Revue d'histoire des mathématiques,
4 (1998), p. 73–129.

DE LAMBERT À CAUCHY : LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS LITTÉRALES PAR LE MOYEN DES SÉRIES

Jean-Pierre LUBET (*)

RÉSUMÉ. — En 1770, Lagrange démontre la formule qui porte son nom et qui donne, sous forme de série, l'expression de la racine d'une équation algébrique ou transcendante. La formule elle-même et la méthode de démonstration sont significatives du style et de la pensée de l'auteur de la *Théorie des fonctions analytiques.* De nombreuses études sont consacrées ensuite à ce théorème de Lagrange par d'autres mathématiciens. Elles portent la trace de préoccupations ou d'exigences particulières à leurs auteurs. Elles accompagnent parfois des tentatives théoriques plus ambitieuses. Laplace étudie la convergence des séries que le théorème de Lagrange permet d'obtenir pour la résolution du *problème de Kepler.* Mais ces travaux restent d'abord tributaires des mêmes conceptions, selon lesquelles les fonctions sont identifiées à des développements en séries formelles. Cauchy remet en cause ce point de vue, et c'est un bouleversement profond qui intervient en 1831 lorsqu'il reprend le problème avec les moyens dont il dispose dans le cadre des fonctions de variable imaginaire.

ABSTRACT. — FROM LAMBERT TO CAUCHY : SOLVING EQUATIONS BY MEANS OF SERIES. — In 1770, Lagrange proved the formula bearing his name which expresses the root of an algebraic or transcendental equation as a series. The formula in itself, as well as the method of proof, are representative of the style and thought of the author of the *Théorie des fonctions analytiques.* Afterwards several studies were devoted to *Lagrange's theorem* by other mathematicians. They bore the mark of their authors' particular concerns or demands. Occasionally they conveyed more ambitious theoretical attempts. When solving *Kepler's problem*, Laplace studied the convergence of the series deduced from *Lagrange's theorem.* But, at first, these studies depended on the same conceptions, according to which functions were identified with formal series expansions. In 1831 a profound mutation occured when, calling this point of view into question, Cauchy took up the problem and deployed the tools he had at his disposal in the framework of complex functions.

(*) Texte reçu le 4 septembre 1996, révisé le 18 mars 1998.
Jean-Pierre LUBET, 7 allée du Tardenois, 59650 Villeneuve d'Ascq (France).

INTRODUCTION

Les 18 janvier et 5 avril 1770, Lagrange lit devant l'Académie des sciences de Berlin la « nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries ». Le titre du mémoire précise bien la nature du problème traité :

- il s'agit d'exprimer les solutions des équations au moyen de séries ;
- les équations sont écrites *a priori* à l'aide de coefficients littéraux

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \cdots = 0.$$

La problématique qui s'y exprime est nettement distincte de celle que l'on trouve dans d'autres travaux publiés par Lagrange à des dates voisines. En 1769 et 1770, deux mémoires concernaient notamment la recherche d'approximations pour les racines des équations algébriques. L'outil essentiel y était constitué par les fractions continues. En 1772, avec les « Réflexions sur la résolution algébrique des équations », se trouvera concernée la résolution des équations au moyen de radicaux.

En 1770, Lagrange entend résoudre aussi bien des équations algébriques (dans l'écriture précédente, les points de suspension représentent un nombre fini de termes) que des équations transcendantes (le premier membre est alors constitué des termes, en nombre infini, d'une série). Le résultat essentiel est donné par la formule, appelée précisément *formule de Lagrange*, et qui exprime les solutions au moyen d'une série.

Dans le chapitre consacré aux séries au XVIII^e siècle et inclus dans le quatrième volume de l'histoire de Moritz Cantor [1908], E. Netto — qui en est l'auteur — commence par marquer l'embarras dans lequel il se trouve pour rattacher son sujet à tel ou tel domaine des mathématiques. Pour preuve de l'omniprésence des séries, il cite la *formule de Lagrange*, laquelle touche à la fois au calcul différentiel, à la théorie des séries, à l'algèbre et à la combinatoire. Il aurait pu ajouter que Lagrange l'a très vite exploitée pour exprimer la forme des solutions du problème de Kepler [Lagrange 1771a]. Elle jouera un rôle dans la *Mécanique céleste* de Laplace et ce sont les applications à ce domaine qui fourniront à Cauchy l'occasion d'élaborer sa propre démonstration de la formule.

Cette démonstration utilise les principaux concepts — intégrales, résidus — dont Cauchy dispose déjà dans le cadre des fonctions de variable imaginaire et dont il fait usage dans des méthodes de majoration qui constituent le « calcul des limites ». Elle a pu être simplifiée et raccourcie par les interventions d'autres mathématiciens du XIXe siècle. Mais quant aux principes, elle forme aujourd'hui encore la base de ce que l'on peut trouver, en la matière, dans les traités d'analyse[1]. Avant Cauchy, de nombreux autres mathématiciens se sont intéressés à la démonstration de cette formule. Ces recherches n'ont pas laissé dans les mathématiques actuelles des traces aussi évidentes. Mais alors quelle a été leur portée ? Comment est-elle décrite par les historiens des mathématiques ? Avant d'énoncer le résultat obtenu par Lagrange, E. Netto précise que ce dernier «*parvient — sans donner une démonstration de son résultat — à l'importante formule qui, en tant que "formule de réversion de Lagrange", porte son nom*»[2]. Jean Itard évoque l'engouement suscité par la découverte de Lagrange chez Euler, Lexell, d'Alembert, Condorcet, puis il précise : «*les "démonstrations" qu'en donnent Lagrange et ses émules ne sont guère fondées que sur une induction. Laplace en fournira une meilleure preuve*» [Itard 1984, p. 321] ; puis, après avoir nommé d'autres mathématiciens que la formule a occupés dans les années qui ont suivi, il cite un dernier nom : «*Cauchy en étudiera de près les conditions de convergence, complètement passées sous silence par l'inventeur* [...]» [*Ibid.*].

L'article qui suit a pour but d'étudier la formule de Lagrange en prenant les années 1758 et 1841 comme limites chronologiques. En effet, dès 1758 Lambert avait donné un résultat qui, dans le cas particulier des équations trinômes, peut être considéré comme annonciateur de la formule de Lagrange ; en 1841 Cauchy a fait imprimer un mémoire donnant les détails de la méthode présentée, quelque dix années auparavant, à Turin. Sans prétendre à l'exhaustivité, cet article concerne un aspect de l'activité mathématique qui, dans cette période, a été loin d'être marginal. Comment caractériser les travaux de Lagrange et de ses successeurs immédiats ? Quel rôle y joue l'induction ? Peut-on vraiment dire que Lagrange ne se préoccupe pas de convergence ? Les réponses de J. Itard et E. Netto à ces questions éveillent plus qu'elles n'assouvissent notre curiosité, car elles sont sûrement trop rapides et, surtout, elles restent

[1] On peut consulter [Whittaker et Watson 1920, p. 132–133] ou [Dieudonné 1986b, p. 250].

[2] «*Dabei gelangt er, ohne einen Beweis für sein Resultat zu geben, zu der wichtigen Formel, die als "Lagrangesche Umkehrungsformel" seinen Namen trägt*» [Cantor 1908, p. 258].

à l'extérieur de la problématique propre à ces différents travaux. Une confrontation plus poussée avec les textes eux-mêmes conduit à des constats plus précis et plus nuancés. Nous essaierons de les situer dans leur contexte théorique, de saisir, quand cela est possible, les évolutions, de noter les domaines mathématiques dans lesquels ils restent contenus ou au contraire de repérer les frontières qu'ils traversent. L'apport de Cauchy pourra alors apparaître avec ses diverses composantes : prise en compte des travaux de ses prédécesseurs, réflexion critique sur leurs principes, élaboration des concepts constituant un ensemble théorique renouvelé.

1. LES MODALITÉS ET LE SENS D'UNE DÉCOUVERTE

1.1. L'apparition de la formule de Lagrange dans le Supplément *de l'*Encyclopédie

En 1776 paraît le premier tome du *Supplément* à l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert. L'article *approximation* est signé de Condorcet. L'une des rubriques de cet article présente «*une méthode d'avoir les valeurs approchées des racines d'une équation algébrique déterminée*». Pour une équation, d'inconnue x, écrite sous la forme

$$y - x + \varphi(x) = 0, \tag{1}$$

l'objectif est de chercher «*un moyen général de réduire la valeur de x en série*». Pour une fonction ψ donnée, quelques indications de calcul[3] couvrent à peine une colonne avant d'aboutir à la formule de Lagrange

$$\psi(x) = \psi(y) + \frac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(y) + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2} + \cdots. \tag{2}$$

[3] Les notations adoptées ici ne sont pas exactement celles de Condorcet ; en particulier, une fidélité plus complète au texte de Condorcet amènerait à écrire le résultat final à l'aide des symboles $\mathrm{d}\psi(y)$ au lieu des quotients différentiels $\mathrm{d}\psi(y)/\mathrm{d}y$.

Le point de départ est constitué par la formule de Taylor appliquée à la fonction pour les valeurs de la variable égales à y d'une part, et à $y+\varphi(x)=x$ d'autre part[4]

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(x)+\frac{\mathrm{d}^2\varphi(y)}{2\,\mathrm{d}y^2}\,\big[\varphi(x)\big]^2+\cdots. \tag{3}$$

Condorcet va en déduire la relation

$$\varphi(x)=\varphi(y)+\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2}+\cdots. \tag{4}$$

L'objectif est donc de faire « disparaître » l'inconnue x du second membre de la relation (3). Le texte est sous-tendu par l'idée que l'on peut trouver une suite de fonctions $A_k(y)$ telles que chaque différence $\varphi(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(y)=R_n(x,y)$ puisse s'exprimer par des puissances de $\varphi(y)$ d'un ordre supérieur à n. L'expression de $\varphi(x)$ pourra donc être mise sous la forme

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(y)+R_n(x,y). \tag{5}$$

La présence de l'inconnue sera ainsi restreinte à un « reste » $R_n(x,y)$ dont tous les termes seront de « degré » supérieur à n par rapport à $\varphi(y)$. Et finalement, $\varphi(x)$ sera identifiée à la série $\sum\limits_{k=0}^{n}A_k(y)$. Deux étapes seulement sont décrites. La première est franchie en posant $\varphi(x)=\varphi(y)+B$ et en reportant cette expression dans le second membre de la relation (3); l'examen de ce second membre conduit à poser $A_1(y)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}$. Le procédé est utilisé une seconde fois avec $\varphi(x)=\varphi(y)+\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}[\varphi(y)]^2}{\mathrm{d}y}+C$; il permet de trouver $A_2(y)=\dfrac{1}{2\cdot 3}\,\dfrac{\mathrm{d}^2[\varphi(y)]^3}{\mathrm{d}y^2}$. La complexité des calculs augmente vite, mais la simplicité du résultat ouvre la voie à une

[4] Condorcet utilise la dénomination de *théorème de d'Alembert* à son propos, en raison, sans doute, de la démonstration donnée par d'Alembert dans les *Recherches sur différents points importants du système du monde* [1754, tome 1, p. 50]; c'est seulement à l'article *équation* de l'*Encyclopédie méthodique*, que le théorème sera attribué à Taylor.

généralisation qui est suggérée par les points de suspension de la formule (4).

La formule de Taylor appliquée à la fonction ψ entre les valeurs y et $y+\varphi(x)=x$ de la variable s'écrit

$$\psi(x)=\psi(y)+\frac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(x)+\frac{\mathrm{d}^2\psi(y)}{2\,\mathrm{d}y^2}\big[(\varphi(x)\big]^2+\cdots.$$

Finalement, Condorcet est à même d'y remplacer non seulement $\varphi(x)$, mais aussi $[\varphi(x)]^2$, $[\varphi(x)]^3,\ldots$ par leur expression en fonction de y. Un changement dans l'ordre de sommation des séries permet d'obtenir la formule (2), objectif ultime du calcul.

Il faut revenir sur les principes formels que nous avons décrits et qui visent à écrire une relation du type $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}A_k(y)+R_n(x,y)$. Ils montrent une parenté avec des méthodes utilisées par Newton. Soit y la somme d'une série : $y=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$; le problème connu au XVII^e^ siècle sous le nom de *retour des suites* consiste à chercher une expression de x sous forme d'une série entière $x=\sum_{k=1}^{\infty}b_ky^k$. Dans l'une des méthodes employées par Newton[5], les coefficients b_k de cette série sont successivement obtenus en exprimant x en fonction de y sous la forme $x=\sum_{k=1}^{n}b_ky^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_{k,n}x^k$. En particulier, Newton obtient ainsi les cinq premiers termes du développement de la fonction sinus à partir du développement de la fonction arcsinus. En se fondant sur les analogies présentées par ces premiers termes, il donne ensuite les indications permettant d'écrire le terme général de la série[6]. Dans la lettre à Oldenburg du 26 octobre 1676 de tels exemples numériques sont suivis d'un théorème où Newton donne l'expression littérale des cinq premiers termes b_k en fonction des cinq premiers termes a_k de la série initiale : cette fois, aucune analogie n'apparaît et donc aucune voie ne s'ouvre qui puisse conduire à l'expression du terme général b_k [*Correspondence* II, p. 146].

Le calcul de Condorcet repose sur des principes formels voisins, il possède avec le calcul de Newton un autre caractère commun : pour

[5] Voir « De analysi per aequationes infinitas » [Newton, *Works* III, p. 206–247].

