs loves to call that *Chalk*, which others call *Cheese.* »

[60] « In pursuance of the notion, mention'd in the Chapter of my Treatise of Algebra : That, in all sorts of Magnitudes (or Quantities) whatever, That which may be proved to be *less than any assignable*, is indeed (as to that sort of Quantity) of *no Magnitude* : (because if of any, it might be so Multiplied as to exceed the greatest :) I do, in my Treatise of the *Angle of Contact, and that of a Semicircle* (published, with my Arithmetick of Infinites, and some other things, in the year 1656.) shew, (with Peletarius, against Clavius,) That (what is commonly called) the *Angle of Contact*, is *of no magnitude* : But is, to a real Angle, whether Rectilinear or Curvilinear, or otherwise Mixt, (which is, it self, of any Magnitude) as o (a Cypher) to a Number. And, consequently, that of the Semicircle, equal to a (Rectilinear) Right-Angle » [Wallis 1685, chap. I, p. 71].

[61] En voici la table des matières :
Chapitre I. L'angle de contact n'est d'aucune grandeur
Chapitre II. On répond aux objections de Clavius
Chapitre III. On répond aux objections de Léotaud
Chapitre IV. La même idée mieux expliquée
Chapitre V. De la composition des grandeurs
Chapitre VI. Des grandeurs commençantes
Chapitre VII. De la composition des mouvements

à Léotaud » mérite un rapide examen. Si la *Defense* a été publiée à la veille de la parution des *Principia mathematica* de Newton, ladite lettre est bien antérieure, puisqu'elle est datée du 17 février 1667 « Stilo angliæ » (c'est-à-dire du 27 février 1668 suivant le calendrier grégorien)[62]. Publiée en latin, elle apparaît comme un corps étranger au reste de l'ouvrage. Wallis présente pourtant sa controverse avec Léotaud comme l'occasion qui l'a décidé à rédiger un nouvel opuscule sur l'angle de contact et le noyau autour duquel il a écrit la *Defense*.

Léotaud consacrait le Livre II de sa *Cyclomathia* [Léotaud 1663], à la question de l'angle de contact. Il poursuivait ainsi une controverse qui agitait le milieu des mathématiciens jésuites depuis que Tacquet s'était opposé à Clavius sur ce point dans son édition des *Éléments* [Tacquet 1654]. Dans un texte brouillon et volumineux, Léotaud s'en prenait principalement à son coreligionnaire Aynscom [1656] et prenait le parti de Clavius. Mais il attaquait aussi un autre adversaire de ce dernier : Wallis.

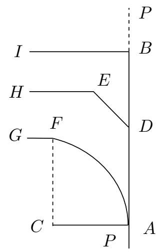
La réponse que Wallis adresse à Léotaud ne contient rien de bien nouveau. Tout au plus montre-t-elle, comme les deux chapitres qui la précèdent, que l'opinion de Hobbes n'est pas considérée dans la *Defense* et que la seule opinion qu'entend discuter Wallis dans cet opuscule est, avant même celle de Léotaud, celle de Clavius.

L'originalité de la *Defense* commence à apparaître dans le chapitre IV. Wallis formule le « préjugé » qui est selon lui à l'origine du débat sur l'angle de contact : d'où vient que la courbe s'écarte de la tangente, si elle ne fait pas un angle ? Et d'où vient que telle courbe s'écarte plus que telle autre sans faire un angle plus grand[63] ? Pour répondre, Wallis commence par distinguer « flexion » et « brisure » :

---

[62] Une lettre à Collins du 15 février 1668 en est le brouillon [Rigaud 1841, II, n° 300 – Wallis to Collins, p. 485-488]. Wallis évoque encore la *Cyclomathia* de Léotaud dans une lettre à Huygens du 10 septembre 1668 (1669 ?) [Huyghens, *Œuvres*, VI, J. Wallis à Christiaan Huyghens – 1659, p. 251–257]. Wallis s'y plaint à Huygens que « ses Français » (*Gallis vestris*) saisissent sans cesse occasion de l'attaquer. Comme exemple, il mentionne Léotaud. Il souligne que ce dernier n'a pas répondu à la lettre qu'il lui a adressée et hésite sur la nécessité de lui donner une réponse publique.

[63] « But (so great is the strength of prejudice) this, (however demonstrated) doth (with many men) look like a Paradox to sense. For, say they, how comes the Curve AB or AE, to fly off from AP, or from one another, if they make no Angle with AP, or with one another » [Wallis 1685, p. 89].



Une ligne droite peut changer de position « par rapport à une partie d'elle-même » par une ou plusieurs « brisures » (comme pour passer de la position $ADBP$ aux positions perpendiculaires ABI ou $ADEH$) ou par « flexion continue » (comme pour AFG)[64]. Ce changement de position se mesure chaque fois en sommant les angles externes dont chacun est, dans ce cas, une fraction de l'angle droit. Dans le cas de la flexion, le changement de direction se fait en chaque point de la ligne et le nombre de ces angles est infini. Chacun de ces angles externes est donc « une partie infinitésimale de l'angle droit » :

« Maintenant, si on considère de tels arcs de cercles comme faits d'un certain nombre (fini ou infini) de lignes droites, que toute la flexion ou courbure d'un arc du quadrant (comme c'est le cas ici) est équivalente à un angle droit et que cette flexion est uniforme (comme c'est le cas dans le cercle), alors il sera nécessaire d'attribuer à chaque point de flexion cette partie de l'angle droit qui est divisée par le nombre (fini ou infini) de lignes droites dont l'arc est supposé être composé. Ainsi, si ce nombre est supposé infini, ce sera $\frac{1}{\infty}R$, une partie infiniment petite de l'angle droit. Tel sera l'angle du contact en chaque point d'un tel polygone rectilinéaire, dont le quadrant est fait d'un nombre infini de lignes droites. Tel sera ce qui manque (en chaque point) à l'angle interne par rapport à deux droits »[65].

[64] Il faut se souvenir ici que dans le *De corpore*, Hobbes distinguait lui-même les angles selon qu'ils sont produits par la flexion ou par la fraction d'une ou des lignes qui les composent (voir ci-dessus).

[65] « Now, if we consider such Circular Arches, as made up of a certain number (finite or infinite) of streight-lines; and the whole Flexure or Bowing of a Quadrantal Arch (as here) Equivalent to one Right-angle; and that Flexure uniform (as in a Circle it is) we must then allow to each Point of Flexure, such a Proportional part of one Right-angle, as is denominated by such number (finite or infinite) as is the number of parts so supposed, and therefore, if infinite, $\frac{1}{\infty}$R, a Proportional part, (of one Right-angle) infinitely small : And such will be the Angle of Contact (at each Point) in such Rectilinear Polygone, whose Quadrant consists of an infinite number of such streight-

Wallis retrouve ici la mesure qu'il donnait à l'angle de contact dans la *Disquisitio*. Cette mesure était l'aboutissement de l'enquête de 1656. Elle est cette fois un nouveau point de départ. Il faut en effet revenir au préjugé mentionné plus haut et répondre à la question : pourquoi la courbe s'écarte-t-elle de la tangente ? Et surtout, pourquoi s'écarte-t-elle plus rapidement lorsque les cercles sont plus petits ?

