

LAZARE CARNOT ET LA GÉNÉRALITÉ EN GÉOMÉTRIE. VARIATIONS SUR LE THÉORÈME DIT DE MENELAUS

Karine CHEMLA (*)

RÉSUMÉ. — Comment introduire de la généralité dans un monde géométrique où une foule de vérités particulières, établies par des méthodes *ad hoc*, restent sans liaison entre elles et forment donc un ensemble sans organisation ? En suivant les divers traitements d'un unique théorème, appelé aujourd'hui le *théorème de Menelaus*, le présent article vise à examiner comment les travaux géométriques de Lazare Carnot ont indiqué, aux géomètres comme Poncelet ou Chasles qui posaient cette question, diverses pistes pour y répondre.

ABSTRACT. — LAZARE CARNOT AND GENERALITY IN GEOMETRY. VARIATIONS ABOUT THE SO CALLED MENELAUS THEOREM. — How can generality be introduced in a geometrical world where a host of particular truths, established with *ad hoc* methods, remain disconnected from each other and, hence, form a set without organisation ? Geometers like Poncelet and Chasles asked this question. By examining the various treatments given to a single theorem, called today *Menelaus theorem*, this paper aims at examining how Lazare Carnot's geometrical works offered various directions of answer.

Les écrits de géomètres du début du XIX^e siècle tels que Jean-Victor Poncelet et Michel Chasles sont émaillés de remarques comparant les mérites respectifs des méthodes analytiques et géométriques pour résoudre des problèmes de géométrie. Ces remarques renvoient à une visée commune de leurs travaux mathématiques ou historiques : comprendre ce qui

(*) Texte reçu le 10 juillet 1996, révisé le 10 août 1998.

Karine CHEMLA, REHSEIS (UMR 7596), CNRS et Université Paris 7 Denis Diderot, 37 rue Jacob, 75006 Paris (France). Courrier électronique : chemla@paris7.jussieu.fr.

Ce texte devait initialement paraître dans un recueil d'articles, *La naissance du projectif* (C.C. Gillispie [1994] y renvoie sous cette référence, dans sa préface à la réédition de la biographie classique de Carnot [Reinhard 1951–1952, p. III]). Cependant, comme ce recueil ne put finalement voir le jour, son éditeur a accepté que je le soumette à la *Revue d'histoire des mathématiques*. Je tiens à remercier C. Gilain, ainsi que les deux reenseurs anonymes, pour avoir contribué, par leurs remarques, à l'améliorer notablement.

constitue la puissance de l'algèbre et déterminer les modifications à apporter à la géométrie pour permettre à celle-ci de se hisser à la hauteur de sa rivale¹. Or, parmi les propriétés qui semblent jusqu'alors l'apanage de l'algèbre et qui conditionnent son efficacité, sa capacité à la généralité apparaît comme l'une des plus importantes; peut-être même la plus importante, si l'on en juge par la fréquence avec laquelle ce thème revient dans *L'Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* que Chasles publie en 1837. En conséquence, se pose à ces mathématiciens la question de savoir comment introduire du général dans une géométrie qui semblait peu auparavant vouée à ne considérer que du particulier. Plusieurs pistes furent explorées, dont nous voudrions montrer ici, en suivant plus particulièrement divers traitements du théorème dit de Menelaus, comment certaines trouvèrent leur origine dans les travaux que Lazare Carnot consacra à la géométrie entre 1800 et 1806 [Carnot 1800, 1801, 1803, 1806]².

¹ [Poncelet 1822, p. XIX–XX, XXVI–XXVII]; [Chasles 1837, *passim*, par exemple p. 2]. [Belhoste 1998, p. 17–23] examine le traitement que les premiers travaux de Poncelet réservent, dans la tradition de Monge, à cette valeur qu'est la généralité.

² Dans un premier article [Chemla 1990], nous avons mis en évidence le processus d'émergence de la théorie des transversales dont ces travaux témoignent. Nous reprenons ici les mêmes textes sous un angle différent. Afin de fournir un socle à notre discussion, sinon probablement trop abstraite, nous rappellerons certains aspects fondamentaux de la géométrie de Carnot déjà exposés dans le précédent article. Si nous nous restreignons à l'œuvre de Carnot pour proposer une réflexion sur la question de la généralité en géométrie, laquelle s'inspire de la lecture qu'en ont donnée des mathématiciens comme Poncelet et Chasles, cela ne signifie nullement que nous opposerions sur ce point cet auteur à ses contemporains. Poncelet comme Chasles reconnaissent également chez Monge, par exemple, des idées qui trouveront leurs prolongements dans d'autres procédés introduisant de la généralité en géométrie. Les travaux de Carnot nous ont cependant paru ne pas avoir reçu l'attention que leur influence manifeste sur les contemporains appelait, alors même que des géomètres appelés à fonder la géométrie projective y percurent les débuts de développements importants sur cette question, cruciale pour eux, de la généralité. C'est la raison pour laquelle nous nous concentrerons ici sur leur examen, nous réservant de revenir dans des publications ultérieures sur la question de la généralité en géométrie. Pour ce qui est de la biographie de Carnot ou de ses contributions à de multiples disciplines, on peut se reporter aux travaux de Gillispie [1971, 1979], ainsi qu'aux ouvrages de J.-P. Charnay [1984–5, 1990]. Outre la biographie de Reinhard [1951–1952], réimprimée récemment, le lecteur peut désormais consulter [Dhombres Jean et Nicole 1997].

1. LE PORTRAIT DE L'ANALYSE DANS SA "RIVALITÉ" AVEC LA GÉOMÉTRIE

Tout au long du XVIII^e siècle, les recherches en géométrie sont dominées par l'application à cette discipline des techniques de l'algèbre ou du calcul infinitésimal. Cependant l'expression de «géométrie analytique», introduite en 1797 par Lacroix pour désigner la branche des mathématiques qui se constitue en conséquence de ces travaux³, ne renvoie pas seulement au fait d'y utiliser pour principal outil les transformations algébriques ou analytiques. Elle fait surtout écho à une manière «analytique» de traiter les domaines mathématiques, en un sens devenu classique à la fin du siècle. Lacroix définit ainsi cette manière de faire, dont les opérations algébriques et analytiques ont permis la mise en œuvre :

«En écartant avec soin toutes les constructions géométriques, j'ai voulu faire sentir au lecteur qu'il existait une manière d'envisager la géométrie, qu'on pourrait appeler Géométrie analytique, et qui consisterait à déduire les propriétés de l'étendue du plus petit nombre de principes, par des méthodes purement analytiques, comme Lagrange l'a fait dans sa mécanique à l'égard des principes de l'équilibre et du mouvement... » [Lacroix 1797–98, t. 1, p. xxv]⁴.

On le voit, les méthodes analytiques ne sont plus seulement données pour efficaces dans la résolution de problèmes donnés, si généraux fussent-ils. Elles sont mises au service d'une organisation architectonique du savoir qui oppose des principes aux vérités qu'ils contiennent et que les transformations révèlent. Ainsi la géométrie ne sera plus constituée d'une «foule de vérités particulières»⁵, paraissant sans lien les unes avec les autres. L'outil analytique les articule et en permet une présentation raisonnée⁶. Lagrange reprend à son compte l'énoncé de ce programme :

«dans l'Analyse, la perfection consiste à n'employer que le moindre

³ [Taton 1964] décrit le développement de cette discipline.

⁴ L'œuvre scientifique d'Euler, par exemple, jalonne le XVIII^e siècle de semblables traitements de nombreux domaines des mathématiques.

⁵ L'expression est de Poncelet, voir ci-dessous et voir également [Chasles 1837, p. 253]. On trouve encore un écho de l'état d'inconfort que ressentent les mathématiciens de cette époque face à cette augmentation désordonnée de connaissances dans [Gergonne 1827].

⁶ Ce programme rencontre les idées des enseignements révolutionnaires qui mettent à profit les présentations analytiques pour amener tout un chacun, une fois quelques

nombre possible de principes, et à faire sortir de ces principes toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'Analyse» [Lagrange 1798–99, p. 342]⁷.

Alors que s'affirme et se généralise ce mode de traitement de la géométrie, Monge, par ailleurs, rend public, à l'occasion de ses cours à l'École Normale de l'an III, un corps de doctrine qui fournit un cadre théorique commun à l'ensemble des opérations graphiques utilisées à l'époque dans nombre de domaines techniques⁸. C'est ainsi que se constitue la *Géométrie descriptive*, dont on sait à quel point elle inspirera les géomètres postérieurs, parmi lesquels Poncelet et Chasles, dans leurs efforts pour renouveler la «géométrie pure»⁹. Nous retiendrons ici qu'au sein même de cette œuvre qui marque la reprise des travaux purement géométriques, figure le thème de la comparaison entre méthodes analytiques et géométriques¹⁰. Ainsi, dès les premières pages, après avoir développé une comparaison entre la résolution de problèmes selon les deux méthodes, Monge conclut par l'affirmation, souvent citée depuis lors :

«Ce n'est pas sans objet que nous comparons ici la géométrie descriptive à l'algèbre ; ces deux sciences ont les rapports les plus intimes. Il n'y a aucune construction de géométrie descriptive qui ne puisse être traduite en analyse ; et lorsque les questions ne comportent pas plus de trois inconnues, chaque opération analytique peut être regardée comme l'écriture d'un spectacle en géométrie.