[6] « *Hic obiter, q^d^ 5 vel 6 terminis istarum radicum cognitis, eas plerumque ex analogia observata poteris ad arbitrarum producere* » [Newton, *Works* II, p. 236].

chaque valeur de k, la détermination du terme de rang k s'appuie sur les résultats obtenus pour les coefficients de rang inférieur, et le volume de calculs croît très rapidement lorsque le rang augmente. Par rapport aux calculs de Newton, ceux de Condorcet présentent évidemment un élément nouveau : même dans le cas d'une équation écrite *a priori* sous forme générale, les premiers termes obtenus montrent assez de régularité pour que l'on puisse en induire la forme du terme général.

Dans l'*Encyclopédie* elle-même, la résolution, par les séries, d'équations faisant intervenir des coefficients littéraux relevait essentiellement de deux articles. L'un concernait le *retour des suites*, dont nous venons d'évoquer la problématique. Le second était l'article *parallélogramme.* D'Alembert y exposait un algorithme que Newton a aussi révélé dans la *lettre à Oldenburg du 26 octobre 1776.* Si l'équation initiale est notée $P(x, y) = 0$, la méthode[7] met en évidence une suite de coefficients a_k telle que le développement de $P\big(x, \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\big)$ ne contient que des termes de degré supérieur à n.

Retour des suites et *règle du parallélogramme* : les deux méthodes ont pu faire l'objet, après Newton, de diverses modifications de détail. Mais leurs principales caractéristiques ont subsisté : elles permettent de mettre en évidence le début des développements en série, mais le calcul de chaque terme repose sur la détermination préalable de tous ceux qui le précèdent, la forme du « terme général » de la série reste le plus souvent masquée ; la complexité des calculs se trouve accrue dès que les équations mettent en jeu des paramètres *littéraux.* Comparée à ces procédures, la formule de Lagrange présente des avantages, que Lagrange énumère dans les premières lignes de son mémoire [Lagrange 1770b].

1.2. Lagrange et le mémoire de 1770

Certains de ces avantages nous sont déjà apparus à travers l'article de Condorcet. Il faut en compléter la liste : la méthode permet d'obtenir toutes les racines de l'équation (et non une seule) ; en donnant l'expression du terme général des séries utilisées, elle ouvre la voie à l'étude de la

[7] En même temps qu'à une série entière, le calcul peut conduire à des séries où x intervient par l'intermédiaire de puissances rationnelles. La méthode sera aussi désignée sous le nom de *polygone de Newton*, en référence à l'enveloppe convexe qui sert à la résolution. Lire [Chabert 1993, p. 220–225]. De Gua [1740] et Cramer [1750] parlent de *triangle analytique.*

convergence ; enfin, elle s'applique aux équations algébriques, mais aussi aux équations *transcendantes*.

L'*équation générale* est notée

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \cdots. \tag{6}$$

L'usage des points de suspension permet de mener les calculs sans avoir à préciser si le second membre est une série ou un polynôme. Puis Lagrange note $p, q, r, \ldots$ les racines et, selon une pratique que l'on trouve aussi chez Euler, il en tire l'identité

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \cdots = a\Big(1 - \frac{x}{p}\Big)\Big(1 - \frac{x}{q}\Big)\Big(1 - \frac{x}{r}\Big)\cdots$$

qui s'écrit encore, en divisant les deux membres par bx et en changeant les signes

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \cdots}{b} = \frac{a}{bp}\Big(1 - \frac{p}{x}\Big)\Big(1 - \frac{x}{q}\Big)\Big(1 - \frac{x}{r}\Big)\cdots.$$

« *Donc, prenant les logarithmes de part et d'autre* » [Lagrange, *Œuvres* III, p. 14]

$$\log\Big(1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \cdots}{b}\Big) = \log\frac{a}{bp} + \log\Big(1 - \frac{p}{x}\Big) + \log\Big(1 - \frac{x}{q}\Big) + \log\Big(1 - \frac{x}{r}\Big)\cdots.$$

En posant $\xi = \dfrac{cx - dx^2 + ex^3 - \cdots}{b}$, le premier membre de cette relation est transformé en

$$\log\Big(1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \cdots}{b}\Big) = \log\Big(1 - \frac{a}{bx}\Big) + \log\Big(1 - \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}}\Big).$$

En tenant compte de ce résultat, Lagrange peut développer en série les deux membres de l'identité dont il est parti [*Ibid.*, p. 18]

$$\begin{aligned}\frac{a}{bx} + \frac{a^2}{2b^2x^2} + \frac{a^3}{3b^3x^3} + \cdots + \frac{\xi}{1 - \frac{a}{bx}} &\\ + \frac{\xi^2}{2\Big(1 - \frac{a}{bx}\Big)^2} + \frac{\xi^3}{3\Big(1 - \frac{a}{bx}\Big)^3} + \cdots &\\ = \log\frac{bp}{a} + \frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \frac{p^3}{3x^3} + \cdots + x\Big(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \cdots\Big) &\\ + \frac{x^2}{2}\Big(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \cdots\Big) + \frac{x^3}{3}\Big(\frac{1}{q^3} + \frac{1}{r^3} + \cdots\Big) + \cdots. &\end{aligned}$$

L'objectif est le calcul, par identification, du coefficient p^m/m de $1/x^m$ présent au second membre. Il faut donc passer par le calcul du coefficient de $\dfrac{1}{x^m}$ dans le développement en « série de Laurent » de $\dfrac{\xi^i}{i\Big(1-\dfrac{a}{bx}\Big)^i}$. Le développement des ξ^i (polynômes ou séries suivant la nature de l'équation initiale) est donné *a priori* [*Ibid.*, p. 18]

$$\xi^i = \varpi_{i,0} + \varpi_{i,1}x + \varpi_{i,2}x^2 + \varpi_{i,3}x^3 + \cdots.$$

Ces développements sont respectivement multipliés par des séries en $1/x$ qui expriment les facteurs de type $\dfrac{1}{\Big(1-\dfrac{a}{bx}\Big)^i}$, selon le modèle suivant

$$(7)\quad \xi^i \frac{1}{i\Big(1-\dfrac{a}{bx}\Big)^i} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty}\varpi_{i,k}x^k\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}A_n\frac{1}{x^n}\Big)$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\varpi_{i,k}A_{m+k}\Big)\frac{1}{x^m} + \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=m}^{\infty}\varpi_{i,k}A_{k-m}\Big)x^m.$$

En réalité Lagrange écrit les trois expressions $\dfrac{\xi^i}{\Big(1-\dfrac{a}{bx}\Big)^i}$ obtenues pour $i = 1, 2, 3$, et dans chacune d'elles, il n'écrit que les coefficients de x^0, x^{-1}, x^{-2}. Puis il passe à l'écriture de p, de p^2 et de p^3. Par exemple, le dernier de ces développements est d'abord écrit avec neuf termes

$$p^3 = \frac{a^3}{b^3} + 3\Big(\varpi_{1,0}\frac{a^3}{b^3} + \varpi_{1,1}\frac{a^4}{b^4} + \varpi_{1,2}\frac{a^5}{b^5} + \cdots\Big)$$
$$+ \frac{3}{2}\Big(4\varpi_{2,0}\frac{a^3}{b^3} + 5\varpi_{2,1}\frac{a^4}{b^4} + 6\varpi_{2,2}\frac{a^5}{b^5} + \cdots\Big)$$
$$+ \frac{3}{2\cdot 3}\Big(4\cdot 5\varpi_{3,0}\frac{a^3}{b^3} + 5\cdot 6\varpi_{3,1}\frac{a^4}{b^4} + 6\cdot 7\varpi_{3,2}\frac{a^5}{b^5} + \cdots\Big).$$

Ces développements sont interprétés à l'aide de quotients différentiels : «*il est facile de voir qu'on aura, en faisant* $x = a/b$» [*Ibid.*, p. 21]

$$p^3 = x^3 + 3\Big[\xi x^3 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\xi^2x^4)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\mathrm{d}^2(\xi^3x^5)}{\mathrm{d}x^2} + \cdots\Big],$$

et ils sont immédiatement généralisés : «*et, en général*

$$p^m = x^m + m\Big[\xi x^m + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(\xi^2x^{m+1})}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\mathrm{d}^2(\xi^3x^{m+2})}{\mathrm{d}x^2} + \cdots\Big]»$$

[*Ibid.*, p. 21]. Pour mettre le résultat sous sa forme définitive, il restera à revenir sur l'écriture de l'équation initiale (6) ; compte tenu de la définition de ξ, cette équation peut s'écrire

$$a - bx + xb\xi = 0.$$

En posant $\varphi(x) = x\xi$ et $\alpha = a/b$, on la transforme en

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0.$$

Et Lagrange poursuit : «*si l'on dénote par p une racine de l'équation proposée, on aura* [...],

$$p^m = x^m + m\Big[x^{m-1}\varphi(x) + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}x^{m-1}[\varphi(x)]^2}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2x^{m-1}[\varphi(x)]^3}{\mathrm{d}x^2} + \cdots\Big],$$

en faisant, après les différentiations, $x = \alpha$» [*Ibid.*, p. 25].

Enfin, on peut remarquer que $mx^{m-1} = \dfrac{\mathrm{d}(x^m)}{\mathrm{d}x}$, puis si l'on considère toute fonction comme une somme de monômes $a_m x^m$, il est facile de conclure : «*une fonction quelconque de p, comme* $\psi(p)$, *sera exprimée de la manière suivante*

$$(8)\quad \psi(p) = \psi(x) + \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\,\varphi(x) + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\,[\varphi(x)]^2}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2\cdot 3}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\,[\varphi(x)]^3}{\mathrm{d}x^2} + \cdots$$

pourvu qu'on change, comme nous l'avons dit, x *en* α *après avoir exécuté les différentiations indiquées,* ...» [*Ibid.*, p. 25].

Les détails du calcul dans lesquels nous sommes entrés ci-dessus permettent de souligner plusieurs aspects de la démonstration de Lagrange. L'interprétation des résultats au moyen de quotients différentiels joue un rôle décisif. Les calculs ne sont effectivement présentés que pour les premiers termes des séries, mais avec un peu de patience, un lecteur moderne peut en saisir la structure et les transcrire sur des indices généraux pour obtenir le développement de p^m. De ce point de vue, la légitimité de l'induction semble mieux assurée ici que dans le calcul de Condorcet. Par contre les coefficients des séries de Laurent utilisés dans les étapes intermédiaires, par exemple dans la formule (7), sont eux-mêmes des sommes de séries dont la convergence n'est pas assurée. La transposition de ces calculs dans le cadre actuel des séries formelles ne paraît guère possible.

Mais Lagrange a aussi annoncé que la formule ainsi obtenue permet d'atteindre *toutes* les racines de l'équation initiale

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \cdots = 0.$$

Dans ce but, il procède à une classification *a priori* des racines. La première racine s'annule quand $a = 0$; la seconde racine est alors, parmi celles qui restent, celle qui s'annule quand $b = 0$. Ainsi l'équation initiale peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{b}{c} - x - \frac{a}{cx} + \frac{dx^2 - ex^3 + \cdots}{c} = 0.$$

On pose alors $\varphi(x) = -\dfrac{a}{cx} + \dfrac{dx^2 - ex^3 + \cdots}{c}$ et $\psi(x) = x$; la formule (8) donne avec des notations modernes

$$p = \Big[x + \varphi(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i\,!}\, \frac{\mathrm{d}^{i-1}[\varphi(x)]^i}{\mathrm{d}x^{i-1}}\Big]\Big|_{x=\frac{b}{c}}$$

et l'on constate que l'expression obtenue pour $a = 0$ vient à s'annuler si l'on fait ensuite $b = 0$; il s'agit donc de la deuxième racine. L'écriture de l'équation sous la forme

$$\frac{c}{d} - x + \frac{a - bx}{dx^2} + \frac{ex^2 - fx^3 + \cdots}{d} = 0$$

conduira à la troisième racine. D'une façon générale, la prise en considération de chaque nouveau couple de coefficients consécutifs dans l'équation (6) conduit chaque fois à une nouvelle racine et, si l'équation est de degré m, les m racines seront ainsi obtenues.

Si l'équation donnée est *lacunaire*, un choix convenable des fonctions φ et ψ permet encore de trouver toutes les racines. Au passage, Lagrange retrouve un théorème de J.-P. de Gua [1744, p. 463] : lorsque, dans l'équation initiale, les termes situés entre Mx^{μ} et $-Nx^{\mu+\nu}$ viennent à manquer, il s'introduit au moins autant de racines imaginaires qu'il s'en présente dans l'équation

$$M - Nx^{\nu} = 0$$

formée avec les deux termes entre lesquels manquent des coefficients.

Enfin, l'utilisation de la fonction *multiforme* $\psi(t) = \sqrt[n]{t}$ permet à Lagrange de réunir dans une seule expression toutes les racines d'une équation de degré n. Se trouve ainsi réalisé, par le moyen des séries, l'un des objectifs que Tschirnhaus s'était assignés dans le domaine de la résolution algébrique[8].