« Je réponds : parce que la circonférence plus petite est plus courbe. Car elle a autant de courbure, mais en une longueur moindre. Ainsi, bien que, quant à la quantité, elle ait autant de courbure (extensivement), elle est néanmoins, quant à la qualité, plus courbe ; c'est-à-dire qu'elle est proportionnellement plus courbe »[66].

L'introduction de la notion de courbure est une autre nouveauté de la *Defense*. En adoptant cette notion qu'il reprochait à Hobbes d'invoquer dans son analyse de la question de l'angle de contact, Wallis renonce au « lemme de Peletier », l'égalité de tous les demi-cercles à un droit. C'est en tout cas une notion indispensable pour l'achèvement de la réflexion de Wallis sur l'angle de contact.

Je ne m'arrête pas sur le chapitre V intitulé « De la composition des grandeurs ». Wallis tire occasion de la méditation qu'il vient de mener pour développer des considérations plus générales sur les grandeurs de la géométrie et les courbes en particulier. Mais dans le chapitre VI, il entend apporter son argument décisif pour la solution de notre problème :

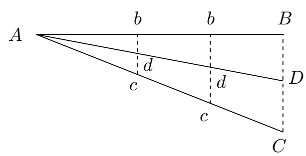
« Il y a des choses qui, bien qu'elles ne soient rien comparativement à un certain genre de grandeurs, sont néanmoins dans la possibilité très voisine de devenir quelque chose. Elles ne sont pas cette chose jusqu'alors, mais seulement pas, et elles sont dans la potentialité très proche de devenir ce quelque chose [...]. Ainsi, elles peuvent être appelées à juste titre *inchoatifs* ou *commencements* de ce quelque chose vis-à-vis de quoi elles sont dans une telle possibilité »[67].

lines ; and so much will the Internal Angle (at each Point) want ot two Right-angles » [*Ibid.*, p. 90].

[66] « I answer, because the lesser Circumference is more crooked. For it hath as much Curvity, in a shorter length. And therefore, tho, as to the Quantity of it, there be (extensively) but just so much, (*tantundem Curvitatis*) yet, as to the Quality of it, it is (*intensius Curva*) more crooked intensively ; that is, it is ratably (or proportionally) more crooked » [*Ibid.*].

[67] « There are some things, which tho, as to some kind of Magnitude, they are nothing ;

Le concept de « commencement de grandeur » est illustré d'abord par les cas du point, de la ligne et du plan, respectivement commencements de la ligne, de la surface et du solide, avant d'être appliqué à la notion d'angle rectiligne. Celui-ci, explique Wallis, est formé au « point angulaire » (*i.e.* le sommet), lequel n'est pas autre chose que le « commencement de distance » entre les côtés. En effet, l'inclinaison (ou « degré d'écartement ») des côtés est constante à quelque distance du point angulaire qu'on la prenne. Il faut donc supposer que cette inclinaison se retrouve au point angulaire lui-même, considéré comme « commencement de distance » : sa grandeur, exprimée par la « pente » de AC, est hétérogène à celle par laquelle on exprime la distance.



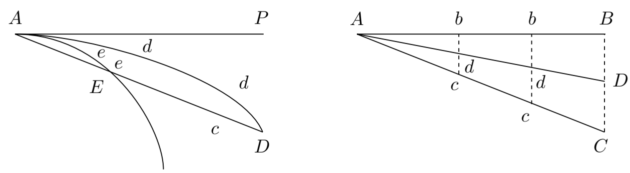
L'angle pourra donc être étudié en tant que commencement de grandeur. Cette notion a été forgée « sur mesure » pour définir la nature spécifique de cet objet géométrique particulier et pour résoudre la question de l'angle de contact. En effet, poursuit Wallis, si dans le cas de l'inclinaison mutuelle de deux droites, la pente reste constante, elle peut aussi varier graduellement « par flexion continuelle », comme dans le cas de la courbe et de sa tangente :

« Je dis ensuite [...] que l'écartement (par lequel une courbe s'écarte de sa tangente et qu'on appelle vulgairement « angle de contact ») n'est pas un angle ou une inclinaison (tout comme dans le mouvement, l'accélération n'est pas la vitesse), mais il est le commencement d'une inclinaison indiquant le degré de courbure, c'est-à-dire en quelle raison ou proportion la courbe s'écarte de la rectitude, ou de la direction qu'elle avait au point de contact »[68].

yet are in the next possibility of being somewhat. They are not it, but tantum non; they are in the next possibility to it; [...] And may very well be called *Inchoatives* or *Inceptives*, or that somewhat to which they are in such possibility » [*Ibid.*, VI, p. 95].

[68] « I say further, [...] That Deflection (whereby a Curve-line departs from its Tangent, and which is commonly called the Angle of Contact) is not Angle, or Declination; (like

Voici défini « ce qu'on appelle vulgairement » l'angle de contact. Ce n'est pas en réalité un angle, puisque ce dernier était défini comme commencement de la distance mesurée au point angulaire. Or, il n'y a pas de distance au point de contact. L'angle de contact est pourtant bien quelque chose : le « commencement d'une pente ». Sa grandeur, exprimée par la « courbure » de AE, est hétérogène à celle par laquelle on exprime la pente.



Wallis pose donc entre l'angle rectiligne et c une distinction très nette, sur la base du fait qu'ils ne sont pas caractérisés par le même type de « grandeur commençante ». Traiter l'angle rectiligne et l'angle de contact en termes de grandeurs commençantes permet de les considérer l'un et l'autre comme des grandeurs dont la quantité s'exprime sous la forme de rapports de distances ; mais ces rapports n'expriment pas la même chose dans les deux cas : dans le premier cas, ils expriment la pente, dans le second, ils expriment la courbure. Pour finir, Wallis l'affirme clairement : ces deux grandeurs ne peuvent être comparées l'une à l'autre. Elles sont hétérogènes.

« Par exemple, dans les angles rectilignes BAC, BAD, (qui sont des commencements de distance) la pente AcC (ou son inclinaison par rapport à AbB) est en toutes ses parties la même et celle de AdD de même. Et de même que les distances cb, cb, CB (qui commencent à rien) sont proportionnelles aux longueurs Ac, Ac, AC, de même les distances db, db, DB (qui commencent également à rien) sont proportionnelles aux longueurs Ad, Ad, AD. Mais les angles (ou degrés de pente) BAC, BAD sont différents et peuvent être différents dans une grande variété de proportions. De même les arcs circulaires AD, AE qui s'écartent de

as, in motion, Acceleration is not Celerity :) But is inceptive of Declination ; shewing the degree of Curvity : That is, at what rate, or in what proportion, it flies off from Rectitude, or varies from that direction which it had at the Point of Contact » [*Ibid.*, p. 97–98].

leur tangente AP (qui sont des commencements d'angles ou de pentes) sont chacun uniformes, et ont le même degré de courbure dans chacune de leurs parties. Et de même que les pentes aux points d, d, D (issues de rien en A) sont proportionnelles aux longueurs Ad, Ad, AD, de même, celles aux points e, e, E (issues de rien également) sont proportionnelles aux longueurs Ae, Ae, AE. Mais si l'on compare leur degré de courbure l'un à l'autre, ils diffèrent (et peuvent varier en des proportions très diverses) : l'arc du plus petit cercle est plus courbe (ayant autant de courbure dans une plus petite distance, il est par conséquent plus intensément courbe) et il est plus courbe dans la même raison que les diamètres du cercle (ou les cordes des arcs semblables AD AE) sont plus courts (leurs degrés de courbure étant inversement proportionnels à la longueur de leurs diamètres, ou aux arcs semblables, ou aux cordes des arcs semblables). Et bien qu'au point de contact, leur degré de pente soit également nulle, leur degré de courbure est quelque chose (et il est différent dans l'un et dans l'autre) et il a sa propre grandeur ; mais elle est d'une autre sorte et hétérogène à la grandeur de l'angle ; de même que l'angle (ou pente) est hétérogène à la distance ; la vitesse à la longueur ; l'accélération à la vitesse ; la ligne à la surface ; la surface au solide ; et ainsi de bien des choses qui ont leur propre grandeur et qui sont chacune le commencement d'autres grandeurs, mais elles n'ont pas la grandeur de celles dont elles sont le commencement »[69].