Il seroit à désirer que les deux sciences fussent cultivées ensemble : la géométrie descriptive porteroit dans les opérations analytiques les plus compliquées l'évidence qui est son caractère, et, à son tour, l'analyse

principes et une méthode admis, au savoir. Voir en particulier les cours à l'École normale de l'an III in [Dhombres 1992], où le lecteur trouvera matière à situer ces approches analytiques dans leur contexte.

⁷ Ce texte présente l'ensemble de la trigonométrie sphérique selon ces préceptes, reproduisant pour ce domaine l'approche adoptée par Lagrange en mécanique, comme Lacroix nous le rappelle ci-dessus ; on peut à ce sujet consulter [Chemla, Pahaut, 1988].

⁸ On peut sur ce point consulter le travail de J. Sakarovitch [1989], récemment publié [Sakarovitch 1998]. L'ouvrage de R. Taton [1951a] donne une vue d'ensemble sur l'œuvre scientifique de Monge.

⁹ On trouve dans [Poncelet 1822] et [Chasles 1837] de nombreuses références à ce fait.

¹⁰ Nous renvoyons à R. Taton [1951, surtout p. 85], à [Sakarovitch 1989, p. 173–5], repris dans [Sakarovitch 1998, p. 214–215, 259–261], et à [Belhoste, Taton 1992, p. 283, 294–301].

porteroit dans la géométrie la généralité qui lui est propre» [Monge 1799, p. 16]¹¹.

C'est donc un enrichissement mutuel des deux méthodes que Monge attend de leur confrontation, appelant de ce fait au développement de la géométrie. L'intervention de Carnot influe dans le même sens, mais elle procède d'une évaluation critique de l'analyse qui amènera son auteur à l'élaboration d'un dispositif, sur lequel nous reviendrons ci-dessous. De fait, Carnot s'appuie sur une conception originale de l'opposition entre analyse et synthèse¹². Selon lui, elles se distinguent l'une de l'autre par le fait que, dans la synthèse, «*on ne peut jamais raisonner que sur des objets réels et effectifs*», tandis que dans l'analyse,

«on admet des objets qui n'existent pas ; on les représente par des hiéroglyphes aussi bien que ce qui est effectif. On mélange les êtres réels avec les êtres de raison ; puis par des transformations méthodiques, on parvient à éliminer ou chasser ces derniers du calcul : alors ce qu'il y avoit d'inintelligible dans les formules disparaît ; il reste ce qu'une synthèse subtile auroit sans doute pu faire découvrir. Mais ce résultat, on l'a souvent obtenu par une voie plus courte, plus facile, et presque par pur mécanisme, lorsqu'il auroit fallu des efforts prodigieux pour y parvenir autrement. Tel est l'avantage de l'analyse, et par conséquent celui des modernes sur les anciens»¹³ [Carnot 1801, p. 143–4].

Si les bénéfices de l'analyse sont manifestes, ils nécessitent de recourir à des «*êtres de raison*», telles les quantités positives et négatives,

¹¹ Monge reprend ce thème, voir par exemple [Monge 1799, p. 62], pour inciter les élèves à pratiquer cette correspondance. Et on le retrouvera, évoqué de manière différente, dans le traité de Lacroix : «*Je ne voudrais pas qu'on mêlât, comme on le fait dans presque tous les ouvrages, les considérations géométriques avec les calculs algébriques ; il serait mieux, ce me semble, que chacun de ces moyens fût porté dans des traités séparés, aussi loin qu'il peut aller et que les résultats de l'un et de l'autre s'éclairassent mutuellement en se correspondant pour ainsi dire, comme le texte d'un livre et sa traduction*» [Lacroix 1797–98, p. xxvi].

¹² Les pages où Poncelet [1822, p. xx–xxii par exemple] confronte leurs mérites respectifs témoignent d'une conception apparentée de l'analyse et de la synthèse, qu'il donne pour synonyme usuel de «*géométrie élémentaire*». Le vocabulaire qu'il emploie dans ce texte évoque régulièrement la terminologie de Carnot que nous introduirons ci-dessous : «*système*», «*implicite*», «*primitif*», etc.

¹³ Carnot expose cette critique dans une longue note, et la précisera dans ses écrits ultérieurs. Carnot [1801, p. 29 sq.] développe l'analogie entre cette conception dans le domaine de la géométrie et son diagnostic relatif à la validité de l'analyse infinitésimale.

dont aucune interprétation géométrique ne paraît à Carnot satisfaisante puisque toutes celles avancées jusqu'alors mènent à des incohérences¹⁴. Leur caractère inintelligible le pousse à se passer de ces quantités, en leur substituant une « géométrie de position », fondée sur une synthèse au cours de laquelle « *l'esprit ne perd jamais de vue son objet* » ; et Carnot travaillera à tirer parti de l'analyse pour la transformer en une synthèse efficace¹⁵.

Qu'il s'agisse de développer la méthode géométrique pour la confronter à l'analyse ou pour éliminer celle-ci, la problématique reste la même : d'où proviennent la puissance et l'efficacité de l'analyse ? Comment munir la géométrie de ces qualités ? Ce leitmotiv se fait entendre dans de nombreux travaux du début du XIX^e siècle.

Au fur et à mesure que la géométrie s'élabore, les traits principaux qui seront retenus des travaux analytiques et auxquels les géomètres s'efforceront d'introduire des contreparties, se précisent. Nous y relevons les caractéristiques suivantes :

- L'analyse opère de manière « directe », de manière « uniforme » [Poncelet 1822, p. XIX, XXVII, XXVIII, XXX]. Cette dernière propriété peut en fait s'entendre de deux manières. Elle peut renvoyer à une uniformité de méthode, puisque l'analyse ne recourt qu'à des transformations. Mais elle peut aussi renvoyer au fait qu'une seule et même démonstration permet en analyse de traiter des cas que la géométrie considère comme différents et relevant de ce fait de démonstrations différentes.

- L'analyse, note-t-on par ailleurs, lie les vérités entre elles. Effectivement, les transformations font apparaître des relations entre « *des vérités en apparence lointaines* » [Poncelet 1822, p. XXVI]. De plus, l'analyse est mise en œuvre, nous l'avons rappelé ci-dessus, dans le cadre de travaux à caractère architectonique, et pareils traitements « analytiques » de domaines mathématiques mettent en évidence des « principes » : en

¹⁴ Voir la Dissertation préliminaire de [Carnot 1803, p. I–XXXVIII].

¹⁵ En commentant, dans son rapport de 1870, l'effet qu'eurent selon lui les travaux de Carnot sur ses contemporains, Chasles [1870, p. 3–4] retient tout particulièrement qu'ils contribuèrent à rehausser à leurs yeux le prestige d'une approche synthétique : « *Fondés sur la méthode des anciens, ils ont eu une influence considérable et des plus heureuses, en inspirant aux jeunes géomètres le goût des recherches en Géométrie pure, et en faisant naître l'espoir de trouver des ressources suffisantes dans une méthode simple et lumineuse, qui avait été entièrement délaissée depuis l'apparition de la Géométrie de Descartes, c'est-à-dire de la Géométrie analytique.* »

un nombre que l'on s'efforce de réduire au maximum, ces principes ont pour caractéristique que toutes les vérités n'en sont que des transformations [Poncelet 1822, p. xxviii]. On retiendra que l'analyse dégage des *principes féconds*, dont les autres vérités apparaissent n'être que des *formes différentes*. C'est ainsi qu'elle procure une organisation de l'ensemble des connaissances.

• Mais c'est surtout, nous avons déjà mentionné ce fait, la généralité qui semble « propre » à l'analyse qui retient l'attention¹⁶ : un énoncé algébrique, une formule, renvoient à un ensemble de propositions différentes, parlent simultanément de figures différentes, dès lors conçues comme autant de « cas ». Pour reprendre les termes de Poncelet dans une page où il examine cette fracture entre les deux approches [Poncelet 1822, p. xxvi], le problème se posera en géométrie d'« *embrasser, dans un seul théorème, une foule de vérités particulières.* » C'est à une réflexion sur la manière d'introduire cette propriété en géométrie qu'on peut associer de multiples développements à venir. C'est elle que Monge vise déjà lorsqu'il suggère de mettre en regard les deux méthodes. Nous examinerons ici comment les travaux de Carnot ont pu être perçus comme une contribution à la résolution de ce problème. Et nous verrons comment ces autres possibles visées que sont la mise en relation de vérités entre elles, l'uniformité, la fécondité d'un petit nombre de principes renvoient en fait plus largement à cette question de la généralité.