1.3. Le cas des équations trinômes et la priorité de Lambert

Cependant, Lagrange n'est pas le premier mathématicien à publier des résultats concernant le développement en série des racines d'une équation. À propos de l'équation

$$a - bx + cx^n = 0, \tag{9}$$

il donne, dans le mémoire de 1770, un résultat intermédiaire et il indique précisément : la formule «*a déjà été trouvée par M. Lambert, qui me l'a communiquée il y a quelque temps sans démonstration*» [Lagrange, *Œuvres* III, p. 22]. Lambert a en effet publié à Bâle, en 1758, un mémoire dont le résultat le plus surprenant concerne le développement en série des racines d'équations telles que (9). Deux approches de cette question y sont données.

Lambert rappelle d'abord une propriété connue : si l'on désigne par S_m la somme des puissances d'ordre m des racines d'une équation algébrique, le rapport S_m/S_{m-1} tend vers la plus grande des racines, lorsque m tend vers l'infini. Dans le cas de l'équation

$$x^2 - ax + b = 0,$$

Lambert donne explicitement, en fonction de a et b, les sommes S_m pour les entiers m allant de 1 à 8, selon des formules dites de Newton, puis il indique, sans plus d'explication, l'expression de S_m (qu'il note $\int r^m$) «*En général*

$$\begin{aligned}\textstyle\int r^m = a^m - ma^{m-2}b + m\frac{m-3}{2}a^{m-4}b^2 - m\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}a^{m-6}b^3 \\ + m\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}a^{m-8}b^4 - etc.\end{aligned}$$

[8] Tschirnhaus s'était posé en 1683 le problème de ramener toute équation algébrique de degré n à la forme $y^n = M$ et donc d'exprimer les racines à l'aide de $\sqrt[n]{M}$. Cette démarche est analysée par Lagrange dans les « Réflexions sur la résolution algébrique des équations» [Lagrange 1772, p. 230–232].

d'où la valeur de la plus grande racine

$$x = \frac{\int r^m}{\int r^{m-1}} = \frac{a^m - ma^{m-2}b + m\,\frac{m-3}{2}\,a^{m-4}b^2 - etc.}{a^{m-1} - (m-1)a^{m-3}b + (m-1)\,\frac{m-4}{2}\,a^{m-5}b^2 - etc.}$$

ou en faisant effectivement la division

$$x = a - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^3} - \frac{2b^3}{a^5} - \frac{5b^4}{a^7} - \frac{14b^5}{a^9} - etc.\text{»}\,[9].$$

On notera l'ambiguïté du signe *etc.* : il désigne un nombre *fini* de termes dans les formules de Newton donnant $\int r^m$ ou $\int r^{m-1}$, et le rapport de ces deux expressions ne donne pas encore la racine x cherchée ; celle-ci est obtenue *après* la division, et pour la dernière ligne de calcul, le *etc.* désigne les termes, en nombre infini, d'une série. Pour Lambert, la lettre m peut tour à tour désigner un nombre *fini* et un nombre *infini*.

Une deuxième approche se termine par l'indication d'un développement en série pour l'équation

$$x^m + px = q. \tag{10}$$

Lambert décrira sa démarche dans un mémoire ultérieur (« Observations analytiques », publié à Berlin en 1772). La mise en œuvre de méthodes d'approximation élémentaires aurait mis en évidence des encadrements successifs des racines ; et il en aurait déduit des développements en série pour la racine la plus grande, ou la plus petite, d'équations trinômes du second ou du troisième degré. Puis, il aurait étendu le résultat : «*Les séries qui exprimaient une des racines étaient fort simples, et je vis qu'elles conservaient la même forme lorsqu'il s'agissait de la racine d'un trinôme quelconque*

$ax^\kappa + bx^\lambda = c$ » [Lambert, *Opera* II, p. 270–271].

En réalité le mémoire de 1758 ne donne explicitement[10] la démonstration des encadrements que pour une équation (10) correspondant à $m = 1$

---

[9] «*In genere* [...] *Unde valor radicis maioris erit* [...] *sive divisione actu institua* [...]» [Lambert, *Opera* I, p. 33].

[10] En 1772, Lambert suggère nettement que le mémoire *Observationes variae in mathesin puram* ne rend compte de son travail que de façon incomplète : «*La démonstration étant supprimée dans les* Acta Helvetica *et n'ayant pas mes papiers avec moi, je me mis à la retrouver...* » [Lambert, *Opera* II, p. 272].

ou $m = 2$. La formule la plus générale est donnée directement sous la forme

$$\begin{aligned}x = q : p - q^m : p^{m+1} + mq^{2m-1} : p^{2m+1}\\ - m\frac{3m-1}{2}q^{3m-2} : p^{3m+1}\\ + m\frac{4m-1}{2}\,\frac{4m-2}{3}q^{4m-3} : p^{4m+1}\\ - m\frac{5m-1}{2}\,\frac{5m-2}{3}\,\frac{5m-3}{4}q^{5m-4} : p^{5m+1}\\ + m\frac{6m-1}{2}\,\frac{6m-2}{3}\,\frac{6m-3}{4}\,\frac{6m-4}{5}q^{6m-5} : p^{6m+1} - etc.\end{aligned}$$

[Lambert, *Opera* I, p. 39].

Le mémoire de Lambert est novateur à plus d'un titre. Cependant, publié dans les *Acta Helvetica*, il ne semble guère avoir eu d'écho. À ce propos, A.P. Youschkevitch souligne que la revue suisse n'avait pas une large diffusion [Oberlé 1979, p. 219]. Ce sont des relations plus directes que Lambert a établies à Berlin avec Euler puis avec Lagrange qui vont jouer un rôle déterminant. Là encore le mémoire publié en 1772 fournit le propre témoignage de Lambert : en 1764, il attire l'attention d'Euler sur les séries qu'il a obtenues [Lambert, *Opera* II, p. 272]. Puis Lagrange remplace Euler à l'Académie de Berlin en 1766 et Lambert parle également à Lagrange de sa découverte [*Ibid.*, p. 273].

Dans le même mémoire de 1772, Lambert se dit stimulé dans ces recherches par l'espoir de passer des séries à «*une expression en termes finis de la racine du trinôme*» [*Ibid.*]. Entre-temps, c'est aussi vers la résolution algébrique des équations qu'Euler a orienté ses recherches. Dans un mémoire publié à Saint Petersbourg [Euler 1771], il considère d'abord une équation algébrique de degré quelconque, il exprime la somme des puissances des racines en fonction des coefficients de l'équation ; puis, comme chez Lambert et par un procédé peu argumenté, l'expression *finie* qui en résulte est prolongée en une série *infinie* qui doit représenter la puissance de la plus grande des racines. Cette série est d'abord exploitée dans le cas de l'équation trinôme. En particulier, pour l'équation

$$y^3 = 3by + a^3$$

Euler note S la somme de la série obtenue, elle se trouve considérée comme une fonction de la variable $u = b/a^2$. Des calculs sur les coefficients de la série montrent alors que cette fonction vérifie une équation différentielle. Puis la résolution de l'équation différentielle conduit, pour S, à une expression en termes finis, qui n'est autre que la formule de Cardan.

La même démarche aboutit à un résultat plus faible pour l'équation

$$y^4 = 4y - 3u.$$

1.4. De l'algèbre à la théorie des fonctions analytiques

Il faut considérer plus attentivement les rapports ainsi apparus entre les séries d'une part et la résolution algébrique des équations d'autre part. En ce qui concerne Lagrange, nous avons déjà cité le mémoire publié en 1772 : « Réflexions sur la résolution algébrique des équations ». Deux ans plus tard, le mémoire « Sur la forme des racines imaginaires des équations » [Lagrange 1774b] s'inscrit, comme le précédent, dans un cadre purement algébrique. Lagrange l'introduit justement en déclarant son insatisfaction à propos de la démonstration que d'Alembert a donnée en 1746[11] : «[*elle*] *est très ingénieuse et ne laisse, ce me semble, rien à désirer du côté de l'exactitude ; mais elle est indirecte, étant tirée de la considération des courbes et des suites infinies et elle porte naturellement à croire que l'on peut arriver au même but par une analyse plus simple, fondée uniquement sur la théorie des équations* » [Lagrange 1774b, p. 479]. Il est donc naturel d'examiner aussi de ce point de vue la « Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries ». L'objectif est de résoudre non seulement les équations algébriques mais aussi les équations transcendantes, et cette visée globale, à elle seule, justifie le recours aux séries. Cependant, à l'intérieur même du mémoire, les exemples et les applications concernent essentiellement les équations algébriques. Il y a là une raison évidente : il s'agit de s'assurer que les observations faites à propos des séries obtenues coïncident bien, le cas échéant, avec des résultats élémentaires anciens. C'est en ce sens que l'on peut interpréter, par exemple, l'allusion au théorème de J.P. de Gua sur les équations lacunaires. Ces recoupements confortent la marche générale de la démonstration. De plus, l'utilisation des séries dans la plupart des secteurs des mathématiques étant une pratique bien établie au XVIII^e^

---

[11] Il s'agit de la démonstration par d'Alembert du théorème fondamental de l'algèbre [1748].

siècle, Lagrange n'a pas à l'égard de cette pratique le souci de pureté qu'il manifeste à l'encontre des méthodes géométriques[12]. Mais de façon plus fondamentale, l'intervention des séries dans la résolution d'équations littérales, algébriques d'abord, puis transcendantes, marque une étape dans un mouvement qui élargit le champ de l'algèbre. Dans cette étape, les fonctions dérivées vont jouer un rôle déterminant.

Comparons les mémoires d'Euler et de Lagrange, et soyons attentifs à la forme dans laquelle sont exprimées les séries obtenues. Dans chacun des cas envisagés par Euler, le terme général apparaît comme un produit ou une somme faisant intervenir les coefficients de l'équation initiale, le rang du terme considéré, le degré de l'équation ; dans le cas général de l'équation [Euler, *Opera* (I) 6, p. 270]

$$x^n = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \cdots,$$

il faut avoir recours aux coefficients B_k provenant du développement de la puissance du polynôme

$$B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \cdots = (A_2 + A_3 x + A_4 x^2 + \cdots)^p.$$

Lagrange, en faisant intervenir les dérivées successives, introduit un principe de simplicité et d'ordre formel que ne possèdent pas les écrits de ses contemporains sur le même sujet. En même temps, il donne prise à l'induction et étend le champ d'application des résultats. Euler ne cache pas son admiration : «*Ce qui m'a frappé le plus et que je ne puis pas assez admirer c'est la beauté et l'étendue infinie de votre théorème général*» [Lagrange, *Œuvres* XIII, p. 225].

Précisons le rôle des dérivées. À l'intérieur même du mémoire de Lagrange, tout d'abord. L'un des inconvénients de la série obtenue est qu'elle ne se présente pas d'emblée comme une série entière. Lagrange va proposer d'y remédier en donnant un moyen de réordonner la série par rapport aux puissances croissantes de telle lettre que l'on voudra. Dans ce but, il constate l'analogie des développements

$$\psi(p) = \psi(x) + \psi'(x)\varphi(x) + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i\,!}\, \frac{\mathrm{d}^{i-1}\psi'(x)[\varphi(x)]^i}{\mathrm{d}x^{i-1}}$$

[12] Dans la même période, Lagrange emploie les séries à propos des équations algébriques dans un autre mémoire — promis, il est vrai, à moins d'avenir : « Sur l'élimination des inconnues dans les équations » [1771b].

et

$$\frac{\psi'(x)}{z[1 - z\varphi(x)]} = \frac{1}{z}\psi'(x) + \psi'(x)\varphi(x) + \sum_{i=2}^{\infty} z^{i-1}\psi'(x)\big[\varphi(x)\big]^i.$$

Cette analogie est fondée sur les échanges de symboles $\dfrac{1}{z} \leftrightarrow \mathrm{d}^{-1} = \int$ et $z^{i-1} \leftrightarrow \dfrac{1}{i\,!}\,\dfrac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}$. Dès lors, toute transformation opérée sur la fraction donnera une transformation analogue sur le développement de $\psi(p)$. Lorsque Lagrange appliquera les résultats du mémoire de 1770 à la résolution de l'équation de Kepler

$$t = x - e\sin x$$

c'est l'utilisation de cette analogie qui lui permettra aussi de réordonner les séries obtenues pour les présenter sous forme de « séries trigonométriques » telles que $\sum a_n \sin nt$ [Lagrange 1771a]. Commentant ces principes de calcul, U. Bottazzini souligne qu'«*ils donnent une idée très claire du "style" lagrangien*» [Bottazzini 1989, p. 35]. C'est qu'il y a, dans l'ensemble de l'œuvre de Lagrange, une attention portée aux calculs indépendamment des objets sur lesquels ils opèrent. La part prise par les symboles y est féconde, comme l'illustre le calcul des variations et son application à la mécanique. L'analogie entre les puissances et les différentielles a retenu l'attention de Lagrange dans d'autres contextes. En 1754, (l'auteur est âgé de 18 ans) c'est un essai sur ce thème adressé au géomètre italien Fagnano [Lagrange 1754]. Puis, surtout, ce sera le mémoire « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables » [Lagrange 1774a]. Le développement de Taylor d'une fonction z y est comparé au développement de e^z ; plusieurs résultats concernant le calcul des dérivées et des différences finies y sont mis en lumière par l'analogie puissances/différentielles. Quant à l'antériorité de l'observation de cette analogie, Lagrange fait justement référence à Leibniz. Enfin, en 1797, il s'agit, avec la *Théorie des fonctions analytiques* de donner un exposé didactique et cohérent de l'analyse. Dans l'introduction, Lagrange se réfère à son mémoire de 1774, dans lequel il avançait déjà que «*la théorie du développement des fonctions en séries contient les vrais principes du calcul différentiel*» et que le théorème de Taylor «*est le fondement de la méthode des séries*» [Lagrange, *Œuvres* IX, p. 19]. Puis, en étroite liaison avec le développement de Taylor, il fait apparaître la terminologie des *fonctions dérivées*, laquelle était présente, mais de façon moins systématique, dans le mémoire de 1774[13].