[69] « For instance, in the Rectilinear Angles BAC, BAD, (which are Inceptives of distance) the Declivity of AcC (or Declination from AbB) is in all parts of it the same ; and that of AdD likewise : And as well the distances cb, cb, CB, (beginning from nothing) are proportional to the lengths Ac, Ac, AC ; as the distances, db, db DB (beginning also from nothing) are proportional to the lenghts Ad, Ad, AD : But the Angles (or degrees of Declivity) BAC, BAD are different ; and may be so in very different proportions. And in like manner, the Circular Arches AD, AE deflecting or flying off from their Tangent AP (which are inceptives of Angle or Declination) are each of them (as to it self) Uniform, and have in each part of it the same degree of Curvity ; and as well the Declivities at ddD (bginning [*sic*] from nothing at A) are proportional to the lengths Ad, Ad, AD ; as those at eeE (beginning also from nothing) are proportional to their lengths Ae, Ae, AE : But their degrees of Curvity compared each with others, are different, (and may be so in very different proportions ;) that of the lesser Circle being more crooked, than that of the greater, (as having the same quantity of Curvity in a shorter length, and therefore Intensively more crooked) and in the same proportion more crooked as their Diameters (or Chords of like Arches AD, AE) are shorter ; (their degrees of Curvity being reciprocally proportional to the length of their Diameters, or of like Arches, or of the Subtenses of like Arches ;) And tho at the Point of Contact, their degree of Declivity be equally nothing, yet their degree

Wallis avait ouvert la *Defense* en répétant ses critiques contre Clavius. C'est aux partisans du jésuite que Wallis répond dans la fin du chapitre VI :

« On dira peut-être que je suis à présent d'accord avec Clavius au sujet de ce dont nous disputions auparavant. Clavius veut que son angle de contact ait quelque grandeur, mais hétérogène à celle de l'angle rectiligne et incapable d'une proportion avec lui.

À cela je réponds que j'ai jusqu'à présent admis avec Clavius (et je l'admets toujours) que ce qu'il appelle angle de contact n'est rien d'autre que ce que j'appelle degré de courbure et que cette courbure, bien qu'elle soit une qualité, est cependant une qualité telle qu'elle a une quantité ou grandeur, capable de mesure et de proportion. Et [j'admets] que ce degré de courbure est hétérogène à l'angle, c'est-à-dire au degré de pente, et qu'il n'est par conséquent pas capable d'une proportion avec lui et ne peut, multiplié autant qu'on veut, l'égaler ou le surpasser.

Mais nous divergeons en cela qu'il fait de son angle de contact une quantité telle qu'elle est une partie d'un angle droit rectiligne et du reste (qui est l'angle du demi-cercle) [une quantité] moindre que l'angle droit rectiligne. Et [qu'il considère que] certains de ces angles sont plus petits que les autres (faisant des angles des demi-cercles inégaux des angles inégaux) et que l'angle de contact n'est un angle hétérogène à l'angle droit rectiligne qu'en cela qu'il est très petit.

Mais dis-je, si l'angle de contact était une partie, et une partie telle qu'elle laisse le reste moindre que le tout, alors celui-ci et le reste seraient tous deux homogènes au tout et pourraient être multipliés de façon à surpasser le tout (comme cela est toujours possible pour la plus petite de deux quantités). Et aucune partie d'une grandeur ne peut être si petite qu'elle ne puisse être capable d'une telle multiplication, et hétérogène seulement parce que petite, alors qu'il est admis que l'angle de contact (quoi qu'il soit) est tel qu'il ne peut par aucune multiplication arriver à égaler ou surpasser un angle rectiligne »[70].

of Curvity is somewhat (and different one from the other) and hath its Magnitude, tho of another kind and Heterogeneous to that of Angle ; in like manner as Angle (or Declivity) is Heterogeneous to Distance ; Celerity, to Length ; Acceleration, to Celerity ; Line, to Surface ; Surface, to Solid ; and the like : All which have their own Magnitude whereof, and are inceptives of other Magnitudes, but have nought of that Magnitude whereof they be Inceptives » [*Ibid.*, p. 98–99].

[70] « It may be said, perhaps, that I do now agree with Clavius, in what I did before

En mettant en évidence ce qui le sépare de Clavius, Wallis ne peut masquer ce qui le rapproche à présent de Hobbes. Il admet désormais que c est une grandeur et qu'il est hétérogène à l'angle rectiligne. Il caractérise cette grandeur par la courbure alors qu'il reprochait à Hobbes de confondre angle et courbure. Il renonce enfin clairement à utiliser les notions communes pour comparer angles rectilignes et angles mixtes, alors qu'il faisait encore du recours aux notions communes un argument contre Léotaud dans sa lettre.

L'origine de ce retournement n'est certainement pas la controverse avec Léotaud. C'est plus sûrement dans la controverse avec Hobbes et la géométrie de son adversaire philosophe que Wallis a trouvé au moins une partie des matériaux d'une méditation nouvelle sur l'angle de contact. Ainsi, rétrospectivement, le souci de ne pas « triompher d'un homme aujourd'hui décédé »[71], par lequel Wallis se justifie en 1693 d'écarter de ses œuvres complètes les opuscules polémiques contre Hobbes, est peut-être doublé d'une motivation difficilement avouable : ne pas donner au public des textes dans lesquels il attaquait des thèses bien proches de celles qu'il défend une dizaine d'années plus tard et dont la lecture laisserait plus

dispute against; who will have his Angle of Contact, to have somewhat of Magnitude, but Heterogeneous to that of a Rectilinear Angle, and not capable of Proportion to it.

To which I answer, I do thus far agree with *Clavius*, (and always did) That what he calls an Angle of Contact, is but what I call the Degree of Curvity; and that this Curvity, tho a Quality, is such a Quality as hath a Quantity or Magnitude, capable of measure, and of proportion; and that this degree of Curvity is Heterogeneous to Angle, or the degree of Declivity; and therefore not capable of proportion to it, nor can by any Multiplication become equal to it, or exceed it.

But herein we differ; That he makes his Angle of Contact, such a Quantity as is Part of a Rectilinear Right-angle; and the Remainder (which is the Angle of a Semicercle) to be less than such Right-angle; and some of these to be less than others, (making the Angles of unequal Semicircles to be unequal Angles;) and the Angle of Contact no otherwise Heterogeneous to a Right-lined Angle, but only because very small.