En un mot, suivant le fil conducteur du théorème de Menelaus, nous lirons les travaux de Carnot à partir d'un unique point de vue : comment introduire ces caractéristiques des traitements analytiques dans un monde géométrique où une foule de vérités particulières, établies par des méthodes *ad hoc*, restent sans liaison entre elles et forment donc un ensemble sans organisation.

2. ÉNONCÉS ET CONFIGURATIONS

Le premier texte de géométrie que Carnot publie consiste en une lettre

¹⁶ C'est en fait, nous dit Chasles dans l'introduction de son *Aperçu historique*, une de ses intentions principales, que d'y montrer comment les développements récents de la géométrie ont introduit de la généralité dans cette discipline, alors que cette propriété avait semblé longtemps être le « *caractère propre de l'Analyse* » [Chasles 1837, p. 2]. [Poncelet 1822] revient à de multiples reprises sur cette propriété.

à Bossut que celui-ci fait imprimer en appendice d'une nouvelle édition de son *Cours de mathématiques*¹⁷. Ce texte nous importe ici pour les éléments de réflexion qu'il procure sur la généralité en matière d'assertions et de figures. Nous suivrons donc Carnot sur quelques pages significatives. Ce dernier précise le sujet de sa lettre dans les tout premiers paragraphes :

«L'objet de la trigonométrie est de trouver les rapports qui existent entre les quantités linéaires et les quantités angulaires d'un triangle, et en général d'une figure quelconque : celui que je me suis proposé a été de trouver séparément ceux de ces rapports qui existent entre les quantités linéaires seulement, sans faire intervenir dans le calcul les quantités angulaires» [Carnot 1800, p. 401].

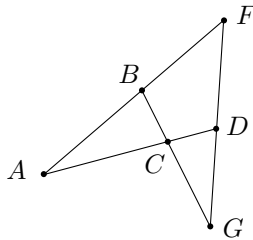


Figure 1

De telles relations n'existent pas pour le triangle. Carnot passe donc à l'examen du quadrilatère. Une fois ses côtés indéfiniment prolongés, le quadrilatère $BCDF$ (voir la figure 1) se voit adjoindre les points A et G , figure à propos de laquelle Carnot établit les relations suivantes

$$AB \cdot FG \cdot CD = AC \cdot BF \cdot GD,$$

$$BC \cdot AF \cdot GD = CG \cdot AB \cdot FD,$$

$$DF \cdot GB \cdot CA = GF \cdot CB \cdot DA,$$

$$AF \cdot CD \cdot BG = BF \cdot AD \cdot CG,$$

qui sont autant de versions du théorème aujourd'hui dit de Menelaus¹⁸.

¹⁷ Carnot [1800]. Les numéros de pages renvoient à l'édition de Bossut.

¹⁸ Carnot utilise deux méthodes, l'une trigonométrique, l'autre géométrique, pour les obtenir. Toutes deux opèrent sur la figure du quadrilatère. On peut se reporter à [Chemla 1990] pour une esquisse de l'histoire de ce théorème. [Dhombres, Jean et Nicole 1997, p. 488, et notes 36, 37, p. 688] fournit des éléments supplémentaires sur la manière dont divers auteurs établirent, au début du XIX^e siècle, que la connaissance de ce théorème remontait à l'antiquité, et insiste sur l'introduction, par Carnot, de cette figure du quadrilatère complet (p. 487).

Ce théorème, qui est ici obtenu lors de la recherche de propositions bien particulières, apparaîtra plus tard comme le principe fondamental de la théorie des transversales, nous aurons à y revenir ci-dessous dans le cadre de notre problématique.

Observons, pour l'instant que, dans sa lettre à Bossut, Carnot [1800, p. 404] poursuit :

«*Pour mettre ces équations sous la forme d'un théorème dont l'application soit facile, il faut considérer qu'après avoir prolongé indéfiniment les côtés d'un quadrilatère quelconque $BCDF$, on peut le regarder comme un triangle ABC , dont les côtés sont indéfiniment prolongés, et coupés par une transversale commune FG , qui est le quatrième côté du quadrilatère aussi indéfiniment prolongé [...]*» (c'est nous qui soulignons).

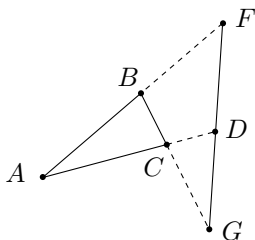


Figure 2

Carnot propose donc de relire le dessin du quadrilatère sous les espèces d'un triangle et d'une transversale, comme cela est indiqué sur la figure 2, de manière à pouvoir énoncer les équations obtenues sous la forme d'un théorème, que voici :

«*Les trois côtés d'un triangle quelconque (ABC) étant prolongés indéfiniment, si l'on mène une transversale indéfinie (FG) qui les coupe tous trois (aux points F, D, G), il résultera de cette construction sur chacun des côtés du triangle deux segments : (savoir, pour le côté AB , les segments AF, BF ; pour le côté AC , les segments AD, CD ; et pour le côté BC , les segments BG, CG). Or de ces six segments le produit formé de trois d'entre eux comme facteurs est égal au produit formé des trois autres, en prenant ces facteurs de manière qu'il n'en entre pas deux dans le même produit qui aient pour extrémités un même angle du triangle, ou un même point de la transversale (c'est-à-dire que l'on a*

$AF \cdot CD \cdot BG = BG \cdot AD \cdot CG$; où l'on voit qu'aucune des lettres A, B, C, D, F, G , qui forment les angles du triangle et les intersections des côtés avec la transversale n'entre deux fois dans le même produit)» (les italiques reproduisent ceux du texte de [Carnot 1800, p. 404–5]).

C'est ainsi que Carnot introduit le terme de «transversale» : il lui permet de «traduire» [Carnot 1800, p. 405] en un *seul théorème* «en langage ordinaire» ce qui se donnait, par l'énoncé technique, en *quatre équations*¹⁹. Voici donc que, par les vertus d'une reformulation, quatre relations différentes, qui liaient entre eux les segments d'une figure, ne deviennent plus qu'une seule et même propriété; Carnot insiste à diverses reprises sur ce point. De fait, la généralité d'une assertion apparaît dépendre de sa forme. Sa référence sera plus ou moins riche selon les transformations qu'on appliquera à son énoncé²⁰.

Cependant ce phénomène est conditionné par le fait que le dessin, par le biais d'une relecture, change de nature. En effet, il suffit, pour obtenir à partir du théorème chacune des équations, de choisir, sur le même graphique, de manière appropriée, laquelle des lignes sera la transversale et quel sera le triangle. Le dessin n'est donc plus lu comme *figure*, mais comme *configuration*, articulant, d'une manière qui est ouverte à la variation, un triangle et une droite²¹. Le théorème ne porte plus sur un quadrilatère, mais sur la rencontre d'un triangle et d'une droite, quelle que soit la manière dont celle-ci se produit. Il n'énonce plus une propriété d'une figure, mais prend des sens différents en fonction de la configuration

¹⁹ Nous avons mis en évidence l'importance que Carnot accorde au couple langage ordinaire/langage technique dans [Chemla 1990].

²⁰ Cette question est l'objet de multiples remarques de Chasles dans son *Aperçu historique*, qui en donne divers exemples de manifestation. Nous y reviendrons.

²¹ L'algèbre a pour particularité de ne pas distinguer entre configurations différentes pour un même ensemble d'éléments géométriques et, à ce titre, elle a probablement induit l'introduction de la configuration en géométrie. Poncelet [1822, p. XXVI] met bien en relation le passage de la figure à la configuration avec l'emploi de l'analyse en géométrie : «Il n'y [dans la géométrie d'Euclide] est guère question que des proportions des figures les plus régulières; rarement y considère-t-on leur manière d'être mutuelle, ou, si l'on veut, leurs dépendances relatives à la disposition des points et des lignes. Or c'est précisément cette dernière dépendance, entre des figures qui paraissent, au premier abord, n'avoir rien de commun, qui peut exiger qu'on introduise, dans le langage et les conceptions de la Géométrie, les expressions et les notions abstraites de l'Analyse; elles seules, en effet, peuvent permettre d'établir un point de contact, sinon absolu, au moins fictif, entre certaines figures et certains résultats géométriques» (c'est nous qui soulignons).

particulière à laquelle il sera appliqué.

On voit déjà, sous deux aspects distincts quoique corrélés, se présenter dans ce texte le problème de la généralité. Avec la configuration tout particulièrement, s'amorce la question de ce que peut être une figure générale, par opposition à la multitude des dessins particuliers²². Ceci nous amène à la distinction que l'on retrouvera, dans les écrits de Poncelet par exemple, entre « figure décrite » et « disposition générale des objets d'une figure »²³.