Lagrange sera amené à établir une distinction entre deux branches de la *théorie des fonctions* : la première est «*l'Algèbre proprement dite, on n'*[*y*] *considère que les fonctions qui résultent des opérations ordinaires*». Le mémoire sur la résolution «*des équations littérales par le moyen des séries*» prend place dans la seconde branche, caractérisée par la prise en considération des fonctions dérivées, désignée sous le nom de *Théorie des fonctions analytiques* et qui «*comprend tout ce qui a rapport au nouveau calcul*» [Lagrange, *Œuvres* VII, p. 328].

2. LES NOMBREUSES DÉMONSTRATIONS DE LA FORMULE DE LAGRANGE DANS LE CADRE DES SÉRIES FORMELLES

De nombreux mathématiciens vont donner leur propre démonstration de la formule de Lagrange. Certaines sont remarquables par le raisonnement par récurrence qu'elles comportent. D'autres se trouvent partie prenante de tentatives théoriques plus globales, c'est le cas pour celle que Laplace donne dans un mémoire intitulé « Sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites » [Laplace 1780]. Cette démonstration sera reprise par Lagrange lorsqu'il publiera sa *Théorie des fonctions analytiques*. Par l'ensemble de son contenu, le mémoire de Laplace avait de quoi séduire Lagrange.

2.1. Laplace et les différences partielles

Pour une fonction u de plusieurs variables, Laplace appelle *différence partielle* et il note $\partial^n u$ la différence obtenue «*en faisant varier tout ce qui, dans u, doit varier avec l'une des variables*» [*Ibid.*, p. 319]. En réalité,

---

[13] Dans le mémoire de 1770, Lagrange utilise le terme différentiation pour désigner les opérations qui sont symbolisées dans la formule par les signes de type $\mathrm{d}^i/\mathrm{d}x^i$. Seule la notation $\psi'(x)$ est introduite «*pour plus de simplicité*» [*Œuvres* III, p. 25].

seules sont utilisées, dans les calculs, les notations sous forme de quotient[14]

$$\frac{\partial^{n+p}u}{\partial\alpha^n\partial\beta^p}\cdot$$

L'œuvre de Lagrange trouve un écho tout particulier dans cette publication de Laplace. En premier lieu, les dérivées partielles y sont associées étroitement au développement des fonctions en séries écrit *a priori*; la série de Taylor s'en déduit très rapidement. C'est la démarche adoptée par Lagrange dans le mémoire «*Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*» [Lagrange 1774a]. Ensuite, il s'agit de l'analogie entre les différences et les puissances, dont on a vu l'importance dans la pensée de Lagrange et justement à propos de ce mémoire : sur ce point, Laplace donne une démonstration, et il fait bien remarquer que Lagrange s'était «*contenté d'observer l'analogie*», et avait semblé «*regarder la démonstration comme difficile*» [Laplace, *Œuvres* IX, p. 327]. Enfin, la formule de Lagrange pour la réversion des séries reçoit une nouvelle démonstration. Elle concerne l'équation, d'inconnue x, que Laplace écrit

$$x = t + \alpha\varphi(x). \tag{1}$$

La solution x doit être considérée comme une fonction de deux variables $x = x(t,\alpha)$. On peut remarquer que $x(t,0) = t$. Une fonction donnée ψ d'une variable, permet de définir une nouvelle fonction, notée u

$$u(t,\alpha) = \psi\big[x(t,\alpha)\big].$$

Pour t fixé, cette fonction admet un développement de Taylor qui peut s'écrire

$$\psi\big[x(t,\alpha)\big] = u(t,0)+\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}(t,0)+\frac{\alpha^2}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}(t,0)+\frac{\alpha^3}{2\cdot 3}\,\frac{\partial^3 u}{\partial\alpha^3}(t,0)+\cdots. \tag{2}$$

Cette série va être transformée. Mais, d'abord, à cause de l'équation (1), la fonction $x = x(t,\alpha)$ vérifie l'équation aux *différences partielles*

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha} = \varphi(x)\,\frac{\partial x}{\partial t}\cdot \tag{3}$$

[14] Nous les nommerons *dérivées partielles* même si Laplace ne leur accorde aucun nom particulier. Le vocabulaire des *fonctions dérivées* est déjà présent dans le mémoire de Lagrange « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables» [Lagrange 1774a] ; son utilisation systématique sera surtout proposée dans la *Théorie des fonctions analytiques*.

Cette équation implique, pour $n > 0$

$$\frac{\partial^n u}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^{n-1}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}[\varphi(x)]^n\right\}}{\partial t^{n-1}}. \tag{4}$$

Il reste à remarquer que $u(t, 0) = \psi(t)$, pour pouvoir écrire

$$\frac{\partial^n u}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^{n-1}\left\{\psi'(t)[\varphi(x)]^n\right\}}{\partial t^{n-1}}.$$

Reporté dans le développement (2), ce résultat conduit exactement à la formule de Lagrange. La démonstration de la relation (4) est obtenue après un calcul où sont détaillés le passage de $n = 1$ à $n = 2$, puis le passage de $n = 2$ à $n = 3$, le procédé montrant suffisamment comment on passe en général d'un rang au suivant.

En réalité, l'équation (1) elle-même n'intervient pas dans la démonstration, et il suffit de supposer que la fonction x est solution de l'équation aux dérivées partielles (3). Le résultat s'étend donc à toute fonction x solution de (3). Laplace intègre cette équation aux dérivées partielles ; la fonction x est alors solution de

$$x = F\big[t + \alpha\varphi(x)\big] \tag{5}$$

où F désigne une fonction quelconque. C'est cette classe d'équations qui se trouve ainsi résolue ; en ce sens, Laplace obtient une généralisation du «*beau théorème que M. de la Grange a trouvé par induction*» [*Ibid.* p. 330].

Cette démonstration figurera dans la *Mécanique céleste* de Laplace. Cauchy, nous le verrons, la jugera *insuffisante*, parce que fondée en dernier ressort sur des développements en série indépendamment de toute condition de convergence. Cependant, il soulignera aussi l'intérêt que présente ici l'introduction d'une fonction de plusieurs variables alors que le problème initial était posé à l'aide d'une seule variable [Cauchy 1844]. Il rapprochera cette démarche de celle de Poncelet qui, s'intéressant aux projections centrales en géométrie à trois dimensions, apporte des *solutions élégantes* à des problèmes de géométrie plane.

Quant à Lagrange, il adresse à Laplace un *satisfecit* : l'emploi des différences partielles dans ce problème est une idée originale, la généralisation obtenue est une preuve de fécondité de la méthode[15]. Ajoutons que,

[15] Voir à ce sujet la lettre de Lagrange, datée du 12 novembre 1779 [Lagrange, *Œuvres* XIV, p. 92–94].

comparée à la démonstration donnée en 1770 par Lagrange, celle de Laplace accorde un rôle accru aux *dérivées* : non seulement symbolisme commode traduisant le résultat en une forme *simple et régulière*, mais, cette fois, outil à part entière au sein d'un calcul qui se révèle aussi plus concis. En fin de compte, c'est le mémoire entier qui s'intègre de façon harmonieuse dans l'ensemble théorique dont Lagrange a commencé à jeter les bases en 1770 et 1774.

Dans la même période, Euler continue à chercher des séries qui puissent donner directement l'expression des racines à l'aide des coefficients d'une équation quelconque [Euler 1801]. Et il revient aussi sur la série de Lambert associée à l'équation trinôme ([Euler 1783] et [Euler 1789]). D'autre part, en mai 1771, une lettre de Lexell à Lagrange fait état de démonstrations de la formule de Lagrange obtenues par Euler [Lagrange, *Œuvres* XIV, p. 224–235]. Cette même lettre contient une démonstration de Lexell qui fera l'objet d'un mémoire publié par l'Académie de Saint Petersbourg [Lexell 1772].

2.2. Les démonstrations par récurrence

Le travail de Lexell retient l'attention pour le raisonnement par récurrence de forme très complète, qu'il contient, à une époque où les principaux textes mathématiques ne se conforment pas à cette exigence. Il s'agit de démontrer, pour deux fonctions y et z, la relation suivante

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k y^{m-k} C_m^k \,\mathrm{d}^{m-1}(y^k z) = 0. \tag{6}$$

Lexell établit très soigneusement que la relation, écrite pour l'entier m, permet de démontrer la relation semblable écrite pour l'entier $m+1$, puis il constate que la relation est vraie pour le rang 1, puisqu'elle donne

$$y\,\mathrm{d}^0(z) - y^0\,\mathrm{d}^0(yz) = yz - yz = 0.$$

Ce lemme étant ainsi obtenu, la formule de Lagrange est déduite de la formule de Taylor, par un calcul dont voici les principales phases. L'équation à résoudre est

$$t = x - \varphi(x).$$

Pour une fonction ψ quelconque, il s'agit de calculer $\psi(x)$ en fonction de t. Lexell applique la formule de Taylor à la fonction ψ pour un accroissement de la variable x égal à $-\varphi(x)$

$$\psi(t) = \psi\big[x - \varphi(x)\big] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n\,!}\,\frac{\mathrm{d}^n[\psi(x)]}{\mathrm{d}x^n}\big[\varphi(x)\big]^n. \tag{7}$$

Lexell va utiliser cette relation (7) en substituant à $\psi(t)$ chacun des termes $\dfrac{1}{k\,!}\,\dfrac{\mathrm{d}^{k-1}\{[\varphi(x)]^k\psi'(t)\}}{\mathrm{d}t^{k-1}}$ appelés à figurer dans la *série de Lagrange*. Il fait la somme des différentes séries ainsi obtenues pour $k \geq 0$; une interversion de l'ordre des sommations et l'utilisation de la relation (6) démontrée en lemme lui permet de conclure.

En calculant d'emblée la *série de Lagrange* pour la réduire finalement à $\psi(x)$, Lexell abandonne évidemment toute prétention heuristique. Il n'en va pas de même pour la démonstration que donnera Pfaff [1794a] ; elle fait aussi intervenir un raisonnement par récurrence en bonne et due forme. Mais elle reprend en partie l'idée directrice qui était celle de Condorcet dans l'article *approximation* de l'*Encyclopédie*. Pour une équation écrite sous la forme

$$y = x - z\varphi(x)$$

et pour une fonction ψ quelconque, Pfaff souhaite déterminer les coefficients Y_i du développement

$$\psi(x) = \psi(y) + Y_1 z + Y_2 z^2 + \cdots + Y_n z^n + \cdots. \tag{8}$$

Les Y_i sont des fonctions de la variable y seule.

La démonstration s'appuie sur la formule de Taylor appliquée à la fonction ψ et écrite pour les valeurs y et $x = y + z\varphi(x)$ de la variable

$$\psi(x) = \psi(y) + z\,\frac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(x) + z^2\,\frac{\mathrm{d}^2\psi(y)}{\mathrm{d}y^2}\,\big[\varphi(x)\big]^2 + \cdots. \tag{9}$$

À chaque étape, les propriétés établies pour une fonction ψ quelconque peuvent être appliquées à la fonction particulière φ et à ses puissances successives. Et d'abord, cette fonction φ est susceptible d'un développement tel que (8). On peut donc écrire

$$\varphi(x) = \varphi(y) + zU$$

où zU représente tous les termes de la série (8) à l'exception du premier. Reportée dans la formule de Taylor (9) cette expression conduit à un développement de $\psi(x)$ suivant les puissances croissantes de z qui commence par

$$\psi(x) = \psi(y) + z\,\frac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(y) + \cdots.$$

Et cette première étape conduit donc à $Y_1 = \dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\,\varphi(y)$.

Mais le résultat concerne en particulier $\varphi(x)$ et $\varphi[(x)]^2$, lesquelles peuvent jouer le rôle de la fonction ψ. La deuxième étape va alors consister à reporter dans le second membre de la formule de Taylor (9) les expressions de $\varphi(x)$ et $[\varphi(x)]^2$ ainsi obtenues. Le calcul fait apparaître le coefficient Y_2 sous la forme

$$Y_2 = \frac{\mathrm{d}\left\{[\varphi(y)]^2\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\right\}}{1\cdot 2\,\mathrm{d}y}\cdot$$

La «*loi générale des coefficients*»[16] fait alors l'objet d'une hypothèse : pour $1 \leq r \leq n-1$, les coefficients du développement (8) s'écrivent

$$Y_r = \frac{1}{r\,!}\,\frac{\mathrm{d}^{r-1}\left\{[\varphi(y)]^r\,\dfrac{\mathrm{d}\psi(y)}{\mathrm{d}y}\right\}}{\mathrm{d}y^{r-1}}\cdot$$

Grâce à cette formulation, et la fonction ψ ayant fait l'objet d'une substitution convenable, chacune des fonctions $\varphi(x), [\varphi(x)]^2, \ldots, [\varphi(x)]^n$ peut être développée au moins jusqu'au terme d'ordre $n-1$. En introduisant ainsi ces fonctions dans le second membre de la formule de Taylor (9), on fait apparaître n termes contenant z^n en facteur. Et l'utilisation de la formule de Leibniz donnant la dérivée d'ordre quelconque d'un produit donne finalement une expression de Y_n conforme à la loi générale espérée.