But, I say, if the Angle of Contact be a Part; and such as leaves the Remainder less than the whole; then is both this and that, Homogeneous to that whole; and may be so Multiplyed as to exceed the whole, (as the lesser of two unequal quantities may always be) nor can any part of a Magnitude be so small as not to be capable of such Multiplication, and Heterogeneous, only because small : Whereas the Angle of Contact (whatever it be) is confessedly such as can by no Multiplication come to exceed a Rectilinear angle» [*Ibid.*, p. 99].

[71] C'est ce que Wallis [1693–1699, I, *Præfatio*] écrit dans sa préface : « Opuscula quædam contra *Thomam Hobbes* (Pseudo-geometram) olim scripta, non hic habentur; ne velle videar de homine jam demortuo superare. »

l'impression d'un compromis que d'un triomphe[72].

Les passages de Newton sur l'angle de contact

Si l'influence de la polémique avec Hobbes sur le retournement de Wallis ne me semble pas douteux, il m'a semblé intéressant d'explorer une autre voie. Pendant que la polémique entre Hobbes et Wallis fait rage, Newton accomplit sa formation mathématique et produit ses premiers travaux. Lorsque Wallis élabore la *Defense*, Newton arrive à maturité. Il se consacre pleinement à la rédaction des *Principia* dans la deuxième moitié de 1684 et jusqu'à la fin du printemps 1686[73]. Entretemps, il pour-

---

[72] Le texte de la *Defense* qui paraît en latin dans le deuxième volume des *Opera mathematica* à la fin du XVII[e] siècle n'est pas strictement identique à celui de l'édition de 1685. Pour qu'on puisse juger de ces différences, je me borne à donner ci-après ma traduction de la conclusion citée ci-avant (note 70) en soulignant les passages modifiés. La comparaison montre que Wallis [1693–1699, II, p. 656] a progressé dans la formulation de sa pensée et qu'il est devenu plus précis :

« On dira peut-être que Clavius et moi sommes maintenant d'accord sur ce au sujet de quoi il a été disputé jusqu'à présent. Clavius veut à toute force que l'angle de contact ait quelque grandeur, mais hétérogène à celle de l'angle rectiligne et incapable d'aucune proportion avec lui.

À cela je réponds : j'ai jusqu'à présent admis avec Clavius (et je l'ai toujours admis) que ce qu'il appelle angle de contact n'est rien d'autre que ce que moi j'appelle degré de courbure, laquelle courbure, bien qu'elle soit une qualité, est cependant une qualité telle qu'elle a sa propre quantité ou grandeur capable de mesure et de proportion. *Et [j'admets] que cette courbure est hétérogène à la grandeur de l'angle, c'est-à-dire une grandeur d'un autre genre (comme la droite est hétérogène au plan ou le rien à quelque chose)* et qu'elle est par conséquent incapable d'aucune proportion avec l'angle ni ne peut, multipliée autant qu'on veut, égaler ou surpasser un angle. Mais nous sommes en désaccord sur cela qu'il veut que l'angle de contact soit une quantité telle qu'elle soit une partie de l'angle droit rectiligne ; et que la partie restante (qui est l'angle du demi-cercle) soit moindre que tout le droit rectiligne ; et que les uns soient plus petits que les autres, c'est-à-dire que les angles de demi-cercles inégaux soient inégaux, et que l'angle de contact ne soit hétérogène à l'angle rectiligne qu'en ce qu'il en serait une partie très mince.

Au contraire, je nie que l'angle dit de contact soit une partie de l'angle rectiligne (de même que je nie que le point soit une partie de la ligne, ou la droite une partie du plan). Et certes s'il en était une partie et que la partie restante était moindre que le tout, alors tant cette partie que l'autre serait homogène au tout et pourrait être ainsi multipliée qu'elle surpasse le tout (comme cela est toujours possible pour la *plus petite de deux grandeurs, suivant la proposition X,1 d'Euclide*). Aucune partie d'une grandeur ne peut être si exiguë qu'elle ne puisse être multipliée de la sorte, pas plus qu'elle ne peut lui être hétérogène par le simple fait de sa petitesse. Il est pourtant admis par tous que l'angle dit de contact ne peut être ainsi multiplié qu'il égale ou surpasse le plus petit rectiligne. »

[73] Pour tout ce qui concerne la genèse des *Principia*, je m'appuie sur [Westfall 1980, chap. X].

suit son enseignement à Cambridge et a peut-être utilisé son manuscrit comme matériau de cours à partir de 1684. Les proches de Newton, Halley en particulier, voire d'autres membres de la *Royal Society*, qui commanditaient l'impression de l'ouvrage, ont pu avoir connaissance de certains fragments en 1686. Finalement, le manuscrit a été mis entre les mains de la *Royal Society* à partir du 19 mai 1686 (premier livre) pour être imprimé petit à petit vers la fin de 1686, surtout à partir de février 1687, et achevé en juillet de la même année.

C'est dans les *Principia mathematica* que Newton publie une solution du problème de l'angle de contact [Newton 1687, Lib. I, Sect. I, Scholium ad lemma XI]. Une fois celle-ci connue, la querelle s'éteindra presque complètement. Peut-on supposer que Wallis a pu lire cette solution avant la publication de 1687 ? En 1672, Wallis ne connaît pas Newton, comme l'atteste une lettre à Collins[74], mais par la suite, au fur et à mesure que Collins le met au courant des travaux de Newton, Wallis exprime à plusieurs reprises son souhait de voir imprimés ces travaux[75]. On sait qu'en 1686, il propose une solution à la question du mouvement d'un solide dans un milieu résistant inspirée de celle de Newton, mais il se fonde sur un extrait du *De motu* que lui a transmis Halley et non sur les *Principia.* On sait par ailleurs qu'en 1685, il a déjà une connaissance assez étendue des travaux mathématiques de Newton puisque, dans l'*Algebra*, il rapporte la théorie des séries infinies de Newton qu'il a puisée dans les deux lettres de Newton à Leibniz de 1676. Il n'y a là aucun indice que Wallis ait pu connaître l'opinion de Newton sur l'angle de contact avant la rédaction de la *Defense* et avant la publication des *Principia.*

Mais il subsiste aussi de Newton deux écrits sur l'angle de contact antérieurs à la publication des *Principia.* Si Wallis a pu avoir connaissance de la solution de Newton avant la publication des *Principia*, cela peut-il être à travers ces textes ? Examinons-les.

---

[74] Voir la lettre n° 318 de Wallis à Collins [Rigaud 1841, II, p. 529] : « I am very glad of the improvements of the microscope, both by Mr. Newton and Mr. Hooke. I have no acquaintance with the former, but to the latter you may present my services [...] ». Dans la suite de cette lettre, datée du 25 janvier 1671 (1672 sur le continent), Wallis exprime son désir de voir imprimées les pièces de Newton dont lui a parlé Collins. Sur cette lettre, voir [Westfall 1980, p. 222].

[75] Outre la lettre 318 sus-mentionnée, voir aussi les lettres 343, 345 et 357 de Wallis à Collins, resp. du 15 septembre 1676, 22 février 1676–1677 et 8 octobre 1677, [Rigaud 1841, II, p. 598–600, 604–606 et 608–609].

Un manuscrit de 1664 (?)