²² Carnot touche explicitement au thème de la généralité d'une figure dans la lettre à Bossut lorsque, ayant énoncé un théorème sur le quadrilatère, il [1800, p. 409] poursuit : « Il est à remarquer que ce théorème est applicable, ainsi que ceux qui doivent suivre, au quadrilatère pris dans un sens plus étendu qu'on ne le fait ordinairement. Soient quatre points A, B, C, D , pris à volonté dans un même plan ; qu'on prenne ces quatre points dans quel ordre on voudra, comme par exemple A, D, C, B ; qu'on joigne ensuite le premier A et le second D par une droite AD ; le second D et le troisième C par une droite DC ; le troisième C et le quatrième B par une droite CB ; et enfin le quatrième B et le premier A par une droite BA : la figure $ADCBA$ sera ce que j'appelle un quadrilatère.

Il suit de là que quatre droites AB, AC, BD, DC , tracées à volonté dans le plan, et prolongées indéfiniment, forment entre elles trois quadrilatères ; savoir $ABDC, CFBG$, qui a un angle rentrant ; et $AFDG$, qui forme la figure de deux triangles opposés par le sommet.

Or tous ces quadrilatères ont essentiellement les mêmes propriétés [...] » (c'est nous qui soulignons). Plus loin, Carnot réédite la même remarque pour l'introduction du polygone, dans une démarche qu'adoptera Brianchon [1817, p. 6]. Carnot [1801, p. 120] notera par ailleurs également que ces quadrilatères s'obtiennent par déformation continue à partir d'un même système.

²³ Voir également [Chasles 1837 p. 198 sq.]. Poncelet [1822, p. XXI-XXII] souligne sur ce point la faiblesse de la géométrie ordinaire par comparaison avec sa « rivale » analytique : « Dans la géométrie ordinaire, qu'on nomme souvent *synthèse*, [...] la figure est décrite, jamais on ne la perd de vue, toujours on raisonne sur des grandeurs, des formes réelles et existantes [...]. La rigueur est même poussée au point de ne pas admettre les conséquences d'un raisonnement, établi dans une certaine disposition générale des objets d'une figure, pour une autre disposition également générale de ces objets, et qui aurait toute l'analogie possible avec la première ; en un mot, dans cette Géométrie restreinte, on est forcé de reprendre toute la série des raisonnements primitifs, dès l'instant qu'une ligne, un point ont passé de la droite à la gauche d'un autre, etc. [...] Considérons une figure quelconque, dans une position générale et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système ». Les différentes dispositions que peut prendre une figure générale dépendent des positions relatives entre les « parties du système » et sont reliées entre elles, dans la conception qu'adopte Poncelet, par le fait de pouvoir être transformées par déformation continue les unes en les autres. Tant les termes (« système », « primitif ») que l'intervention de la continuité évoquent le dispositif mis au point par Carnot, voir ci-dessous. [Poncelet 1822, p. xxv] discute de la manière dont on peut concevoir l'opposition entre états

Ici pourtant c'est le même dessin qui est lu de quatre manières différentes, tandis que l'énoncé parle sans aucune restriction d'un triangle et d'une transversale. L'ensemble des variations que peut présenter cette configuration est-il épuisé par les diverses lectures d'un même dessin ? Le théorème est-il établi en *toute généralité*, concerne-t-il la *figure générale*, dès lors que l'on dispose, au terme de démonstrations semblables²⁴, des quatre relations ci-dessus ?

En quittant la figure pour la configuration, on s'est démarqué de la géométrie des anciens. Il se pose en conséquence de nouveaux problèmes : comment énoncer quelque chose de ces figures générales, quelque chose qui devra être valide de toutes leurs réalisations, quoique prenant des sens différents sur chacune ? De plus, comment le démontrer sans retomber dans l'ornière qui consiste à fournir de chaque cas particulier une démonstration différente. Car c'est ainsi que les anciens se sont barré la route de la généralité en géométrie. Les publications ultérieures de Carnot se laissent lire comme des tentatives pour apporter des réponses à ces questions.

3. DE LA PORTÉE DES DÉMONSTRATIONS

Nous avons évoqué ci-dessus la teneur de l'examen critique que Carnot donne de l'analyse. Le projet qu'il développe dans l'ouvrage *De la corrélation des figures de géométrie* et qu'il poursuit dans sa *Géométrie de position* a pour enjeu de conserver en géométrie la puissance de l'analyse, tout en évacuant les incertitudes. Il consiste à prendre en considération l'ensemble des états possibles d'une figure — en un sens à définir —, et à établir un principe qui fournisse les modifications à apporter à un résultat, obtenu au terme d'une démonstration sur un de ces états, pour le transformer en le résultat correspondant portant sur un autre état, et ce sans devoir effectuer de nouvelle démonstration. N'opérant qu'au moyen de raisonnements synthétiques, au sens qu'il donne à ce terme, Carnot se pose la question des modalités de transport des résultats d'un état à un

particulier ou général d'un système.

²⁴ Carnot [1800] ne donne qu'une démonstration, dans chacune des versions, géométrique ou trigonométrique, et se contente de signaler que les autres démonstrations se mèneraient de la même manière.

autre d'une figure, même lorsque les raisonnements, eux, ne se transmettent pas.

C'est cet aspect de l'*opus magnum* de Carnot que Chasles souligne, quand il écrit dans son rapport de 1870 :

«*La Géométrie de position renfermait une conception heureuse sur la nature des quantités positives et négatives, qui permettait de généraliser chaque question, dans ce sens qu'une seule démonstration, quelles que fussent les positions relatives des différentes parties d'une figure, devait suffire ; tandis que jusqu'alors chaque question exigeait autant de démonstrations qu'il y avait de variétés de position dans les points et dans les lignes d'une figure. Cette conception nous paraît être l'idée principale qui caractérise l'ouvrage de Carnot*» [Chasles 1870, p. 4]²⁵ (c'est nous qui soulignons).

Et c'est bien en ces termes que Carnot conçoit son effort, puisque dès l'ouverture de *La corrélation des figures de géométrie*, il annonce vouloir

«*rapporter chaque figure dont on recherche les propriétés à une autre figure dont les propriétés sont connues ; puis [...] on exprime les modifications qui les distinguent : c'est ce que j'appelle établir la corrélation des figures*» [Carnot 1801, p. 1].

L'ensemble du dispositif repose sur la notion de « système variable de quantités », qui permettra de renvoyer à des états différents d'une même figure. Ils seront considérés comme « systèmes corrélatifs », lesquels sont donnés comme :

«*tous ceux qu'on peut rapporter à un même système primitif, c'est-à-dire tous ceux qu'on peut considérer comme les différents états d'un même système variable qui se déforme par degrés insensibles*» [Carnot 1801, p. 6]²⁶ (c'est nous qui soulignons).

²⁵ C'est en renvoyant à une figure comme comportant différentes parties dont les positions relatives peuvent varier que Chasles lit ici l'œuvre de Carnot comme une réponse à la question de savoir comment démontrer des propriétés se rapportant à pareilles figures. [Poncelet 1822, p. XXII] reprend à son compte la même préoccupation. Notons que [Chasles 1837] retenait plutôt, de l'œuvre géométrique de Carnot, sa théorie des transversales. C'est donc une modification de perspective que manifeste ce rapport, écrit plus de trente-cinq ans plus tard.

²⁶ Nous avons ici la constellation de termes que l'on retrouve chez Poncelet [1822, par exemple p. XXII], quelques lignes avant qu'il ne renvoie au «*principe de la corrélation des figures, admis par Mr Carnot*» [Poncelet [1822, p. XXIII].

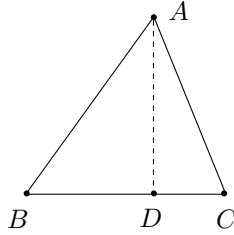


Figure 3

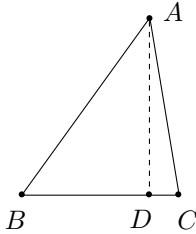


Figure 4a

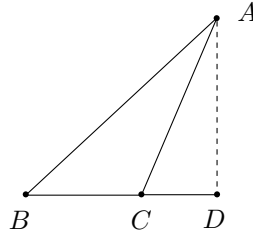


Figure 4b

Prenons l'exemple classique du système constitué d'un triangle ABC , dans lequel on abaisse la hauteur de A sur la base BC , prise d'une longueur constante. Deux cas peuvent se présenter; D se trouve entre B et C ou à l'extérieur du segment BC (figures 4a et 4b respectivement). Pour décrire ces deux situations, Carnot choisit un *état particulier* du système comme système primitif, celui de la figure 3 par exemple. Tous les autres états seront considérés comme transformés à partir de celui-ci. Il convient d'observer l'évolution de l'ensemble des quantités quand on transforme «*par degrés insensibles*» le système primitif, pour établir la nature de sa corrélation avec les systèmes transformés. Ils pourront être en corrélation directe avec lui, comme dans le cas de la figure 4a, et CD sera dite directe (CD est la différence de deux quantités «*en ordre direct*», c'est-à-dire dont les relations d'ordre entre les longueurs se conservent au passage du système 3 au système 4a), ou en corrélation indirecte, comme dans le cas de la figure 4b, et CD sera alors inverse (car différence de deux quantités «*en ordre inverse*», c'est-à-dire dont les relations d'ordre entre les longueurs s'inversent). Soulignons que les deux états 4a et 4b du système sont liés par le fait de représenter des déformations continues du même système primitif.