2.3. L'École combinatoire allemande

Pfaff publie cette démonstration dans l'une des revues dirigées par Hindenburg et représentatives de l'école combinatoire allemande. Hindenburg influence cette école autant par ses recherches mathématiques propres

---

[16] «*das allgemeine Gesetz der Coefficienten*» [Pfaff 1794a, p. 83].

que par son travail d'organisation et d'édition. Son centre d'intérêt est d'abord constitué par le théorème du polynôme. Si on élève une série ou un polynôme à la puissance m, on obtient un nouveau développement

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)^m = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \cdots.$$

Le théorème du polynôme donne un moyen de calculer les coefficients A_i en fonction des coefficients a_i. Le résultat obtenu par Hindenburg concerne les exposants m entiers, mais il se prête bien à une généralisation pour des exposants rationnels ou négatifs. Ces préoccupations vont de pair avec la recherche de symboles combinatoires propres à décrire les opérations à effectuer pour des problèmes de ce type. Hindenburg a introduit des «*signes locaux*» permettant d'écrire des «*formules locales*»[17]. Ces signes permettent de donner une description des termes successifs d'une série. Ainsi, pour la série

$$p = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots,$$

$p \,/\!|\, (n+1)$ désigne le *terme* a_nx^n de rang $n+1$, tandis que $p\,\chi\,(n+1)$ désigne le *coefficient* a_n de ce même terme. Le problème du retour des suites peut bien sûr être posé dans une forme voisine de celle qui vient d'être utilisée à propos du théorème du polynôme. De façon, un peu plus générale, soit la série

$$y = p = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots.$$

On peut chercher, en fonction des a_i, les coefficients qui interviennent dans le développement de x^m en fonction de y :

$$x^m = q = B_1y^m + B_2y^{m+1} + B_3y^{m+2} + \cdots.$$

Ce problème est traité par Rothe en 1793, après des résultats partiels obtenus par Eschenbach et Hindenburg. Rothe peut écrire

$$q \,/\!|\, (n+1) = \frac{m}{m+n} p^{-m-n}\,\chi\,(n+1) y^{m+n},$$

ce qui signifie que, dans le développement de x^m en fonction de y, le $(n+1)$-ième terme est le produit du $(n+1)$-ième coefficient du développement de p^{-m-n} par l'expression $\dfrac{m}{m+n}y^{m+n}$.

[17] «*Lokalzeichen*» et «*Lokalformeln*» [Cantor 1908, p. 209].

Pfaff[18] va montrer que ce résultat peut se déduire de la formule de Lagrange [1794a]. Il s'agit de l'équation d'inconnue x

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots .$$

Convenons d'appeler $p(x)$ la somme de la série du second membre. Cette équation peut alors prendre la forme

$$0 - x + y \frac{x}{p(x)} = 0.$$

En posant $\alpha = 0$ et $\varphi(x) = \dfrac{x}{p(x)}$, on lui donne la forme classique

$$\alpha - x + y\varphi(x) = 0.$$

Pfaff choisit d'appliquer la formule de Lagrange pour le calcul de $\psi(x) = \dfrac{x^m}{[p(x)]^m} = [\varphi(x)]^m$; il obtient

$$\begin{aligned} x^m = y^m \Big(x^m \big[p(x)\big]^{-m} + y \frac{m}{m+1} \, \frac{\mathrm{d}x^{m+1}\big[p(x)\big]^{-m-1}}{\mathrm{d}x} \\ + \frac{y^2}{2} \, \frac{m}{m+2} \, \frac{\mathrm{d}^2 x^{m+2}\big[p(x)\big]^{-m-2}}{\mathrm{d}x^2} \\ + \frac{y^3}{2\cdot 3} \, \frac{m}{m+3} \, \frac{\mathrm{d}^3 x^{m+3}\big[p(x)\big]^{-m-3}}{\mathrm{d}x^3} + \cdots \Big)\Big|_{x=0}. \end{aligned}$$

Dans cette série, le terme général, de rang $n+1$, est

$$A_n y^{m+n} = \frac{y^{m+n}}{n\,!} \, \frac{m}{m+n} \Big(\frac{\mathrm{d}^n x^{m+n}\big[p(x)\big]^{-m-n}}{\mathrm{d}x^n} \Big)\Big|_{x=0}. \tag{10}$$

La démonstration de Pfaff repose alors sur la comparaison de ce terme général avec le terme de rang $n+1$ obtenu dans le développement en série de Laurent de $[p(x)]^{-m-n}$; ce développement s'écrit *a priori*

$$\big[p(x)\big]^{-m-n} = B_1 x^{-m-n} + B_2 x^{-m-n+1} + ... + B_{n+1} x^{-m} + \cdots .$$

[18] Pfaff obtient un résultat plus général, qui prend pour base le développement de y^p, et pas seulement celui de y. Quant aux notations reproduites ici, elles sont comparables à celles que l'on peut trouver dans certains traités modernes de combinatoire [Comtet 1970, I, p. 149].

Il s'en déduit une série entière

$$x^{m+n}\big[p(x)\big]^{-m-n} = B_1 + B_2 x + ... + B_{n+1}x^n + \cdots.$$

Le coefficient B_{n+1} est donc aussi le coefficient de rang n dans la série de Taylor afférente à la fonction qui figure au premier membre, soit

$$B_{n+1} = \frac{1}{n\,!}\,\frac{\mathrm{d}^n x^{m+n}\big[p(x)\big]^{-m-n}}{\mathrm{d}x^n}\,\Big|_{x=0}.$$

La comparaison de cette expression avec le coefficient A_n de la relation (10) permet de conclure dans le sens souhaité. Le $(n+1)$-ième terme du développement de x^m peut effectivement être noté

$$A_n y^{m+n} = \frac{m}{m+n} p^{-m-n}\,\chi\,(n+1)y^{m+n}.$$

Inversement, Rothe donnera une démonstration qui, en partant de ce type de *formule locale* permet d'obtenir la formule de Lagrange sous sa forme la plus générale [Rothe 1795]. Là encore la formule de Taylor constituera une étape nécessaire.

Dans un article de 1815, J.-F. Français considère que les formules de Taylor et de Lagrange posent des problèmes d'effectivité et que leur application conduit parfois à des développements propres à «*décourager le calculateur le plus intrépide*» [Français 1815, p. 61]. Il reconnaît que l'Analyse combinatoire apporte à ce type de problème une réponse de caractère «*simple, facile et uniforme*» [*Ibid.*]. Cependant, il considère comme un obstacle majeur la nécessité à laquelle elle conduit de recourir à des tables de combinaisons calculées à l'avance ; et au total, il juge l'ensemble de la méthode «*trop disparate avec les procédés ordinaires de l'analyse*» [*Ibid.* p. 62]. J.-F. Français lui oppose le *Calcul de dérivations* qui, en 1800, a fait l'objet d'un traité d'Arbogast, et qui constitue, à ses yeux, «*une solution générale, complète et analytique*» [*Ibid.*][19].

2.4. Le calcul des dérivations

Le concept de dérivation est inspiré de celui que Lagrange a introduit. Il procède de cette idée que la fonction

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

[19] J.-F. Français a été lié à Arbogast, et à propos du *Calcul des dérivations*, Lacroix a pu écrire que Français «*s'est rendu familier ce calcul, à la naissance duquel, il a pour ainsi dire assisté*» [Lacroix 1810, p. XXX].

est connue dès que l'on connaît à la fois le premier coefficient a_0 et la loi qui permet de passer de chaque coefficient a_n au coefficient suivant a_{n+1}. Arbogast a créé des notations et explicité des algorithmes spécifiques. Le retour des suites et la formule de Lagrange trouvent place naturellement dans l'enchaînement des théorèmes de son traité. Intervenant après Arbogast, J.-F. Français en retient l'inspiration fondamentale. Il se propose de mieux justifier et de simplifier les notations utilisées. Il entend aussi donner aux fondements du calcul une plus grande netteté «*en déduisant la véritable théorie du calcul de dérivations du seul théorème de Taylor*» [Français 1815, p. 62].

Dans sa démonstration de la formule de Lagrange, Français joue des divers points de vue sous lesquels, dans une situation donnée, la dérivation peut être envisagée. Il compare d'abord les dérivations relatives à deux fonctions f et g liées entre elles par la relation

$$g(x+\alpha) = a + xf(x+\alpha)$$

et dont les développements sont donnés par

$$f(x+\alpha) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \cdots, \tag{11}$$

$$g(x+\alpha) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots. \tag{12}$$

La dérivation est notée D et fonctionne comme un véritable opérateur. Sur les coefficients de la fonction g, elle opère de la façon suivante

$$a_1 = Da, \quad a_2 = \frac{1}{2}Da_1 = \frac{1}{2}D^2a, \quad a_n = \frac{1}{n\,!}D^{n-1}a_1 = \frac{1}{n\,!}D^na. \tag{13}$$

Pour la fonction f, le premier coefficient du développement est a_1 et il faut donc introduire des modifications

$$a_2 = Da_1, \quad a_n = \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}a_1. \tag{14}$$

La formule de Lagrange va précisément concerner l'équation, d'inconnue x, qui s 'écrit

$$y = xf(x+\alpha). \tag{15}$$

La fonction f admet le développement décrit en (12). Étant donné une fonction $\psi(b+x)$, l'objectif est d'exprimer sa valeur à l'aide de y, en sachant que x est solution de l'équation (15). Il faut donc trouver les coefficients B_i tels que, pour x solution de (15), on ait

$$\psi(b+x) = B + B_1 y + B_2 y^2 + B_3 y^3 + \cdots. \tag{16}$$

Ces coefficients doivent conduire à un développement en fonction de x

$$\begin{aligned}\psi(b+x) = B &+ B_1(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)\\ &+ B_2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)^2\\ &+ B_3(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)^3 + \cdots.\end{aligned} \tag{17}$$

Dans cette situation, Français considère à nouveau deux dérivations : la première concerne la succession des coefficients B_i, elle reste notée par la lettre D ; la seconde concerne le développement de $\psi(b+x)$ suivant les puissances croissantes de x, elle est notée à l'aide d'un D suivi d'un point. On a évidemment

$$D.\psi(b) = a_1 D\psi(b).$$

Il s'en déduit

$$B_1 = D\psi(b) = a_1^{-1} D.\psi(b). \tag{18}$$

Français obtient les coefficients B_n en itérant les opérations indiquées dans la formule (18). L'utilisation des transformations indiquées ci-dessus pour le passage des formules (13) aux formules (14), lui permet finalement d'écrire

$$B_n = \frac{1}{n\,!} D^n\psi(b) = \frac{1}{n\,!} D.^{n-1}\big[a_1^{-n} D.\psi(b)\big]. \tag{19}$$

Si l'on pose $\varphi(x) = \dfrac{1}{f(x+\alpha)}$, l'équation initiale (15) s'écrit sous la forme

$$0 - x + y\varphi(x) = 0.$$

Compte tenu des expressions trouvées pour les coefficients B_n, le développement (16) peut alors être interprété comme la formule de Lagrange relative à cette dernière équation.

Dans un autre mémoire, J.-F. Français a tenté de justifier une pratique des notations qu'Arbogast appelle *séparation des échelles d'opérations* et qui marque, à la suite de Lagrange, un nouveau pas dans le sens de l'abstraction, tout en annonçant le calcul opérationnel [Français 1813]. L'analogie entre la formule de Taylor et le développement en série de la fonction exponentielle s'y trouve exprimée dans l'écriture symbolique suivante

$$\varphi(x+\xi) = \mathrm{e}^{\xi\partial}.\varphi x. \qquad [\textit{Ibid.}, \text{ p. } 249].$$

2.5. Servois et les principes du calcul différentiel

À la même époque, Servois utilise aussi ce type de notation et il emprunte aussi des éléments de vocabulaire à Arbogast. Mais c'est à Servois lui-même, et à l'attention qu'il porte aux propriétés des opérations, que l'on doit l'introduction des termes *commutatif* et *distributif*. Il montre que ce sont les propriétés ainsi nommées qui permettent d'expliquer l'analogie entre les *différences* et les *puissances* [Servois 1814a, p. 151]. Pour Servois, le développement des fonctions en séries est la substance même du calcul différentiel [*Ibid.*, p. 154]. Mais, c'est la différentielle et non la dérivée qui doit jouer le rôle essentiel. La différentielle d'une fonction z est *définie*[20] à l'aide de la *différence finie* Δz

$$\mathrm{d}z = \Delta z - \frac{1}{2}\Delta^2 z + \frac{1}{3}\Delta^3 z - \frac{1}{4}\Delta^4 z + \cdots.$$

Et le calcul différentiel est identifié avec l'«*exécution des opérations indiquées dans les définitions*» [Servois 1814a, p. 121]. Servois a produit une démonstration de la formule de Lagrange conforme à ces conceptions. Sont données une fonction ψ et une fonction ϖ. Pour une valeur particulière θ de la variable x la relation fonctionnelle

$$y = \varpi(x) \tag{20}$$

devient

$$p = \varpi(\theta). \tag{21}$$

Servois a d'abord pour objectif d'obtenir un développement de $\psi(x)$ suivant les puissances croissantes de $\varpi(x) - \varpi(\theta)$. Compte tenu des