Le premier de ces textes fait partie d'un ensemble de notes manuscrites rassemblées par Newton sous le titre *Quæstiones quædam philosoph[i]æ*, « transcriptions plus ou moins directes » selon A.R. Hall des lectures de Newton durant la période 1661–1665 [Hall 1948, p. 242] ; le passage qui nous intéresse date probablement de 1664 selon Whiteside et est baptisé « *Of Quantity* ». Il s'agit donc d'un texte de jeunesse, très confidentiel, que Wallis n'a certainement pas pu connaître. Mais il mérite d'être cité pour ce qu'il révèle de l'appréciation par le jeune Newton du problème qui nous occupe :

« Comme des lignes finies ajoutées en nombre infini à des lignes finies forment une ligne infinie, de même les points ajoutés à des points infiniment sont équivalents à une ligne infinie. Toutes les surfaces entretiennent la même proportion à une ligne, bien qu'une surface puisse être plus grande qu'une autre (la même chose peut être dite des corps vis-à-vis des surfaces) ; cela tient à ce qu'une surface est infinie par rapport à une ligne ; de même que toutes les extensions infinies entretiennent la même proportion avec une extension finie, de même une extension infinie peut être plus grande qu'une autre. Ainsi un angle de contact peut en dépasser un autre, bien qu'ils soient tous égaux quand on les compare à un angle rectiligne qui est infiniment plus grand.

[...] L'angle de contact est par rapport à un autre angle comme un point vis-à-vis d'une ligne, car la courbure d'un cercle équivaut à quatre angles droits et cette courbure peut être conçue comme consistant en un nombre infini d'angles de contact, comme une ligne consiste en une infinité de points »[76].

[76] Voir Newton [*Math. Papers*, I, p. 89–90], *Annotations from Wallis*, § 1. *An early note on indivisibles, Of Quantity* : « As finite lines added in an infinite number to finite lines, make an infinite line : so points added twixt points infinitely, are equivalent to a finite line.

All superficies beare the same proportion to a line yet one superficies may bee greater y^n another (y$^{\rm e}$ same may be said of bodys in respect of surfaces) w$^{\rm ch}$ happens by reason y^t a surface is infinit in respect of a line, so though all infinite extensions beare y^e same proportion to a finite one yet one infinite extension may be greater y^n another soe one angle of contact may exceed another, yet they are all equal when compared to a rectilinear angle viz w$^{\rm ch}$ is infinitely greater.

[...] The angle of contact is to another angle as a point to a line, for y^e crookednes in one circle amounts to 4 right angles & y^t crookednesse may bee conceived to consist of an infinite number of angles of contact, as a line doth of infinite points ».

Les deux affirmations initiales que pose Newton sont l'un des paradoxes de la théorie des indivisibles : si l'on admet que les indivisibles sont des composants infiniment petits qui permettent, en étant associés en nombre infini, de former les objets géométriques, alors il faut aussi admettre :

a) qu'ils entretiennent tous le même rapport avec les objets dont ils sont les composants : les objets géométriques sont à leurs composants infinitésimaux comme l'infini au fini ;

b) que, comparés les uns aux autres, ces indivisibles sont susceptibles d'être plus ou moins grands les uns que les autres.

Le principe d'une hiérarchie entre les éléments indivisibles et les objets géométriques que ces éléments sont censés composer pouvaient sans doute être admis par tous les partisans de la théorie des indivisibles. Mais admettre, comme le fait ici Newton, que les indivisibles se comportent entre eux comme les objets géométriques eux-mêmes, c'est-à-dire qu'ils peuvent être rangés par catégories d'objets dont chacune est ordonnée, cela donne à ce principe un tout autre relief. C'est le pas que fait Newton lorsqu'il l'applique au cas de l'angle de contact et du rectiligne :

c) les angles de contact, objets géométriques infiniment petits comparativement à l'angle rectiligne, entretiennent tous la même proportion avec ces derniers ;

d) comparés entre eux, les angles de contact peuvent être considérés comme plus ou moins grands.

S'il s'agit bien de notes de lecture, on est bien embarrassé pour dire ce qu'a lu Newton, mais il est difficile de supposer comme le fait Whiteside que Newton s'appuie principalement sur la *Disquisitio* de Wallis[77] : Newton défend un point de vue qui s'apparente plus à celui de Hobbes. L'affirmation selon laquelle « l'angle de contact est par rapport à un autre angle comme un point vis-à-vis d'une ligne » est presqu'une citation

[77] Voir Whiteside : « In this note, Newton names no source for the thoughts he has written up, but the statements on indivisibles and the reference to the angle of contact argue strongly that Newton was already familiar with Wallis' *Operarum Mathematicarum pars Altera* [...] which contains the tract *De Angulo Contactus & Semicirculi Disquisitio Geometrica* ». Whiteside admet tout de même que Newton a pu consulter un ouvrage de Hobbes : « It is, however, just possible that Newton had first read Thomas Hobbes' belligerent and myopic commentary, *Examinatio & Emendatio Mathematicæ Hodiernæ* [...]. In attacking Wallis ideas, often on wholly inadequate grounds, Hobbes *Dialogus Quintus* succeeds in conveying a surface-impression of Wallis' thought and it would have been natural for Newton, once his interest was aroused, to pass on to the original » [Newton, *Math. Papers*, I, p. 89, n. 1].

textuelle tirée du début du paragraphe 16 du *De corpore* de Hobbes. Mais quelles que soient ses sources, ce court fragment montre avant tout la maîtrise que Newton a, dès 1664, d'un problème sur lequel ni Wallis, ni Hobbes ne sont encore parvenus à trancher.

Un passage de la Méthode des fluxions

Un deuxième passage intéressant se trouve dans le manuscrit des *Methods of series and fluxions* datant de l'hiver 1670–1671. Les infinitésimaux ne font plus partie de l'appareil théorique de la méthode des fluxions et Newton adopte un point de vue plus formel qu'en 1664 :

« Il y a aussi des angles de contact infiniment plus grands que les angles de contact de la cycloïde et d'autres en revanche infiniment plus grands que ceux-ci, et ainsi à l'infini, et pourtant les plus grands [angles de contact] sont infiniment plus petits que des angles rectilignes. Ainsi, $x^2 = ay$, $x^3 = by^2$, $x^4 = cy^3$, $x^5 = dy^4, \ldots$ dénote une série de courbes, chacune formant avec sa base un angle de contact infiniment plus grand que celui que la précédente peut former avec la même base. En outre, l'angle de contact formé par la première est de la même classe que ceux des circulaires et celle formée par la seconde de la même classe que ceux des cycloïdes. Et bien que les angles de telle courbe soient toujours infiniment plus grands que ceux des courbes de la suivante, ils ne peuvent néanmoins jamais atteindre la grandeur de celui d'un rectiligne.

De la même façon, $x = y$, $x^2 = ay$, $x^3 = b^2y$, $x^4 = c^3y, \ldots$ désigne une série de lignes dont la suivante forme avec leur base des angles au sommet toujours plus petits. En outre, entre les angles de contact de deux de ces classes, d'autres classes d'angles infiniment plus grands les uns que les autres peuvent indéfiniment être intercalées.