Parmi les formules trouvées pour un système variable de quantités, Carnot distingue celles qui sont directement applicables, c'est-à-dire qui proposent des «*opérations exécutables sur des quantités effectives*» («*formules explicites*»), de celles qui ne le sont pas («*formules implicites*»). L'objectif de la théorie qu'il développe est de permettre, une fois obtenues les formules explicites pour un état d'un système variable de quantités (pris comme «*système primitif*»), d'en déduire par transformation systématique les formules explicites pour un autre état de ce même système variable de quantités (appelé alors système transformé)²⁷.

Le principe que Carnot veut établir afin de transformer les formules démontrées pour une figure en celles qui leur correspondent pour une figure corrélative est le suivant : lorsque l'on dispose d'une formule explicite pour le système primitif, on trouve la formule explicite pour le système transformé en changeant le signe des expressions, ou «*valeurs*», calculées en fonction de quantités qui se trouvent en ordre inverse dans le système transformé.

Ainsi la formule

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2BC \cdot CD,$$

explicite pour le système primitif et ceux qui sont en corrélation directe avec lui, doit être transformée en la formule

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 + 2BC \cdot CD$$

pour être explicite dans le cas de l'état de la figure 4b.

Carnot asseoit ce principe sur une analyse de la manière dont les démonstrations des formules correspondantes qui portent sur des états différents se transforment l'une en l'autre. Pour ce qui est de l'exemple ci-dessus, il montre ainsi que la démonstration effectuée sur le système primitif est valable pour tout système en corrélation directe avec celui-ci, tandis qu'il est nécessaire de la transformer pour trouver une formule valide pour la figure 4b. Le mode de transformation consiste à modifier le signe des quantités inverses, ce sera donc la même transformation qu'il

²⁷ Partageant le souci de ne plus être «*forcé de reprendre toute la série des raisonnements primitifs, dès l'instant qu'une ligne, un point ont passé de la droite à la gauche d'un autre*» (cité à la note 22), Poncelet [1822, p. XXII] s'inquiète du même problème en les mêmes termes.

suffira d'appliquer au résultat, sans plus refaire la démonstration, pour obtenir la formule « explicite » concernant le système 4b²⁸. On voit que le principe renvoie à l'idée qu'il est possible de transformer de manière réglée une unique démonstration en un ensemble de raisonnements, par conséquent uniformes.

Dès lors que ce principe serait établi, une unique démonstration, effectuée pour l'une des figures, suffirait donc pour établir l'ensemble des énoncés qui se correspondent et qui portent sur l'ensemble des états possibles du système variable de quantités. Certes le principe vise à cette généralité pour la démonstration. Mais, même si des géomètres comme Brianchon [1817, p. 6] l'adoptent avec enthousiasme et si Chasles identifie là, avec le recul du temps, l'idée importante du dispositif, la justification qu'en donne Carnot pêche. Poncelet la met en défaut, en montrant à l'aide d'un contrexemple, que si deux états d'une figure sont

²⁸ Voici le texte de l'exemple élémentaire qui semble suffire à Carnot pour étayer son principe : « *Par exemple dans le système primitif ABCD, déjà considéré [...], je puis faire ce raisonnement :*

Le triangle rectangle ABD donne

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$

et le triangle ACD donne

$$AC^2 = CD^2 + AD^2.$$

Ôtant cette seconde équation de la première, il reste

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2.$$

De plus, on a

$$BD = BC - CD.$$

Substituant cette valeur de BD dans l'équation précédente, on aura

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 - 2BC \cdot CD.$$

Il est clair que ce raisonnement est applicable, littéralement et dans son entier, au système (sic) transformé, tant que le point D est placé entre B et C : donc la formule précédente est immédiatement applicable à tous les cas, tant que CD est en sens direct.

Lorsque C aura passé le point D, la première partie du raisonnement aura encore lieu, mais non la seconde, puisqu'on n'aura plus comme précédemment $CD = BC - BD$, mais au contraire $CD = BD - BC$; c'est-à-dire, que CD sera devenue inverse. Aussi l'équation finale sera-t-elle pour ce cas

$$AB^2 - AC^2 = BC^2 + 2BC \cdot CD$$

laquelle diffère de celle trouvée pour le premier cas par le signe qui affecte le second terme du second membre, ce signe étant - pour le premier cas et + pour le second» [Carnot 1801, p. 8-9].

en corrélation directe, il peut ne pas en être de même des constructions qui sont nécessaires à la démonstration d'un énoncé les concernant²⁹. Poncelet ruine ainsi cette justification du transfert du résultat, d'un état du système, à un état qui se trouve en corrélation directe avec lui. Il conservera cependant un principe du même ordre, en lui conférant le statut d'«une sorte d'axiome dont l'évidence est manifeste, incontestable, et n'a pas besoin d'être démontrée» [Poncelet 1822, resp. p. xxii et xxiii].

On peut en effet noter l'affinité manifeste du principe que Carnot croit établir avec le principe de continuité que Poncelet introduira, à la suite de sa critique, dans ses travaux géométriques. La problématique, nous l'avons évoqué, est la même, et touche donc encore à la généralité de la démonstration : elle consiste à se demander quand une démonstration visant une propriété d'une figure, dans une de ses configurations générales, établit du même coup une propriété correspondante pour la même figure, dans une autre de ses configurations, à savoir dans une configuration obtenue à partir de la première par une déformation opérant par degrés insensibles. Et c'est la «continuité» de l'opération, centrale chez Carnot comme chez Poncelet, nous l'avons noté, qui est donnée pour garantir la conservation des propriétés au passage d'une figure à l'autre³⁰ et permettre ainsi d'«étendre l'objet des conceptions» de la géométrie [Poncelet 1822, p. xxxiii].

Si nous nous résumons, Carnot semble tenter ici d'élaborer l'idée d'une démonstration générale, et ce dans les termes suivants : à chaque état d'une figure est associé un état de la propriété à démontrer ; la démonstration peut être effectuée dans un cas de figure et établir l'énoncé correspondant ; elle est cependant générale en ce sens qu'elle établit du même geste les énoncés autres sur les figures corrélatives, pour peu que les énoncés correspondent aux figures selon la loi de corrélation des figures.

Carnot ira cependant un pas plus loin. Si l'on reprend en effet, dans ce

²⁹ Voir *Sur la loi des signes de position en géométrie* [Poncelet 1862–1864, tome II, p. 231–2], que Poncelet date *a posteriori* de l'hiver de 1815 à 1816.

³⁰ [Poncelet 1822, p. xxii–xxiii, xxiv, xxv, xxvi]. Nous nous proposons, dans une publication ultérieure, de reprendre le problème du principe de continuité, celui des différents états qu'il a pu prendre chez Poncelet et l'influence qu'a pu exercer Carnot sur cet auteur. Retenons ici que c'est par une confrontation systématique avec Carnot que Poncelet élabore dans ses *Cahiers* ce qui deviendra son principe de continuité. De plus, c'est au cours de son analyse de ce principe que Chasles [1837 p. 198 *sq.*] développe des réflexions pertinentes sur le problème de la généralité relative aux figures.

contexte, l'énoncé du théorème de Menelaus, on s'étonne de ce qu'il puisse être indifférent à la position de la droite relativement au triangle. Les états du système de variables sont alors loin d'être toujours en corrélation directe avec un même système primitif. Qu'est-ce qui justifie donc *a priori* que la *même* formule soit dans tous les cas « explicite », pour reprendre les termes mêmes du système théorique de Carnot ?

Le traité de la *Corrélation des figures de géométrie* explicite un souci qui éclaire ce point, tout en nous ramenant par un autre biais à la question de la généralité. Carnot [1801, p. 21] y propose en effet la recherche suivante :

« Il se présente une [...] question importante à faire sur la comparaison de deux systèmes corrélatifs, ayant chacun sa formule propre ou explicite : c'est d'en trouver une troisième qui les renferme l'une et l'autre, ou qui soit directement applicable aux deux systèmes » (c'est nous qui soulignons).

Plus loin Carnot [1801, p. 22] insiste :

« C'est une recherche curieuse et importante que cette généralisation des formules, ou l'art de rendre immédiatement applicables à tous les systèmes corrélatifs possibles, celles qui sont trouvées pour un seul pris comme terme de comparaison » (c'est nous qui soulignons).