[20] Cette définition est donc relative à une *différence* constante attribuée à la variable.

relations (20) et (21), il est possible d'écrire *a priori* un tel développement sous la forme

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (y-p)^n. \tag{22}$$

Par ailleurs, Servois exprime les différentielles

$$\mathrm{d}^{n-1}\Big\{ \frac{(x-\theta)^n \,\mathrm{d}\psi(x)}{(y-p)^n} \Big\}$$

par des développements en série ; quand on fait $x = \theta$ dans ces développements, on constate qu'un seul terme ne s'annule pas. Servois convient de noter ce terme sous la forme

$$\mathrm{d}^{n-1}\Big\{ \frac{(x-\theta)^n \,\mathrm{d}\psi(x)}{(y-p)^n} \Big\}_0.$$

Or il s'avère que ce terme permet justement d'exprimer le coefficient général de la série (22) ; on obtient en effet

$$A_n = \frac{1}{n\,!}\,\mathrm{d}^{n-1}\Big\{ \frac{(x-\theta)^n \,\mathrm{d}\psi(x)}{(y-p)^n} \Big\}_0.$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi(\theta) &+ \big(\varpi(x)-\varpi(\theta)\big)\Big\{ \frac{(x-\theta)\,\mathrm{d}\psi(x)}{\varpi(x)-\varpi(\theta)} \Big\}_0 \\ &+ \frac{(\varpi(x)-\varpi(\theta))^2}{1\cdot 2}\,\mathrm{d}\Big\{ \frac{(x-\theta)^2\,\mathrm{d}\psi(x)}{(\varpi(x)-\varpi(\theta))^2} \Big\}_0 \\ &+ \frac{(\varpi(x)-\varpi(\theta))^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\mathrm{d}^2\Big\{ \frac{(x-\theta)^3\,\mathrm{d}\psi(x)}{(\varpi(x)-\varpi(\theta))^3} \Big\}_0 + \cdots .\end{aligned} \tag{23}$$

Servois identifie ce développement comme étant la formule du professeur Bürman [1814a, p. 132][21]. La formule de Lagrange s'en déduit en supposant que θ est choisi de manière que $\varpi(\theta) = 0$ et en considérant la fonction φ liée à la fonction ϖ par la relation :

$$\varphi(x) = \frac{x-\theta}{\varpi(x)}\cdot \tag{24}$$

[21] Bürmann a communiqué cette formule à l'Académie des sciences de Paris. Tout en saluant les mérites du mémoire de Bürmann, les rapporteurs diront que la formule n'est pas entièrement nouvelle car elle se ramène justement à la formule de Lagrange [Lagrange et Legendre 1799].

3. LA FORMULE DE LAGRANGE DONNE-T-ELLE LA PLUS PETITE RACINE D'UNE ÉQUATION ?

Certains calculs de Lambert et Euler sont fondés sur l'expression de la somme des puissances semblables des racines

$$S = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \cdots.$$

Si α est la plus grande racine, l'équivalence, pour les grandes valeurs de n, entre α^n et la somme S leur permet d'affirmer que les développements qu'ils obtiennent concernent la plus grande racine de l'équation.

Lagrange a commencé à explorer une voie analogue. Le mémoire de 1770 [1770b] commence par le calcul de la somme des inverses des puissances semblables des racines. Une formule est obtenue, mais finalement aucun lien n'est établi entre ce premier résultat et le développement en série de *la* racine, lequel fait l'objet de l'essentiel du mémoire. Cette idée est cependant reprise dans la note XI du *Traité de la résolution des équations numériques* [Lagrange, *Œuvres* VIII, p. 258–285]. L'objectif « numérique » est atteint par la prise en considération d'une propriété formelle qu'il faut d'abord présenter.

3.1. La régularité du produit de deux séries de Lagrange

Dans la lettre à Condorcet du 30 septembre 1771, Lagrange suggère une voie à explorer pour trouver une nouvelle démonstration de son *théorème*. Pour une expression de x écrite *a priori* sous la forme

$$x = u + f(u) + \frac{\mathrm{d}\big[f(u)\big]^2}{2\,\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2\big[f(u)\big]^3}{2\cdot 3\,\mathrm{d}u^2} + \cdots, \tag{1}$$

il s'agirait de démontrer qu'elle permet d'écrire, Ψ étant une fonction quelconque

$$\Psi(x) = \Psi(u) + \Psi'(u)f(u) + \frac{\mathrm{d}\big\{[f(u)]^2\Psi'(u)\big\}}{2\,\mathrm{d}u} + \frac{\mathrm{d}^2\big\{[f(u)]^3\Psi'(u)\big\}}{2\cdot 3\,\mathrm{d}u^2} + \cdots. \tag{2}$$

Il suffirait alors de choisir $\Psi = f$ pour transformer la relation (2) en

$$f(x) = f(u)+f'(u)f(u)+\frac{\mathrm{d}\big\{[f(u)]^2 f'(u)\big\}}{2\,\mathrm{d}u}+\frac{\mathrm{d}^2\big\{[f(u)]^3 f'(u)\big\}}{2\cdot 3\,\mathrm{d}u^2}+\cdots. \tag{3}$$

En faisant la différence membre à membre des relations (1) et (3), il resterait

$$x - f(x) = u. \tag{4}$$

La *série de Lagrange* donnée par la relation (1) fournirait donc nécessairement une racine de l'équation (4). Dans la lettre à Condorcet, Lagrange ne pousse pas plus loin l'exploration de cette voie. On peut imaginer à partir de là un cheminement possible. La fonction Ψ étant conçue comme une somme de monômes, il suffirait de savoir réaliser le passage de la relation (1) à la relation (2) dans le cas particulier où $\Psi(x)$ est un monôme x^r. Or le calcul de x^r à partir de la formule (1) devient lui-même immédiat si l'on dispose d'une propriété générale qui assure la régularité du produit de deux séries de Lagrange. Comme le fait Lagrange, considérons les séries respectivement associées aux fonctions Ψ et Φ

$$[\Psi] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!}\, \frac{\mathrm{d}^{i-1}\big\{\Psi'(u)[f(u)]^i\big\}}{\mathrm{d}u^{i-1}}\,, \tag{5}$$

$$[\Phi] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i\,!}\, \frac{\mathrm{d}^{i-1}\big\{\Phi'(u)[f(u)]^i\big\}}{\mathrm{d}u^{i-1}}\,. \tag{6}$$

Lagrange constate que les trois premiers termes de la série produit $[\Psi]\times[\Phi]$ sont respectivement identiques aux trois premiers termes de la série $[\Psi\times\Phi]$ associée à la fonction $\Psi \times \Phi$. Il indique : «*et l'on trouvera la même chose en poussant la multiplication plus loin*» [*Ibid.*, p. 275], ce qui revient à admettre, pour tout entier n, la relation

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^{n-1}\big\{[\Psi(u)\Phi(u)]'[f(u)]^k\big\}}{\mathrm{d}u^{n-1}} \\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \frac{\mathrm{d}^{n-k-1}\big\{\Psi'(u)[f(u)^{n-k}]\big\}}{\mathrm{d}u^{n-k-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}^{k-1}\big\{\Phi'(u)[f(u)]^k}{\mathrm{d}u^{k-1}} \end{aligned} \tag{7}$$

ou, si l'on veut, en omettant l'indication de la variable et en utilisant les puissances symboliques pour les ordres de dérivation

$$\big[(\Psi\Phi)'f^n\big]^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\Psi' f^{n-k})^{(n-k-1)}(\Phi' f^k)^{(k-1)}.$$

La relation obtenue permet d'écrire

$$[\Psi] \times [\Phi] = [\Psi \times \Phi]. \tag{8}$$

Il suffit alors de considérer aussi la fonction $\Pi = \Psi \times \Phi$, et l'on obtient pour $[\Psi]$ deux expressions équivalentes qui permettent d'écrire l'égalité

$$\left[\frac{\Pi}{\Phi}\right] = \frac{[\Pi]}{[\Phi]}. \tag{9}$$

3.2. L'expression de la somme des puissances semblables des racines

La démonstration de la note XI [Lagrange 1798] concerne donc une équation initiale

$$u - x + f(x) = 0. \tag{10}$$

Ses racines sont désignées par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Pour une série entière de somme $F(u)$, Lagrange est amené à considérer dans le développement de $\dfrac{F(u)}{u^n}$ la somme des termes qui s'expriment par des puissances négatives de u. Convenons de noter $\left\langle\dfrac{F(u)}{u^n}\right\rangle$ cette somme. Pour une fonction ψ donnée, il faut encore introduire la fonction $\Psi(u) = \dfrac{\psi(u)}{u^n}$. Lagrange obtient alors un résultat intermédiaire qui peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{\psi(\alpha)}{\alpha^n} + \frac{\psi(\beta)}{\beta^n} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{i-1}\big\langle \psi'(u) f^i(u)\big\rangle}{\mathrm{d}u^{i-1}}. \tag{11}$$

Il faut maintenant pouvoir rendre *infiniment grand* l'exposant n pour en tirer un double bénéfice :

- remplacer la somme formant le premier membre de (11) par l'équivalent $\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha^n}$, α désignant la plus petite racine de l'équation (10) ;
- remplacer par des développements complets les expressions tronquées (que nous avons notées $\langle\ \rangle$).

Si l'on choisit $\dfrac{\psi(u)}{u^n} = \Pi(u)$ et $\dfrac{\psi(u)}{u^{n+r}} = \Phi(u)$, la série $\left[\dfrac{\Pi}{\Phi}\right]$ est associée à la fonction u^r ; notons-la $[u^r]$. Il vient

$$[u^r] = \frac{[\Pi]}{[\Phi]}.$$

Puis «*si l'on prend deux nombres très grands, n et $n+r$, dont la différence soit un nombre quelconque positif ou négatif*» [Lagrange, *Œuvres* VIII,

p. 275], la quantité

$$\frac{\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha^n}+\dfrac{\psi(\beta)}{\beta^n}+\cdots}{\dfrac{\psi(\alpha)}{\alpha^{n+r}}+\dfrac{\psi(\beta)}{\beta^{n+r}}+\cdots}$$

se réduit à α^r et elle est exprimée par la série $[u^r]$, soit

$$\alpha^r=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i\,!}\;\frac{\mathrm{d}^{i-1}\big[(u^r)'[f(u)]^i\big]}{\mathrm{d}u^{i-1}}\,.$$

Ainsi se trouve obtenu le développement de *la plus petite racine* et même d'une puissance quelconque de cette racine. Du résultat concernant le monôme α^r, on passe de façon évidente à l'expression de $\psi(\alpha)$, où ψ représente une fonction quelconque.

3.3. Un bilan intéressant mais un résultat inexact

Lagrange considère que la démonstration publiée en 1770 procédait d'une «*analyse à peu près semblable à la précédente, mais moins rigoureuse*» [*Œuvres* VIII, p. 281]. Dans un commentaire de l'ensemble du *Traité* qui sert de préface à la troisième édition, Poinsot désigne la nouvelle démonstration comme «*un des plus beaux morceaux d'analyse*» [Poinsot 1826, p. XII]. Un peu longue, la démonstration est élégante par les analogies et les régularités qu'elle utilise. La pratique courante de Lagrange, en matière de séries, consiste à effectuer les calculs pour les premiers termes, la généralisation ne posant pas de problème particulier la plupart du temps ; dans le cas de la formule (7), le texte de Lagrange passe cependant à côté d'une véritable difficulté : la démonstration de cette formule pour un entier n quelconque s'avère plus difficile que ce que pouvait laisser prévoir cette régularité qui lui donne la forme d'un hybride entre la formule de Newton et celle de Leibniz[22]. Mais il y a plus, le résultat qui constituait l'objectif principal et que l'on peut énoncer ainsi : *la formule de Lagrange donne toujours le développement en série de la plus petite racine* est inexact. Cette fois le recours à des séries non nécessairement convergentes finit par être une source d'erreur. Le problème est étudié de

[22] Cauchy [1826] en donnera une démonstration (voir ci-dessous § 5.2.), ainsi que Serret [1836, p. 436].

près dans les mémoires de Chio [1854], dont Cauchy a été rapporteur à l'Académie ([Cauchy 1846] et [Cauchy 1852]). Il faut répartir les racines réelles de l'équation (4) en deux classes : la première contenant toutes les racines supérieures à u, la seconde les racines inférieures, la racine donnée par la formule de Lagrange est, parmi celles de la classe à laquelle elle appartient, la plus proche de u [Chio 1854, p. 365–366].

4. L'ÉTUDE DE LA CONVERGENCE AVANT CAUCHY

Pourtant les problèmes de convergence n'ont pas été absents des premiers calculs sur la série de Lagrange. Et ils étaient aussi présents dans le premier mémoire de Lambert [1758]. Pour l'équation

$$x^m + px = q,$$

le développement obtenu est suivi de la mention : «*en vérité, toutes les séries contenues dans cette formule, convergeront seulement quand* $(m-1)^{m-1}p^m > m^m q^{m-1}$ »[23]. Pour l'équation du troisième degré, Lambert constate que la condition de convergence correspond au cas où la formule de Cardan ne met en jeu que des termes réels.