Il est cependant admis qu'une classe est infiniment plus grande qu'une autre lorsqu'aucune courbe d'une classe, si grande soit-elle ne peut tomber entre une droite tangente et toute courbe de la deuxième classe, si petite soit-elle, au voisinage de l'angle de contact. En d'autres termes, un angle de contact de la première contient nécessairement un angle de contact de la seconde classe comme partie de son tout. Ainsi, l'angle de contact que forme la courbe $x^4 = cy^3$ avec sa base contient nécessairement l'angle de contact correspondant de la courbe $x^3 = by^2$. Bien entendu, les angles qui sont capables d'être plus grands qu'un autre sont de la même classe, comme cela advient dans le cas des angles de la cycloïde et de ladite courbe $x^3 = by^2$.

De ces considérations, il est évident que les courbes peuvent être infiniment plus droites ou infiniment plus courbes à certains points que tout cercle et cependant pas pour autant perdre leur forme curviligne. Mais cela dit en passant »[78].

Newton vient de résoudre son Problème V, « Trouver la courbure en tout point d'une courbe » ; il a donné, entre autres exemples pour illustrer sa méthode, le fameux problème de la cycloïde sur lequel Wallis s'était penché une douzaine d'années auparavant pour répondre au défi de Pascal. Et c'est le dernier d'une série de huit corollaires à cet exemple qu'il consacre à l'angle de contact. La question de l'angle de contact est clairement reléguée à l'arrière-plan des préoccupations de Newton. Le corollaire 8 est là simplement pour montrer que son auteur possède la solution d'un problème resté irrésolu un siècle durant. Ce sera encore le cas du passage sur l'angle de contact dans les *Principia*.

Il n'en reste pas moins que dans ces quelques lignes, Newton a levé un obstacle majeur à une solution de la question de l'angle de contact.

---

[78] *Methodus fluxionum, Prob. 5, Exempl. 4, Coroll. 8* [Newton, *Math. Papers*, III, p. 160–161] : « Sunt etiam anguli contactus Trochoidalibus infinite majores et illis deinceps alii infinite majores et sic in infinitum, et tamen maximi sunt infinite minores rectilineis. Sic $xx = ay$. $x^3 = byy$. $x^4 = cy^3$, $x^5 = dy^4$ &c denotant seriem curvarum quarum quælibet posterior cum Basi constituit angulum contactus infinite majorem quam prior cum eadem Basi potest constituere. Estque angulus contactus quem prima $xx = ay$ constituit, ejusdem generis cum circularibus, et ille quem secunda $x^3 = byy$ constituit, ejusdem generis cum Trochoidalibus. Et quamvis subsequentium anguli angulos præcedentium perpetim infinite superant, tamen anguli rectilinei magnitudinem nunquam possunt assequi.

Ad eundem modum $x = y$. $xx = ay$. $x^3 = bby$. $x^4 = c^3y$ &c denotant seriem linearum quarum subsequentium anguli ad vertices cum basibus confecti sunt anguli præcedentium perpetim infinite minores. Quinetiam inter angulos contactus duorum quorumlibet ex his generibus possunt alia angulorum se infinite superantium intercedentia genera in infinitum excogitari.

Angulorum vero contactus unum genus esse infinite majus alio constat cum unius generis curva utcunque magna inter rectam tangentem et alterius generis curvam quantumvis parvam juxta punctum contactus non potest interjacere : sive cujus angulus contactus necessario continet alterius angulum contactus ut partem totius. Sic curv[æ] $x^4 = cy^3$ angulus contactus quem cum basi constituit, necessario continet angulum contactus curvæ $x^3 = byy$. Qui vero se mutuo superare possunt anguli sunt ejusdem generis, uti de præfatis angulis Trochoidis et hujus curvæ $x^3 = byy$ contigit.

Ex his patet curvas in quibusdam punctis posse infinite rectiores esse vel infinite curviores quolibet circulo et tamen formam curvarum non ideo amittere. Sed hæc in transitu ».

L'équation par laquelle il définit à présent les différentes classes d'angles de contact exprime aussi l'hétérogénéité de ces diverses classes : bien qu'un angle formé avec une courbe de degré n contienne nécessairement tout angle de contact formé avec une courbe de degré $n-1$, ces deux angles sont incomparables — le premier est infiniment plus grand que le second. C'est le degré de la courbe qui détermine l'homogénéité ou l'hétérogénéité des angles de contact.

Conclusion

Il faudrait approfondir l'enquête sur les relations entre Wallis et Newton et sur la diffusion progressive des idées du second avant la publication des *Principia* pour apprendre si sa solution a pu jouer un rôle dans la genèse de la *Defense* de Wallis. Mais je dois admettre, arrivé au terme de ce parcours, que la question des influences me semble finalement bien accessoire. Les principaux enseignements de mon étude sont ailleurs. Entre 1656 et 1685, le regard des mathématiciens change. Ce changement de perspective permet la clôture de la querelle de l'angle de contact et il accompagne la naissance du calcul infinitésimal.

Jusque dans les années 1665, l'obstacle auquel se heurtaient les mathématiciens qui abordent la question de l'angle de contact a la forme d'une double antinomie. D'une part, en attribuant une grandeur à l'angle de contact, on était conduit à le considérer comme hétérogène à l'angle rectiligne (pour éviter l'obstacle de la contradiction entre III,16 et X,1) ; d'autre part, en renonçant à le compter parmi les grandeurs, on ne pouvait rendre compte de son homogénéité avec l'angle rectiligne, homogénéité que la figure exhibe : l'angle de contact apparaît comme le complémentaire à un droit de l'angle du demi-cercle (notions communes). Résumons cette double antinomie :

« c est une grandeur » | « c et a sont hétérogènes »
[antinomie de Clavius] ;

« c n'est pas une grandeur » | « c et a sont homogènes »
[antinomie de Peletier].

La source de ces deux antinomies est la représentation traditionnelle de l'angle comme grandeur *figurée* — espace rassemblé sous deux lignes —, conception qui laisse penser que le contact est, au même titre que le rectiligne, une grandeur sur laquelle on opère avec les notions communes. Est aussi en cause la conception classique (euclidienne) de l'homogénéité. Chez Euclide, le critère de l'homogénéité est fixé d'une part par la dimension — c et a étant deux objets plans, ils ne pouvaient qu'être homogènes — et d'autre part par l'axiome d'Archimède. Cette conception conduisait les uns à reconnaître dans l'angle de contact un « vrai » angle (une grandeur) et les autres à le ranger sous le même genre que le rectiligne. Pour dépasser l'une et l'autre antinomie, c'est-à-dire poser la conjonction

$$\text{« } c \text{ est une grandeur »} \wedge \text{« } c \text{ et } a \text{ sont hétérogènes »},$$

il fallait rompre avec cette représentation figurée de l'angle et renoncer à cette conception de l'homogénéité.

Hobbes est le premier à tenter cette conjonction, mais il ne dispose pas du « moyen terme » qui permette de tenir ensemble ces deux thèses. Il renouvelle complètement les définitions des objets géométriques, mais son approche synthétique le conduit encore à privilégier une représentation figurée de ces objets. Cela lui interdit d'aller au-delà de la simple reconnaissance de la spécificité de l'angle de contact comme grandeur et, comme le remarque Wallis, de lui assigner véritablement une mesure. Les fautes de raisonnement qu'il commet par ailleurs enlèvent à sa réflexion tout crédit.