L'enjeu apparaît ici clairement : une fois précisées les contraintes auxquelles doivent se soumettre les formules pour être explicites, n'est-il pas possible de trouver des formules invariantes, qui soient explicites pour tous les états du système variable de quantités ? Carnot [1801, p. 34–5] donne en réponse à cette question la description de classes entières de telles formules, dont les suivantes laissent une trace dans les écrits de Poncelet [1822, p. XXVIII] :

« Toute formule ou équation à deux termes seulement pour le système primitif, est aussi immédiatement applicable à chacun des systèmes corrélatifs ; car, si elle ne l'étoit pas, il faudrait, pour qu'elle le devînt, changer le signe des quantités qui deviendroient inverses : mais la formule ne changerait pas pour cela, puisque si l'un des termes devient négatif, il faudra que l'autre le devienne aussi ; car une valeur positive ne peut se trouver égale à une valeur négative. »

Le théorème de Menelaus, Carnot en est conscient, tombe dans cette catégorie, et c'est cela qui justifie qu'il soit applicable immédiatement, sans modification, à tous les systèmes corrélatifs, que ceux-ci soient en

corrélation directe ou indirecte³¹.

Cette «*généralisation des formules*», pour reprendre l'expression de Carnot, amène donc à dégager des classes de propositions qui, *par leur nature*, seront directement applicables à tous les états d'une figure. Cette recherche ne manque pas d'évoquer la démarche qui conduira Poncelet à se concentrer plus tard sur la classe des propriétés projectives des figures : il les définit par leur caractéristique de se transmettre d'une figure à la figure projetée. Brianchon [1817] a mis en évidence que de telles propriétés doivent, lorsqu'elles sont métriques, n'être fonction que du birapport — tout en se montrant conscient qu'il marche alors sur les traces de nombre de mathématiciens du XVII^e siècle³². C'est donc ici à nouveau, comme pour le cas des classes de propriétés de Carnot, leur *forme* qui assure à ces propriétés de se conserver. Un trait pourtant distingue les deux situations. Poncelet insiste sur le fait que la démonstration d'une propriété projective dans un cas particulier permet néanmoins de l'affirmer en toute généralité des projections de la figure [Poncelet 1822, p. XXXI–XXXIII]. C'est une manière de passer du particulier au général. Au contraire, les propriétés invariantes des classes que Carnot met en évidence se doivent d'être établies sur l'un des états généraux d'une figure pour être transférables aux autres.

Situés au coeur du dispositif que Carnot expose dans ses deux ouvrages, les traitements précédents renvoyaient à une conception possible de ce que peut être la généralité d'une démonstration : Carnot établit un principe assurant une extension élargie aux conclusions d'une démonstration qui opère pourtant sur l'un des états possibles d'une figure. C'est une autre conception que l'on peut attacher à la pratique de la démonstration dans l'*Essai sur la théorie des transversales* de 1806. Carnot n'y reprend pas l'ensemble du dispositif mis au point dans les deux ouvrages précédents. Point n'est question de systèmes qui présenteraient une corrélation quelconque les uns avec les autres. Pourtant le théorème de Menelaus, énoncé

³¹ Il remarque en effet à son sujet : «*Ces trois quadrilatères ont chacun leurs quatre côtés pris sur les quatre mêmes droites et forment entre eux trois figures indirectement corrélatives ; mais comme les équations que nous tirons de l'une ne sont qu'à deux termes, elles sont immédiatement applicables aux deux autres*» [Carnot 1801, p. 120].

³² Nous reprendrons aussi dans une publication ultérieure le problème de l'émergence des propriétés métriques projectives, à laquelle Carnot a de fait participé. Poncelet [1822, p. xxx] souligne le côté projectif de la théorie des transversales.

comme portant sur la configuration d'un triangle et d'une droite, reçoit une unique démonstration, après l'exposé de laquelle Carnot souligne :

«On voit que la même démonstration a lieu, soit que la transversale coupe l'aire même du triangle, ou qu'elle passe au dehors» [Carnot 1806, p. 67].

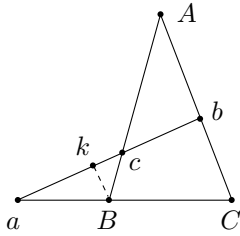


Figure 5a

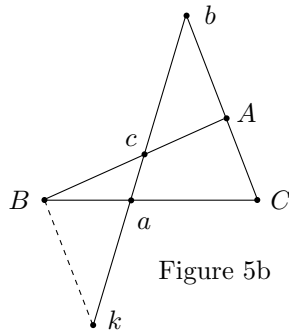


Figure 5b

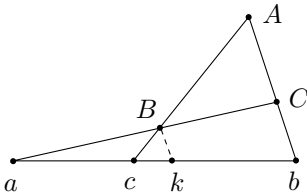


Figure 5c

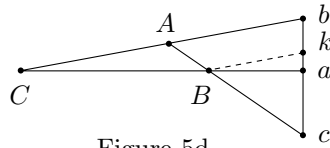


Figure 5d

De fait un *seul texte de démonstration* renvoie à quatre figures différentes, qui sont les quatre configurations possibles que peuvent constituer le triangle et la droite (voir l'ensemble des figures 5). Les mêmes opérations, les mêmes constructions, amènent à conclure à la validité du théorème, mais elles prennent des significations différentes — et toujours efficaces — dans chacune des situations³³.

³³ Voici le texte de cette démonstration, certes élémentaire mais intéressante par la volonté qui s'y manifeste de rédiger un unique texte, à lire en relation avec quatre figures différentes : «Soit ABC le triangle proposé, abc la transversale menée dans le plan de ce triangle, et coupant les côtés BC , AC , AB , ou leurs prolongemens respectivement en a, b, c ; il y aura sur la direction de chacun de ces côtés ou sur son prolongement, deux segmens formés par la transversale, c'est-à-dire, deux portions comprises entre cette transversale et les angles placés sur cette direction; savoir : Ac, Bc sur AB ; Ab, Cb sur AC ; Ba, Ca sur BC .

Il s'agit donc de prouver que le produit $Ab \cdot Bc \cdot Ca$, qui a pour facteurs les trois

4. DIVERSES EXTENSIONS. PRINCIPES ET ORGANISATION.

Le théorème qui ne sera que plus tard associé au nom de Menelaus va se révéler, dans la forme qu'il revêt dans la lettre à Bossut, susceptible d'un grand nombre de généralisations. Dès cette première publication géométrique, Carnot montre qu'il peut être étendu aux polygones plans coupés par une transversale : «*Il est facile d'apercevoir*», écrit-il, «*l'application de cette théorie aux polygones en général, quel que soit le nombre de leurs côtés*» [Carnot 1800, p. 407]. Et il poursuit en signalant, sans plus entrer dans les détails, qu'on peut la développer plus généralement pour les assemblages de droites et qu'à «*quelques modifications*» près, on peut aussi l'appliquer aux polygones gauches.

Carnot évoque de plus le fait que ce théorème et ses conséquences sont transposables à la sphère et aux triangles, ou aux polygones, sphériques :

«[...] *la théorie que nous venons d'exposer sur les triangles et autres figures tracées sur un plan, et composées de lignes droites, s'applique aux triangles sphériques et autres figures composées de grands arcs de cercle tracées sur la surface d'une sphère; avec cette seule différence qu'au lieu des droites dont nous avons parlé, il n'y a qu'à substituer les sinus des arcs qui y correspondent, lorsque la figure est tracée sur la surface d'une*

segmens Ab , Bc , Ca , non contigus, ou qui n'ont point d'extrémités communes, est égal au produit Ac , Ba , Cb , (*sic*) des trois autres segmens Ac , Ba , Cb , qui sont également non contigus entre eux.

Or par le sommet de l'un quelconque des angles du triangle proposé, comme B , *soit menée une parallèle au côté opposé* AC , *et qui rencontre en* k *la transversale.*

Les deux triangles semblables Abc , Bkc *d'une part, et de l'autre, les deux triangles semblables* Cab , Bak *donnent les deux proportions suivantes :*

$$Ab : Ac :: Bk : Bc,$$

$$Ca : Cb :: Ba : Bk.$$

Multipliant ces deux proportions, et effaçant les termes qui ne se détruisent pas, on a en égalant le produit des extrêmes au produit des moyens,

$$Ab \cdot Bc \cdot Ca = Ac \cdot Ba \cdot Cb$$

ce qu'il fallait démontrer» [Carnot 1806, p. 66–7]. On constatera qu'à la différence de la démonstration citée à la note 28, celle-ci procède par formules «*immédiatement applicables à chacun des systèmes corrélatifs*», dont Carnot, nous l'avons souligné, promeut la recherche. L'intérêt pour de telles formules a pu se déplacer des énoncés aux démonstrations qui les articulent en textes.

sphère»³⁴ [Carnot 1800, p. 411].