4.1. En 1770 : le mémoire de Lagrange

Quant à Lagrange, la possibilité d'étudier la convergence faisait partie, nous l'avons vu, des avantages revendiqués pour sa méthode. Une fois la série mise en place, se trouve exprimée la problématique de la convergence : «*il est clair que pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée il faut qu'elle soit convergente à son extrémité*», en même temps que le critère utilisé : «*c'est-à-dire que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'une quantité donnée*» [*Œuvres* III, p. 61]. Dans le mémoire de 1770, l'étude de convergence porte sur le cas général d'abord, puis sur son application à l'équation trinôme, elle occupe le dernier chapitre et couvre 13 pages sur les 68 que compte le mémoire.

La formule de Stirling est utilisée après avoir été démontrée à partir de la formule de sommation d'Euler-Mac Laurin. Le calcul porte sur

[23] « *Omnes vero series hac formula contentae, tunc solum erunt convergentes, quando fuerit...* » [Lambert, *Opera* I, p. 39].

la majoration de ce que Lagrange appelle «*un terme quelconque de la valeur de*

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots i}\,\frac{\mathrm{d}^{i-1}\big[\varphi(t)^i\psi'(t)\big]}{\mathrm{d}t^{i-1}}\text{ ».}$$

$\psi(t)$ est une somme de termes de la forme Ft^f et l'on suppose

$$\varphi(t) = At^a + Bt^b + Ct^c + \cdots.$$

Dès lors, l'expression (1) est constituée de termes tels que

$$\text{(2)} \qquad \frac{(u+f)(u+f-1)\cdots(u+f-i+2)\times A^m B^n C^p \cdots F}{1\cdot 2\cdot 3\cdots m\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\times 1\cdot 2\cdot 3\cdots p\times\cdots}\,t^{u+f-i+1}$$

où $i = m+n+p+\cdots$ et $u = am+bn+cp+\cdots$.

Par une succession d'égalités entre infiniment petits ou entre infiniment grands, Lagrange finit par produire pour un terme quelconque de la valeur de l'expression (1), «*lorsque i est infiniment grand, cette expression fort simple*

$$\frac{F\sqrt{M}\,N^i}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}$$

dans laquelle λ *est le nombre de termes de la fonction* $\varphi(t),\ldots$» [*Ibid.*, p. 66]. Dans cette expression M et N dépendent encore, par l'intermédiaire des exposants $m, n, p, \ldots$ du terme que l'on est en train de considérer dans le développement en monômes de l'expression (1). En particulier, N est donnée par

$$N = v\Big(\frac{vt}{v-1}\Big)^{v-1}\Big(\frac{A}{\mu}\Big)^{\mu}\Big(\frac{B}{\nu}\Big)^{\nu}\Big(\frac{C}{\pi}\Big)^{\pi}\cdots$$

où $\dfrac{m}{i} = \mu$, $\dfrac{n}{i} = \nu$, $\dfrac{p}{i} = \pi, \ldots, v = a\mu + b\nu + c\pi + \cdots$.

Lagrange conclut rapidement que la série est convergente si «*abstraction faite du signe*

$$N = \text{ ou } < 1\text{ ».}$$

Cette étude de convergence est l'un des objets de la critique exercée par Chio [1854]. Celui-ci invite à distinguer soigneusement d'une part : la série de Lagrange qu'il désigne comme une série *simple*, dont le terme général est l'expression (1), laquelle dépend de l'indice i ; d'autre part : la série qualifiée de *multiple*, dont le terme général est l'expression (2), qui, cette fois, dépend des indices $m, n, p, \ldots$ Lagrange remplace l'expression (1) par le plus grand des termes (2) qui la composent, alors même que le nombre des termes (2) ne reste pas borné quand i tend vers l'infini. Chio indique des conditions particulières dans laquelle la règle énoncée par Lagrange peut s'appliquer, mais il souligne que ces conditions ne sont pas vérifiées en général.

Il y a un cas où la règle n'est pas en défaut, c'est celui où la fonction $\varphi(x)$ est formée d'un unique monôme. Précisément, le mémoire de Lagrange ne tire parti de ce critère de convergence que pour les équations trinômes

$$a - bx^m + cx^{m+n} = 0.$$

Il montre que l'on peut choisir les modes d'application de la formule de résolution de sorte que chaque racine soit finalement obtenue au moyen d'une série *convergente*. La méthode permet alors de discuter le nombre de racines réelles de ce type d'équation.

Dans le mémoire « Sur le problème de Kepler » [Lagrange 1771] où il utilise la formule de réversion des séries pour la résolution de l'équation

$$t = x - e \sin x, \tag{3}$$

Lagrange ne mentionne nulle part le problème de la convergence. Dans la *Mécanique analytique*, il indiquera seulement qu'« *en supposant l'excentricité fort petite, on peut avoir* $[x]$ *par une série plus ou moins convergente* » [*Œuvres* XII, p. 21].

4.2. Laplace et le problème de Kepler

En 1823, Laplace donne à l'Académie une étude de la convergence des séries obtenues lors de la résolution du problème de Kepler [Laplace 1827]. Il y souligne l'importance du problème général du développement des fonctions en séries puisque « *la plupart des applications du calcul aux phénomènes en dépendent* » et aussi la nécessité de choisir, parmi toutes les manières de développer une fonction en série, « *celle qui donne les séries les plus convergentes* » [Laplace, *Œuvres* XII, p. 549]. Pour une anomalie excentrique x solution de l'équation (3) le rayon vecteur s'écrit (en prenant pour unité de longueur le demi grand axe de la trajectoire elliptique)[24]

$$r = 1 - e\cos x$$

La formule de Lagrange permet d'exprimer directement le rayon r en fonction du temps t

$$r = 1 - e\cos t + e^2\sin^2 t + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^i}{(i-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{i-2}\sin^i t}{\mathrm{d}t^{i-2}}. \tag{4}$$

Laplace reprend l'expression linéarisée qu'il a obtenue dans la *Mécanique céleste*, et il exprime finalement r par une série dont nous pouvons noter le terme général

$$s_i = \frac{e^i}{(i-1)!\,2^{i-1}} \sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]} (-1)^k C_i^k (i-2k)^{i-2}\cos(i-2k)t.$$

Ce terme est majoré par

$$S_i = \sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]} u_{ik} = \frac{e^i}{(i-1)!\,2^{i-1}} \sum_{k=0}^{[\frac{i-1}{2}]} C_i^k (i-2k)^{i-2}.$$

Laplace va avoir recours à des méthodes déjà utilisées dans la *Théorie des probabilités* [Laplace 1820]. Pour un indice i donné, il détermine le plus grand des termes u_{ik} qui constituent S_i. Soit u_{im} ce terme maximal. Remplacer la somme S_i par cet unique terme u_{im} aurait reproduit l'erreur de Lagrange. Laplace, au contraire, assimile S_i à la somme d'une série pour en donner finalement une évaluation sous forme d'intégrale

$$u_m \int_{-\infty}^{+\infty} c^{-\frac{i^3 t^2}{2m(i-m)(i-2m)^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Le calcul de cette intégrale permet ensuite de déterminer la condition de convergence de la série (4)

$$e \leq 0,66195.$$

[24] Comme dans le texte de Laplace, la lettre e représente l'*excentricité* de la trajectoire elliptique, et la lettre c la base des logarithmes népériens.

L'*anomalie vraie* est étudiée de façon semblable et Laplace trouve pour e la même condition. Il peut constater que cette condition est vérifiée pour la trajectoire de toutes les planètes.

Cette étude ne figure pas dans la première édition de la *Mécanique céleste*. Mais on la trouve dans les éditions posthumes, où les éditeurs ont ajouté un *Supplément*, imprimé d'après le manuscrit retrouvé dans les papiers de Laplace.

4.3. Le point de vue formel et le point de vue numérique

La démarche globale reste sous-tendue par la conception qui prévaut aussi dans le mémoire de Lagrange en 1770. Deux étapes se trouvent nettement séparées : d'abord la détermination, dans un cadre formel, du terme général d'une série; puis, sur l'expression ainsi obtenue, l'étude de convergence. Dans l'article *séries* du *Supplément* à l'*Encyclopédie*, Condorcet distingue les deux aspects, numérique et formel, sous lesquels une série peut être considérée. On peut la regarder «*d'abord comme étant la valeur d'une certaine quantité, alors il faut que la série soit convergente; et dans ce cas, plus on prend de termes, plus la somme approche de la grandeur cherchée*». Mais l'aspect formel n'est pas concerné par ce problème de convergence : «*on peut encore regarder une série comme l'expression d'une quantité quelconque, expression assujettie à une certaine forme*»; les termes de la série «*suivent entre eux une certaine loi*» et la problématique du «*formel*» est d'établir un lien entre la connaissance de cette loi et la connaissance de la fonction qui, «*développée en série, aurait produit la série donnée*». Lacroix exprime un point de vue voisin, il établit un *distinguo* entre les termes *valeur* et *développement*, et il souligne que les séries ne donnent pas toujours «*la valeur des fonctions auxquelles elles appartiennent*» [Lacroix 1810, p. 4]; comme de nombreux auteurs de cette époque, Lacroix appuie son propos sur la prise en considération de la série

$$1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \cdots.$$

Cette série ne donne pas toujours la vraie valeur de la fonction $y = \dfrac{a}{a-x}$. Mais, si l'on considère l'équation

$$a - (a-x)y = 0$$

vérifiée par la fonction y, on peut, sans aucune restriction, substituer à y son développement car «*on verra que, quelque loin qu'on pousse le calcul, les termes se détruisent toujours*» [*Ibid.*, p. 5][25]. La possibilité de remplacer une fonction par une série n'est donc pas assujettie à la convergence de la série. L'adéquation de la série à la fonction qu'elle représente résulte du seul procédé de calcul formel par lequel cette série a été obtenue, cette adéquation est garantie par l'expression correcte du terme général : «*pour employer avec sécurité un développement analytique, il n'est besoin que de s'assurer de la régularité de la série qui l'exprime, c'est-à-dire de bien contrôler la loi suivant laquelle se forment tous ses termes*» [*Ibid.*]. Vient ensuite, le cas échéant, le passage aux séries numériques : le calcul des «*valeurs approchées de la quantité dont* [*elles*] *dérivent*» [*Ibid.*] amène à se poser la question de leur convergence et de la comparaison entre ces valeurs approchées et la vraie valeur. La tentative de Lagrange pour majorer le reste de la série de Taylor témoigne bien de cette préoccupation[26]. Mais dans le cas où les séries expriment les fonctions implicites que sont les racines d'une équation, aucune expression n'est disponible pour témoigner de la vraie valeur. Il est plus difficile de formuler le problème et l'on comprend que, pour Lagrange et Laplace, l'étude numérique ait pu se trouver restreinte à la seule étude de convergence.

C'est dans ce contexte qu'intervient la critique de Cauchy. D'abord, l'autonomie et la validité de l'étape formelle sont remises en cause. Selon les principes auxquels il se soumet dans l'*Analyse algébrique* [Cauchy 1821], il faut que «*les différentes formules ne représentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution des nombres aux quantités elles-mêmes*» [*Ibid.*, p. iij]. La remise en cause va rapidement concerner la formule de Taylor : dans la suite du cours de Cauchy, elle ne sera écrite qu'avec un nombre fini de termes et complétée par un reste écrit sous la forme d'une intégrale[27]. Quant à la *série* de Taylor, sa convergence ne garantit

[25] Le point de vue rapporté ci-dessus à propos de la série géométrique et que l'on trouve sous la plume de Lacroix, est exprimé dans des termes semblables par Lagrange dans l'« Addition aux nouvelles recherches sur la propagation du son » [1762, p. 323]. Sur l'ensemble de ce problème, il faut aussi citer la position d'Euler [1760] concernant la somme d'une série divergente.

[26] Voir l'analyse de J.-L. Ovaert [Houzel 1987].

[27] Voir le *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* [Cauchy, *Œuvres* (II) 4, p. v et 145].

pas son aptitude à donner la valeur de la fonction dont elle est issue, puisque la fonction e^{-1/x^2} donne naissance à une série de Taylor dont la somme est identiquement nulle [Cauchy, *Œuvres* (II) 4, p. 229]. Les théorèmes obtenus en remplaçant systématiquement une fonction par une série entière doivent être réexaminés. Se trouvent d'abord concernés des résultats sur les équations différentielles : à certains d'entre eux Cauchy oppose des contre-exemples [Cauchy 1822][28].

Les démonstrations de la formule de Lagrange, et leur articulation avec les études de convergence, vont finir, elles aussi, par être confrontées aux exigences nouvelles. Dans un mémoire présenté à Turin en 1831, Cauchy donnera sa propre solution au problème [Cauchy 1841]. Mais il commencera par un constat qui concerne en particulier la façon dont le problème de Kepler se trouve résolu. La première édition de la *Mécanique céleste* de Laplace a été terminée en 1825 ; à sa lecture, «*on ne trouve nulle part une démonstration suffisante de la formule de Lagrange, qui sert pourtant de base à la plupart des théories exposées dans cet Ouvrage*» [Cauchy, *Œuvres* (II) 12, p. 48]. Et les éléments de la critique apparue en 1822 à propos des équations différentielles s'appliquent alors aux fonctions implicites : les démonstrations sont insuffisantes, notamment «*parce qu'on ne s'est point attaché à démontrer que les développements obtenus avaient pour sommes les fonctions développées*» [*Ibid.*, p. 50]. Un théorème sur les fonctions implicites fournira les principes dont relèverait une démonstration rigoureuse, et précisera du même coup les étapes de la méthode à mettre en œuvre. Soit une fonction $u(x)$ déterminée par une équation $f(x,u) = 0$ et telle que $u(0) = u_0$. Cette fonction est supposée développée, par une méthode formelle[29], en une série entière $\sum a_n x^n$; la série doit évidemment converger, mais la somme de cette série ne représente $u(x)$ que si la fonction $f(x,u)$ est «*elle-même développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la variable x et de la différence $u - u_0$*» [*Ibid.*, p. 55].