Tant que dure la querelle avec Hobbes, Wallis n'a pas de difficulté à tourner en dérision une position qui lui apparaît inconsistante. Mais celle du professeur d'Oxford n'est pas très solide non plus. S'il introduit dès 1656 — timidement — un point de vue analytique en assignant une mesure à l'angle de contact, il continue lui aussi à penser l'angle à travers la définition euclidienne réinterprétée par Peletier. Comme le Manceau, il caractérise le contact comme « rien » et refuse l'idée qu'il soit hétérogène au rectiligne. En 1685, il développe un point de vue plus analytique qui l'amène à une position proche de celle de Hobbes. Mais alors que cette position implique une rupture avec ce qu'il a soutenu tout au long de la controverse, il s'efforce de masquer cette rupture et sa position demeure ambiguë[79].

[79] Voir ci-dessus. Dans la *Defense* comme dans la *Disquisitio*, Wallis caractérise le

Il revient donc à Newton d'avoir levé les ambiguïtés sur la nature de l'angle de contact, et ce alors même que la controverse entre Hobbes et Wallis fait rage. Vers 1665, il n'est pas le premier à donner à l'angle de contact le statut d'une grandeur hétérogène à l'angle rectiligne — Hobbes l'avait fait avant lui. Mais le premier il sait, par le biais d'une analogie entre l'angle de contact et les indivisibles, rompre avec la représentation traditionnelle de l'angle. Il sait surtout relier ces affirmations avec les connaissances mathématiques de son temps (théorie des indivisibles) et leur donner ainsi une crédibilité qui, quand elles étaient exprimées par Hobbes, leur faisaient défaut. Ainsi, Newton a dès 1665 la maîtrise du problème de l'angle de contact : il a levé les résistances qui empêchaient Hobbes, Wallis et tous les mathématiciens avant lui d'en avoir une claire appréciation. Dans le texte de la *Méthode des fluxions*, il accomplit un pas de plus, en rompant avec la conception classique de l'homogénéité. Mais dès avant de donner à l'angle de contact la représentation analytique qui lui convenait, alors qu'il ne dispose pas encore du langage mathématique qui en exprime mieux les propriétés, il a renouvelé la représentation de cet objet. N'est-ce pas là l'acte essentiel d'une « révolution » ?

BIBLIOGRAPHIE

AYNSCOM (François Xavier)

[1656] *Francisci Xavierii Aynscom,* [...] *Expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli R.R. Gregorii a S. Vincentio* [...] *cui præmittitur liber de natura et affectionibus rationum ac proportionum geometricarum*, Anvers : J. Meursium, 1656.

BIRD (Alexander)

[1996] Squaring the Circle : Hobbes on Philosophy of Geometry, *Journal of the History of Ideas*, 57 (1996), p. 19–38.

BORELLI (Alfonso)

[1658] *Euclides restitutus, sive prisca geometriæ Elementa, Brevius & facilius contexta, in quibus præcipue proportionum theoriæ, nova, firmiorique Methodo promuntur a Io : Alphonso Borellio in Messanensi pridem, nunc vero in Pisana Academia Matheseos Professore*, Pise : F. Honophrius, 1658.

BREIDERT (Wolfgang)

[1979] Les mathématiques et la méthode mathématique chez Hobbes, *Revue internationale de philosophie*, 33 (1979), p. 415–431.

contact comme un « rien » et lui attribue une mesure. Ce double langage caractérise par la suite la position de Wallis sur les infinitésimaux, comme le montre une lettre à Leibniz du 22 juillet 1698. Sur ce point, *cf.* [Jesseph 1998, p. 23–24].

Clavius (Christophore)

[1574] *Euclidis Elementorum libri XV. Accessit XVI solidorum Regularium comparatione. Omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati*, Rome : V. Accoltum, 1574.

[1589] *Euclidis Elementorum libri XV, accessit XVI de solidorum regularium cujuslibet intra quodlibet comparatione, omnes perspicuis demonstrationibus accuratisque scholiis illustrati, nunc iterum editi, ac multarum rerum accessione locupletati*, Rome : apud Sanctium et Socios, 1589.

Euclide

[1990-2001] *Les Éléments – Introduction générale par M. Caveing – Traduction et commentaires par B. Vitrac*, Paris : PUF, 1990–2001 (4 vol.).

Hall (A. Rupert)

[1948] Sir Isaac Newton's Notebook, 1661–1665, *Cambridge Historical Journal*, 9-2 (1948), p. 239–250.

Hobbes (Thomas)

[*Works*] *The English works of T. Hobbes of Malmesbury, now first collected and edited by Sir William Molesworth, bart.*, Londres : Longmans, Browns, Green and Longmans, 1839–1845 (11 vol.).

[*Opera*] *Thomæ Hobbes Malmesburiensis Opera philosophica quæ latine scripsit omnia in unum corpus nunc primum collecta studio et labore Gulielmi Molesworth*, Londres : J. Bohn, 1839–1845 (7 vol.).

[1655/2000] *Elementorum philosophiæ sectio prima : de Corpore* [...], Londres : A. Crooke, 1655 ; éd. citée : *Elementa Philosophiæ I : De corpore*, éd. Karl Schumann, Paris : Vrin, 2000.

[1656] *Elements of Philosophy, the first section, concerning body. Written in Latine* [...] *and now translated into English. To which are added Six Lessons to the Savilian professors of the Mathematicks of the Institution of Sir Henry Savile, in the University of Oxford*, Londres : R. & W. Leybourn, for A. Crooke, 1656 ; [Hobbes, *Works*, VII, p. 181–356].

[1657] *ΣΤΙΓΜΑΙ Αγεωμετρίας, Αγποικίας, Αντίπολιτείας, Αματηθείας, or Marks of the absurd geometry, rural language, scottish church politics and barbarisms of John Wallis, Professor of geometry and doctor of divinity*, Londres, 1657.

[1660] *Examinatio et emendatio mathematicæ hodiernæ, qualis explicatur in libris Walisii,* [...] *distributa in sex dialogos*, Londres : A. Crooke, 1660 ; [Hobbes, *Opera*, IV, p. 1–232].

[1666] *De Principiis et Ratiocinatione Geometrarum ubi ostenditur incertitudinem falsitatemque non minorem inesse scripti eorum, quam scripti physicorum et ethicorum. Contra fastum professorum Geometriæ, s.l.*, 1666 ; [Hobbes, *Opera*, IV, p. 385–465].

[1671] *Rosetum geometricum, sive Propositiones aliquot frustra antehac tentatæ, cum censura brevi doctrinæ Wallisianæ de motu* [...], Londres : G. Crooke, 1671.

[1672] *Lux mathematica ; excussa collisionibus J. Walisii Theologiæ doctoris geometriæ in celeberrima academia oxoniensi professoris publici et T. Hobbesii malmesburiensis. Multis et fulgentibus aucta radiis authore R.R.*, Londres : G. Crook, 1672.

[1674] *Principia et problemata aliquot geometrica antehac desperata nunc breviter explicata et demonstrata*, Londres : G. Crook, 1674 ; [Hobbes, *Opera*, V, p. 151–214].

[1973] *Critique de* De mundo *de Thomas White*, H.W. Jones (éd.), Paris : J. Vrin, 1973.

Huygens (Christiaan)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, Société hollandaise des sciences (éd.), La Haye : Martinus Hijhoff, 1888–1950 (22 vol.).