Ainsi, le concept de transversale présente l'intérêt de faire ressortir une analogie entre divers ensembles de propositions traitant — avec les appellations de l'époque — du plan, de l'espace ou de la sphère, lorsqu'elles sont reformulées en ces termes. Ces mises en parallèle des propriétés de trois supports géométriques sont un thème récurrent de la géométrie du début du XIX^e siècle. On peut penser, par exemple, que c'est en confrontant des « dualités » que manifestaient les propriétés de situation dans ces trois réceptacles et en observant leurs relations, que Gergonne a été amené à s'intéresser à *la* dualité³⁵. Or, dans l'*Aperçu historique*, Chasles montre sous plusieurs angles le rôle que peut jouer cette confrontation lorsqu'on vise la plus grande généralité possible.

En effet, il revient souvent sur le fait que différentes « formes » d'un même théorème n'ont pas la même capacité à la généralité — la reformulation du théorème de Menelaus nous en fournit, nous l'avons signalé, un exemple —, et tente donc en chaque cas d'identifier la forme la plus générale. Un des critères qu'il propose consiste à chercher la forme, pour le plan, qui ait son analogue dans l'espace :

«[...] *c'est une remarque qu'on peut faire souvent dans l'étude de la géométrie, que les solutions de la Géométrie plane, qui ont leurs analogues dans l'espace, sont toujours les plus générales et les plus simples.*

Ce principe donne un moyen d'épreuve, une sorte de criterium, pour reconnaître si l'on est parvenu, dans une question, à toute la généralité et à toute la perfection dont elle est susceptible, ou en d'autres termes, si l'on a rencontré la méthode et la vraie route qui lui sont propres»³⁶ [Chasles 1837, p. 45].

Le théorème de Menelaus satisfait bien cette exigence, ce qui lui confère un nouveau titre à la généralité. Mais il y a plus. Chasles explicite les

³⁴ Brianchon [1817, p. 15] souligne l'importance que revêt à ses yeux la mise en évidence des analogies entre ces familles de figures : « *La doctrine des transversales a l'avantage de s'appliquer également aux polygones sphériques et aux polygones rectilignes : d'où la conformité qui règne entre les propriétés de situation de ces deux figures. Voici au sujet de ce rapprochement, mis dans un grand jour par M. Carnot [...]* » (c'est nous qui soulignons).

³⁵ C'est l'hypothèse avancée dans [Chemla 1994].

³⁶ Il met en œuvre ce critère lorsqu'il cherche quel est le bon analogue pour l'espace du théorème de Pascal [1837, p. 245 *sq.*].

bénéfices qu'il tire du fait d'identifier les énoncés les plus généraux possibles : il seront capables, par simple transformation, de donner naissance au plus grand nombre possible de propositions. Un lien sera alors établi entre ces propositions, qui pouvaient auparavant apparaître comme indépendantes les unes des autres. Se trouvent ainsi articulées de nombreuses propriétés qui jusqu'alors étaient caractéristiques de l'Analyse et de la manière de mettre en forme les mathématiques qui lui était associée : généralité ; liaison entre elles de propriétés, laquelle se trouve mise en évidence par des transformations ; identification de principes, féconds dans la mesure où toutes les propositions en découlent³⁷.

Or, au nombre des principes que Chasles qualifiera de féconds, figure le théorème de Menelaus (qu'il attribue encore à Ptolémée). Ainsi dans l'historique qu'il brosse des usages qui en ont été faits, il conclut :

*« Depuis [1678], nous ne trouvons plus de traces du théorème de Ptolémée, qui, après avoir été fort en usage, et connu de tous les géomètres, pendant près de deux cents ans, est resté infructueux, et peut-être même ignoré, pendant plus d'un siècle, jusqu'à ce que Carnot, qui était parvenu de lui-même à ce théorème, parmi plusieurs autres de même nature, concernant le quadrilatère plan, l'eût fait connaître comme l'un des plus utiles et des plus féconds en Géométrie rationnelle »*³⁸.

Cependant, le théorème de Menelaus³⁹ n'est, ni dans la lettre à Bossut, ni dans *De la corrélation des figures de géométrie*, ni encore dans la *Géométrie de position*, identifié comme principe et intégré dans un corps de doctrine ; il n'y a pas là de « théorie des transversales » à proprement parler. Dans le dispositif de la corrélation des figures, comme nous l'avons vu, ce théorème est plutôt distingué du fait de son appartenance à une famille d'énoncés particuliers. C'est au terme d'une réorganisation de

³⁷ [Poncelet 1822, p. XXXIV] avait déjà souligné la relation unissant ces vertus de fécondité, de généralité et de simplicité, et insisté sur la capacité des propriétés de l'« étendue » les possédant à lier les propriétés particulières des figures.

³⁸ [Chasles 1837, p. 293]. Nous soulignons. On retrouve le même diagnostic chez Poncelet [1822, p. XXXV, XLIV]. Sur Desargues et son usage du théorème de Menelaus, on peut se reporter à l'ouvrage de R. Taton [1951b]. Et pour ce qui est de Pascal, voir [Collectif 1964], qui lui a été consacré (sur l'aspect géométrique de l'œuvre de Pascal, voir les articles de P. Costabel, J. Itard, J. Mesnard, R. Taton), ainsi que le texte de Pascal [1640].

³⁹ Ainsi que quelques autres propositions, voir [Chemla 1990]. [Chasles 1837, p. 212] remarque ce fait.

l'ensemble des propositions dans l'*Essai sur la théorie des transversales* en 1806 que Carnot [1806, p. 67] l'y donne comme principe fondamental de ce qui se présente désormais, le titre l'indique, sous les traits d'une théorie⁴⁰.

« Ce théorème *qui doit être considéré* comme le principe fondamental de toute la théorie des transversales, est susceptible d'une très-grande généralisation : *car il s'étend, comme on le verra par les théorèmes qui suivent, à tous les polygones soit plans, soit gauches et même aux polygones sphériques* » (c'est nous qui soulignons).

En matière de généralité, dans l'*Essai* de 1806, Carnot considère maintenant comme transversales des lignes droites ou courbes, pouvant « *traverse[r] d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites soit courbes; ou même un système de plans ou de surfaces courbes* »⁴¹ [Carnot 1806, p. 65]. Et des principes qui fondent leur théorie, il affirme lui-même qu'ils sont simples et féconds. De fait le théorème de Menelaus, après avoir été établi pour des polygones plans coupés par une droite ou un cercle transversal, pour des polygones gauches, coupés par un plan transversal, après avoir été suggéré pour la sphère, est appliqué par

⁴⁰ Rappelons que le terme, l'idée de transversale semble s'introduire lors de la réécriture du théorème de Menelaus dans la lettre à Bossut. Il connaîtra par la suite une fortune autre. Voir [Chemla 1990].

⁴¹ Ainsi, dans une autre direction, le concept de transversale lui-même a été l'objet d'un travail de généralisation, [Dhombres Jean et Nicole 1997, p. 525] y insiste également : on peut considérer comme transversale une droite, aussi bien qu'un cercle, une conique ou une courbe algébrique quelconque. Mais on peut poursuivre, et considérer la même extension du côté des surfaces. [Brianchon 1817, p. 13-4] trouve là, chez Carnot, une des marques des « perfectionnements de la géométrie moderne ». En soulignant cette extension, dès la *Géométrie de position*, de la notion de transversale, [Poncelet 1822, p. XXXIX] insiste sur les analogies ainsi mises en évidence et avance l'hypothèse, sur la base d'une lettre de Descartes à Mersenne qu'il cite, que Desargues avait devancé Carnot en la matière : « *Il paraît bien évident, d'après cette lettre, que Desargues avait deviné et connu l'extension qu'on pouvait donner aux principes élémentaires de la Théorie des transversales, en les appliquant indistinctement aux systèmes de lignes droites et aux lignes courbes; et, en effet, M. Carnot a démontré depuis, dans sa Géométrie de position (Voy. le ch. Ier, sect. II du présent ouvrage) que la relation entre les segmens (sic), formés sur les côtés d'un triangle coupé par une courbe géométrique d'ordre quelconque, est précisément celle qui a lieu pour un autre triangle coupé par un système de droites en nombre égal à celui qui marque le degré de cette courbe : de sorte que, sous ce point de vue général, le système de deux, de trois, [...] droites tracées dans un plan, doit être considéré comme représentant une courbe du 2e., du 3e., [...] ordre, doit jouir des mêmes propriétés [...] que nous avons ci-dessus caractérisées par l'épithète de projectives* » (c'est nous qui soulignons).

le biais de sa réciproque, pour démontrer des alignements, dans différents cadres géométriques. Il s'avère donc principe par le fait de permettre une certaine *uniformité* dans les démonstrations⁴². La généralité s'articule ici encore sur l'uniformité.

C'est bien ce que Chasles souligne dans la situation. De plus, une modification dans l'agencement des théorèmes a dégagé le théorème de Menelaus et quelques autres et les a mis au service de la constitution d'un corps de doctrine : ordre et uniformité se manifestent désormais au sein d'un ensemble de théorèmes.

En suivant un simple théorème, nous avons donc mis en évidence les différentes ouvertures sur la question de la généralité vers lesquelles pointe l'œuvre géométrique de Carnot. Les mathématiciens ultérieurs poursuivront cette réflexion, en ce qui concerne figures et constructions, théorèmes et démonstrations. L'œuvre de Poncelet, comme celle de Chasles, est clairement traversée par ces interrogations. Il faudrait, afin de préciser l'évolution de cette problématique, approfondir l'examen non pas seulement de l'ensemble des écrits de Carnot, mais des productions de ses contemporains géomètres, aussi bien en France que dans les autres pays⁴³. Nous nous réservons de revenir dans le futur sur cette question.

La notion de transversale sera appelée à jouer, dans ce contexte, un rôle important. Évoquons par exemple, en guise de conclusion, la manière dont Chasles utilisera cet élément géométrique comme une « indéterminée » : un théorème impliquant plusieurs transversales dont la position reste indéfinie, sera susceptible, par le biais de choix particuliers des positions, de se transformer en une foule de différents théorèmes connus. C'est ainsi que Chasles fait apparaître entre l'hexagramme mystique de Pascal, les théorèmes de Newton sur la description organique des courbes, celui de Desargues sur l'involution de six points [...] des relations qui sont celles de cas particuliers à la même situation générale⁴⁴.

Tant pour ce qui est de cette généralité, que pour ce qui est des

⁴² Poncelet [1822, p. xxvii–xxviii] accepte de lever la critique qu'il adresse à la géométrie ordinaire de manquer de « méthode uniforme et directe », entre autres pour les « principes de la Théorie des transversales ».

⁴³ Nous savons qu'entre autres, en Allemagne, la réaction positive de Gauss aux travaux de Carnot ont conduit à la traduction presque immédiate de la *Géométrie de position* [Chemla 1990].

⁴⁴ Voir l'*Aperçu historique* [Chasles 1837, p. 338–9].

nouveaux modes d'organisation des connaissances, de l'uniformité ou de la liaison des propositions entre elles, en quelques décennies, sur tous ces plans qui semblaient l'apanage des traitements analytiques, les géomètres gagneront la certitude de s'être définitivement démarqués de la géométrie des anciens.

BIBLIOGRAPHIE

BELHOSTE (Bruno)

- [1998] De l'École polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet, *Bulletin de la SABIX*, (1998), p. 9–29.

BELHOSTE (Bruno) et TATON (René)

- [1992] L'invention d'une langue des figures dans [Dhombres 1992], p. 269–303.

BOSSUT (Charles)

- [1800] *Cours de mathématiques, géométrie et application de l'algèbre à la géométrie*, nouvelle édition, t. II, Paris, 1800.

BRIANCHON (Charles Julien)

- [1817] *Mémoire sur les lignes du second ordre*, faisant suite aux recherches publiées dans les journaux de l'École royale polytechnique, Paris, 1817.

CARNOT (Lazare)

- [1800] Lettre du cit. Carnot, membre de l'Institut national, ministre de la guerre, au cit. Bossut, membre de l'Institut national, examinateur du Corps du génie, 30 fructidor an 8 de la République française, parue en annexe de [Bossut 1800], p. 401–421.

- [1801] *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris, 1801.

- [1803] *Géométrie de position*, Paris, 1803.

- [1806] *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace suivi d'un essai sur la théorie des transversales*. Un appendice leur est adjoint : *Digression sur la nature des quantités dites négatives*, Paris, 1806.

CHARNAY (Jean-Pierre)

- [1984–85] *Lazare Carnot. Révolution et mathématiques*, introduction de J.-P. Charnay, Paris : Éditions de l'Herne, tome 1, 1984; tome 2, 1985.

- [1990] (dir.) *Lazare Carnot ou le savant-citoyen*, Paris : Presses de l'Université de la Sorbonne, 1990.

CHASLES (Michel)

- [1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science : la dualité et l'homographie*, Bruxelles : M. Hayez, 1837. Réimpression de l'*Aperçu historique...* : Paris : Éditions Jacques Gabay, 1989. Rééditions : Paris : Gauthier-Villars et fils, 1875, 1889. Nous citons l'ouvrage d'après l'édition de 1889.

- [1870] *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, publication faite sous les auspices du ministère de l'Instruction publique, Paris : Imprimerie nationale, 1870.

- CHEMLA (Karine)
 [1990] Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot, dans [Charnay 1990], p. 525–41.
 [1994] Le rôle joué par la sphère dans la maturation de l'idée de dualité au début du XIX^e siècle. Les articles de Gergonne entre 1811 et 1827, *Actes de la quatrième université d'été d'histoire des mathématiques*, Lille, 1990, Lille : IREM, 1994, p. 57–72.
- CHEMLA (Karine) et PAHAUT (Serge)
 [1988] Préhistoires de la dualité : explorations algébriques en trigonométrie sphérique, 1753–1825, dans Rashed (R.), éd., *Sciences à l'époque de la révolution*, Paris : Librairie A. Blanchard, 1988, p. 149–200.
- COLLECTIF
 [1964] *L'œuvre scientifique de Pascal*, Paris : Presses Universitaires de France, 1964.
- DHOMBRES (Jean) (dir.)
 [1992] *L'École normale de l'an III. Leçons de mathématiques. Laplace-Lagrange-Monge*, Paris : Dunod, 1992.
- DHOMBRES (Jean et Nicole)
 [1997] *Lazare Carnot*, Paris : Librairie Arthème Fayard, 1997.
- GERGONNE (Joseph-Diaz)
 [1827] Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous ordres, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1827), p. 214–228.
- GILLISPIE (Charles Coulston)
 [1971] Carnot, dans Gillispie (C.C.) éd., *Dictionary of Scientific Biography*, t. III (1971), p. 70–79.
 [1979] (avec A.P. Youschkevitch) *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris : Vrin, 1979.
 [1994] Préface à la réimpression de [Reinhard 1951–52], Paris : Hachette, 1994.
- KLEIN (Felix)
 [1926–7] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, 2 vol., Berlin : Springer, tome 1, 1926; tome 2, 1927.
- KÖTTER (Ernst)
 [1901] *Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt* (1847), Leipzig : Teubner, 1901.
- LACROIX (Sylvestre-François)
 [1797–98] *Traité du calcul différentiel et intégral*, 2 tomes, Paris, 1797–98.
- LAGRANGE (Joseph-Louis)
 [Œuvres] *Œuvres de Lagrange*, publiées par J. Serret, Paris : Gauthier-Villars, 1867–1892.
 [1798–99] Solutions de quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une analyse complète de ces triangles, *Journal de l'École polytechnique*, 6^e cahier, 2, Thermidor an VII (1798–99), p. 270–96; *Œuvres*, 7, p. 331–359.
- MONGE (Gaspard)
 [1799] *Géométrie descriptive, Leçons données aux Écoles normales de l'an 3 de la République, Paris 1799*; réimprimé à Paris : Éditions Jacques Gabay, 1989; édition critique et commentée, avec une introduction, par Bruno Belhoste et René Taton, dans [Dhombres 1992], p. 267–459.
- PASCAL (Blaise)
 [1640] *Essay pour les coniques*, 1640; in [Taton 1951b], p. 190–194.

PONCELET (Jean-Victor)

[1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris, 1822

[1862–1864] *Applications d'analyse et de géométrie qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, 2 tomes; tome 1, Paris : Mallet-Bachelier, 1862 ; tome 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.

REINHARD (Marcel)

[1951–52] *Le grand Carnot*, Paris : Hachette, 1951, 1952; réimprimé, avec une préface de C.C. Gillispie (viii p.), Paris : Hachette, 1994.

SAKAROVITCH (Joël)

[1989] Théorisation d'une pratique, pratique d'une théorie. Des traités de la coupe des pierres à la géométrie descriptive, travail de fin d'études, École d'architecture de Paris La Villette, Paris, 1989.

[1998] *Épures d'architecture. De la coupe des pierres à la géométrie descriptive XVI^e–XIX^e siècles*, Bâle : Birkhäuser, 1998.

TATON (René)

[1951a] *L'œuvre scientifique de Monge*, Paris : Presses Universitaires de France, 1951.

[1951b] *L'œuvre mathématique de G. Desargues. Textes publiés et commentés avec une introduction biographique et historique*, Paris : Presses Universitaires de France, 1951; seconde édition mise à jour, second tirage avec une post-face inédite, Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 1988.

[1964] L'École polytechnique et le renouveau de la géométrie analytique, dans *L'aventure de l'esprit, mélanges offerts à Alexandre Koyré*, Paris : Hermann, 1964, vol. I, p. 552–564