Jesseph (Douglas M.)

[1993] Hobbes on Method of Modern Mathematics, *Revue d'histoire des sciences*, 46 (1993), p. 153–193.

[1998] Leibniz on the Foundations of the Calculus : The Question of the Reality of Infinitesimal Magnitudes, *Perspectives on Science*, 6 (1996), p. 6–40.

[1999] *Squaring the Circle — The War between Hobbes and Wallis*, Chicago : University of Chicago Press, 1999.

Léotaud (Vincent)

[1663] *Cyclomathia, seu Multiplex circuli contemplatio, tribus libris comprehensa* [...], Lyon : B. Coral, 1663.

Loget (François)

[2000] *La querelle de l'angle de contact (1557–1685) – Constitution et autonomie de la communauté mathématique entre Renaissance et Âge baroque*, thèse de doctorat, Paris : EHESS, 2000.

Maierù (Luigi)

[1984] La polemica fra J. Peletier e C. Clavio circa l'angolo di contatto, *Atti del Convegno Internazionale "Storia degli studi sui fondamenti della Matematica e connessi sviluppi interdisciplinari"*, Pisa-Tirrenia, 26–31 marzo 1984, Luciani, vol. I, p. 226–256.

[1988] John Wallis : lettura della polemica fra Peletier e Clavio circa l'angolo di contatto, dans M. Galluzzi (éd.), *Atti del Convegno 'Giornate di storia della matematica'*, Cetraro, 8–12 settembre 1988, p. 318–365.

[1990] '... in Christophorum Clavium *De Contactu Linearum Apologia*' — Considerazioni attorno alla polemica fra Peletier e Clavio circa l'angolo di contatto (1579–1582), *Archive for History of Exact Sciences*, 41 (1990) p. 115–137.

[1992] Filologia, epistemologia e contenuti matematici in Henry de Monantheuil circa l'angolo di contatto, dans Conti (L.), éd., *Momenti di cultura matematica fra '500 e '600. La matematizzazione dell'universo*, Assisi : Porziuncola, 1992, p. 105–130.

Malet (Antoni)

[1997] Barrow, Wallis and the Remaking of 17th Century Indivisibles, *Centaurus*, 12 (1997), p. 11–22.

Newton (Isaac)

[*Math. Papers*] *The Mathematical Papers, of Isaac Newton* [...] *Edited by D.T. Whiteside* [...], Londres : Cambridge University Press, 1967–1981 (8 vol.).

[1687] *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, Londres : J. Streater, 1687.

Oldenburg (Henry)

[*Correspondence*] *The Correspondence of Henry Oldenburg — Edited and Translated by A. Rupert Hall & Marie Boas Hall*, Madison and Milwaukee : University of Wisconsin Press, 1965–1986.

Peletier (Jacques)

[1557] *Jacobi Peletarii Cenomani In Euclidis Elementa Geometrica Demonstrationum Libri sex. Ad Carolum Lotharingum, Principem, Cardinalemque amplissimum*, Lyon : J. Tornèse et G. Gaza, 1557.

[1563] *Jacobi Peletarii Cenomani Commentarii tres : I. de dimensione circuli ; II. de contactu linearum et de duabus lineis in eodem plano neque parallelis neque concurrentibus ; III. de constitutione horoscopi*, Bâle : J. Oporinum, 1563.

[1579] *Jacobi Peletarii Cenomani In Christophorum Clavium, de Contactu linearum apologia. Ejusdem Demonstrationes tres : I. de Anguli rectilinei et curvilinei aequalitate ; II. de Lineae rectae in treis parteis continue proportionales sectione ; III. de Areae trianguli ex numeris aestimatione*, Paris : H. de Marnef et G. Cavellat, 1579.

[1581] *Jacobi Peletarii medici et mathematici, De Contactu Linearum. Commentarius*, Paris : R. Coulombel, 1581.

Probst (Siegmund)

[1993] Infinity and Creation : The Origin of the Controversy between T. Hobbes and the Savilian Professors Seth Ward and John Wallis, *British Journal for the History of Science*, 26 (1993), p. 271–279.

Rigaud (Stephen Peter)

[1841] *Miscellaneous Works and Correspondence of the Rev. James Bradley*, Oxford : Clarendon Press, 1841 (2 vol.).

Sacksteder (William)

[1980] Hobbes : The Art of the Geometricians, *Journal of the History of Philosophy*, 16 (1980), p. 33–45.

[1981] Hobbes : Geometrical objects, *Philosophy of Science*, 48 (1981), p. 573–590.

Savile (Henry)

[1621] *Prælectiones tresdecim in principium Elementorum Euclidis Oxoniæ habitæ*, Oxford : J. Lichfield, 1621.

Tacquet (André)

[1654] *Elementa geometriæ planæ ac solidæ : Quibus accedunt selecta ex Archimedæ theoremata*, Anvers : J. Meursium, 1654.

Wallis (John)

[1655] *J.W.* [...] *Elenchus geometriæ Hobbianæ ; sive, geometricorum quæ in ipsius elementis philosophiæ, a Thoma Hobbes* [...] *proferuntur refutatio*, Oxford, 1655.

[1656a] *Due correction for Mr Hobbes. Or schoole discipline, for not saying his lessons right. In answer to his Six lessons, directed to the professors of mathematicks. By the professor of Geometry*, Oxford : L. Lichfield for T. Robinson, 1656.

[1656b] *J.W.* [...] *Operum mathematicorum pars altera : qua continentur De angulo contactus & semicirculi disquisitio geometrica. De sectionibus conicis tractatus. Arithmetica infinitorum* [...] *Ecclipseos solaris observatio*, Oxford : L. Lichfield, 1656.

[1657] *Hobbiani Puncti Dispunctio, or, the undoing of Mr Hobs's points, in answer to M. Hobs's Stigmai, id est Stigmata Hobbii*, Oxford, 1656.

[1662] *Hobbius Heauton-timorumenos. Or a consideration of Mr. Hobbes his dialogues. In an epistolary discourse adressed to the Hon. R. Boyle*, Oxford, 1662.

[1685] *A Treatise of Algebra* [...] *with some Additional Treatises. Of the Angle of Contact, with other things appertaining to the composition of Motion, with the results thereof*, Londres : J. Playford, R. Davis, 1685.

[1693–1699] *Opera mathematica*, Oxford : The Sheldonian Theater, 1693–1699 (3 vol.).

Ward (Seth)

[1654] *Vindiciæ Academiarum. Containing some briefe animadversions upon Mr Websters book, stiled, The Examination of Academies. Together with an appendix concerning what M. Hobbs and M. Dell have published on this argument*, Oxford : L. Lichfield for T. Robinson, 1654.

[1656] *In T. Hobbii philosophiam exercitatio epistolica* [...] *Cui subjicitur appendicula ad calumnias ab eodem Hobbio* [...] *in authorem congestas responsoria*, Oxford, 1656.

Westfall (Richard S.)

[1980] *Never at Rest – A Biography of Isaac Newton*, Cambridge, New York : Cambridge University Press, 1980.

White (Thomas)

[1642] *De mundo dialogi tres, quibus materia, forma, caussae, et tandem definitio, rationibus pure e natura depromptis aperiuntur, concluduntur*, Paris : Moreau, 1642.