La voie qui s'ouvre ainsi offre donc aux méthodes anciennes un prolongement conforme au nouveau cours de la rigueur. Mais les travaux que

[28] Lire à ce sujet Ch. Gilain [1981, p. XXXVIII].

[29] Le mot *formel* ne fait pas partie du vocabulaire de Cauchy, mais, en termes actuels, il qualifie bien une façon d'obtenir la série au moyen de «*la formule de Maclaurin, la formule de Lagrange, etc., ou, ce qui revient au même, par la méthode des coefficients indéterminés*» [*Ibid.*, p. 55].

Cauchy présente à Turin dès 1831 prennent une toute autre direction et sont appuyés sur d'autres moyens.

5. CAUCHY ET LE CALCUL DES LIMITES

5.1. Les mémoires de Turin

Cauchy a présenté le 11 octobre 1831, devant l'Académie de Turin un résumé introductif : «*sur la Mécanique Céleste et sur un nouveau calcul qui s'applique à un grand nombre de questions diverses*». Par la suite, ce qu'il est convenu d'appeler le *premier mémoire de Turin* fera l'objet de publications partielles à des dates diverses[30]. En ce qui concerne la série de Lagrange, une publication de 1841 donne l'essentiel des résultats.

Au constat théorique que nous avons relaté, Cauchy joint, dès l'introduction, des arguments pratiques. Les astronomes se contraignent à des calculs inutilement longs parce qu'ils ne maîtrisent pas les incertitudes numériques liées à l'utilisation des développements en séries. Il s'agit de faire face à ces difficultés théoriques et pratiques, en mettant en œuvre des méthodes de majoration : c'est ce que Cauchy appelle le *Calcul des limites.* À l'intérieur du premier mémoire de Turin, ce calcul utilise des notations spécifiques, adaptées aux domaines circulaires systématiquement utilisés pour la variable imaginaire. Celle-ci est supposée écrite à l'aide du module X et de l'argument p sous la forme $\bar{x} = X\,\mathrm{e}^{p\sqrt{-1}}$. Pour une fonction donnée f, la notation $\Lambda f(\bar{x})$ va désigner «*la plus grande valeur que ce module puisse acquérir quand on y fait varier l'angle p sans changer le module X*» [Cauchy, *Œuvres* (II) 12, p. 63].

Cauchy va tirer parti des nombreux moyens dont il dispose dans le cadre des fonctions de variable imaginaire. Pour les valeurs de z contenues dans le disque $|z| < Z$, la somme des *résidus* de la fonction φ a reçu une notation particulière et elle peut être exprimée au moyen d'une intégrale

$$(1) \qquad {}^{(Z)}_{(0)}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{(\pi)}_{(-\pi)}\big[\varphi(z)\big]_z = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}\varphi(\bar{z})\,\mathrm{d}p.$$

[30] B. Belhoste [1991, p. 274] a fait une analyse bibliographique de ces diverses publications. Il relate aussi de façon détaillée les circonstances du séjour de Cauchy à Turin [*Ibid.*, p. 143–158].

Dans le cas où une fonction a un pôle d'ordre n en $z = 0$, son résidu en ce point peut s 'écrire au moyen d'une dérivée d'ordre $n - 1$

$$\frac{D_z^{n-1}\left[z^n \varphi(z)\right]\Big|_{z=0}}{(n-1)!}. \tag{2}$$

Cauchy pourra jouer de ces différents moyens selon la nature du résultat escompté. Par exemple une intégrale fournira facilement une majoration, tandis que les dérivées permettront de retrouver la forme habituelle des séries de Taylor ou de Lagrange.

Pour la série de Taylor, le calcul suivant, écrit pour $|x| = \xi < X$, est devenu classique

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \,\mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n} \,\mathrm{d}p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!} f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Une fois exprimé à l'aide d'une intégrale, le terme général est facilement majoré par $\left(\dfrac{\xi}{X}\right)^n \Lambda f(\bar{x})$. Et la série est majorée par la série géométrique qui a respectivement pour somme et pour reste

$$\frac{X}{X-\xi} \Lambda f(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda f(\bar{x}).$$

Ces méthodes permettent non seulement de démontrer la formule avec rigueur mais aussi de «*fixer les limites des erreurs que l'on commet en négligeant les restes qui doivent compléter les séries*» [*Ibid.*, p. 54].

La démonstration de la formule de Lagrange va concerner les racines y de l'équation :

$$f(x, y) = 0. \tag{3}$$

Notons $y_1, y_2, \ldots, y_m$, celles d'entre elles qui sont comprises dans un domaine D. Pour une fonction F donnée, Cauchy dispose d'une relation qui utilise la somme des résidus contenus dans le domaine D

$$F(y_1) + F(y_2) + \cdots + F(y_m) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \left[\frac{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}{f(x,y)} F(y) \right]_y. \tag{4}$$

Cette relation a un double intérêt. Elle va permettre de localiser les racines. Ensuite, dans le cas où le domaine D contient une racine unique y par exemple, elle fournira une expression à une fonction (y ou $F(y)$) qui restait jusqu'alors *implicite*. En cela, le problème de la série de Lagrange ne se distinguera plus beaucoup de celui de la série de Taylor.

Cauchy réussit en effet à comparer le nombre de racines de l'équation (3) au nombre de racines de

$$f(0,y)=0. \tag{5}$$

Dans le cas où x est choisi suffisamment petit pour que l'on puisse écrire, pour $|y-b|=Z$, un développement en série entière convergente

$$\log\frac{f(x,y)}{f(0,y)}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n u_n(y), \tag{6}$$

les équations (3) et (5) ont le même nombre m de solutions à l'intérieur du disque $|z|=|y-b|<Z$. En particulier, si ce nombre est $m=1$, les solutions de (3) et (5) (respectivement notées y et β) sont liées par une relation que l'on peut déduire de (4)

$$F(y)=F(\beta)-\sum_{n=1}^{\infty}x^n\, {}_{(0)}^{(Z)}\boldsymbol{\mathcal{E}}_{(-\pi)}^{(\pi)}\big[F'(b+z)u_n(b+\bar z)\big]_z. \tag{7}$$

La formule de Lagrange est obtenue dans le cas où l'équation (3) devient

$$y-b-x\,\omega(y)=0. \tag{8}$$

Le développement (6) s'écrit alors

$$\log\frac{y-b-x\omega(y)}{y-b}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\Big(\frac{\omega(b+z)}{z}\Big)^n. \tag{9}$$

Le terme général $u_n(z+b)$ est devenu

$$u_n(z+b)=\frac{1}{n}\Big(\frac{\omega(b+z)}{z}\Big)^n. \tag{10}$$

Cependant, l'équation (5) se réduit à $y-b=0$, elle a donc une unique solution, égale à b. Pourvu que la condition d'existence et de convergence du développement (9) soit satisfaite, l'équation (3) aura aussi une unique solution y, laquelle va vérifier la relation (7). Le calcul de résidu qui apparaît en (7) concerne le seul pôle, d'ordre n, de la fonction u_n. La formule (2) permet d'obtenir le terme général de la série de Lagrange

$$\mathop{\mathcal{E}}\nolimits_{(0)}^{(Z)}{}_{(-\pi)}^{(\pi)} \big[F'(b+z)u_n(b+z)\big]_z = \frac{1}{n\,!} D_b^{n-1}\big\{F'(b)[\omega(x)(b)]^n\big\}.$$

Le résultat est valide si la série (9) est convergente. Pour $|y-b| = Z = |\bar{z}|$, la convergence sera assurée si x vérifie l'inégalité

$$|x|\Lambda\Big(\frac{\omega(b+\bar{z})}{\bar{z}}\Big) < 1.$$

Pour rendre acceptables les valeurs les plus grandes possibles pour $|x|$, on peut disposer de Z, et le choisir de façon que

$$\Lambda\Big(\frac{\omega(b+\bar{z})}{\bar{z}}\Big) \tag{11}$$

soit le plus petit possible. Cauchy appelle *module principal* de la fonction $\dfrac{\omega(b+z)}{z}$, la quantité (11) minimale ainsi obtenue[31]. Ce module principal permet de délimiter, pour x, un disque à l'intérieur duquel se trouve vérifiée une double condition : l'équation admet une solution unique y et cette solution est développable en série entière convergente en x. Des formules permettant de majorer les restes des séries obtenues sont également données. Dans un autre document, Cauchy relie la condition de convergence à l'apparition des racines multiples de l'équation : le développement de y reste convergent jusqu'à ce que $|x|$ atteigne une valeur pour laquelle l'équation présente une racine multiple [Cauchy 1837].

Dans le cas du problème de Kepler, l'équation (8) devient

$$b - y + xsiny = 0.$$

Le résultat de Laplace se trouve à la fois précisé et rigoureusement démontré : pour $x < 0,667742\ldots$ l'équation a une unique solution vérifiant la condition $|y-b| < 1,119678\ldots$ et cette solution, qui définit l'anomalie

[31] La notion de *module principal* est introduite par Cauchy en 1829. La définition de 1829 indique que le module principal de la fonction $\varphi(z)$ est la valeur de $\Lambda\varphi(\bar{z})$ obtenue pour un module Z de $\bar{z}$ pour lequel l'équation $\varphi'(\bar{z}) = 0$ a une solution [Cauchy, *Œuvres* (I) 2, p. 31]. Voir ci-dessous § 5.2.

excentrique dans le mouvement des planètes, admet un développement en série entière convergente en x.

Cauchy a présenté le 27 novembre 1831 le *deuxième mémoire de Turin* [*Œuvres* (II) 15, p. 182–261]. Une partie de son contenu concerne encore le développement des racines en série entière. Les intégrales y sont définies sur des contours fermés quelconques. Dans le premier mémoire de Turin, l'argumentation était souvent redondante ; elle est, cette fois, plus sobre et plus efficace. L'étude s'oriente vite vers les équations *algébriques*, dont certaines propriétés sont établies par le moyen des séries. Le caractère le plus original de ce mémoire réside dans l'introduction de la notion d'*indice*, notion étroitement liée aux intégrales, et utilisée pour étudier les racines réelles des équations algébriques[32].

5.2. Éléments d'une genèse

Les mémoires de Turin témoignent d'une grande habileté dans l'agencement des différents moyens de calcul, au sein d'une architecture solide et cohérente. Ils ne constituent pas la première tentative de Cauchy pour développer en série les racines des équations. Trois études antérieures peuvent être décrites de façon précise.

On distingue d'abord deux écrits, enchaînés par une même logique, et qui constituent un prolongement des méthodes utilisées par Lagrange. Le premier est un article [Cauchy 1826] de onze pages dont l'objectif ultime est la démonstration, dans toute sa généralité, de la formule[33]

$$\big[(\Psi\Phi)' f^n\big]^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\Psi' f^{n-k})^{(n-k-1)} (\Phi' f^k)^{(k-1}. \tag{12}$$

Elle est obtenue au moyen des résidus dans des calculs purement formels. Un paragraphe d'un mémoire ultérieur [Cauchy 1829b] peut être considéré comme la suite de cet article. En posant *a priori*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n\,!} \, \frac{\mathrm{d}^{n-1}\big[\omega(x)\big]^n}{\mathrm{d}x^{n-1}} \, ,$$

la formule (12) permet en effet à Cauchy de montrer, par un calcul formel, que X est solution de l'équation

$$X - x - h\omega(X) = 0.$$

[32] H. Sinaceur [1991, p. 110–123] traite ces questions, en particulier dans un chapitre consacré à Cauchy.

[33] Voir supra § 3.1.

Cette démarche n'est pas nouvelle, elle est contenue dans les travaux de Lagrange. L'étude de convergence, menée sur le seul cas des équations trinômes n'apporte rien de nouveau non plus. Mais Cauchy considère probablement ce type de calcul comme un point de départ possible pour l'application de ses principes généraux de passage du *formel* au *numérique.* En 1840, il placera parmi les démonstrations rigoureuses, et sur le même plan que les démonstrations de Turin, «*celles où l'on commence par faire voir que la multiplication de deux séries semblables à la série de Lagrange reproduit une série de la même forme*» [Cauchy, *Œuvres* (II) 11, p. 332].

La partie la plus longue de ce mémoire de 1829 constitue un apport propre de Cauchy. Elle contient une démonstration, dans laquelle figurent déjà plusieurs techniques annonciatrices des mémoires de Turin : elle débute avec le développement en série de $\log[z - x - h\omega(z)]$, le terme général de la série de Lagrange est obtenu à partir d'un résidu et par des calculs dont la forme est proche de celle que l'on observe dans les mémoires de Turin. Mais, les fonctions de variable imaginaire ne sont pas du tout sollicitées. Et, malgré des expressions trouvées pour le *reste* de la série, aucune conclusion n'est obtenue quant à la convergence.

Enfin, un mémoire lu à l'Académie en 1827, et publié en 1829, affronte directement le problème de la convergence. Cauchy y fait référence aux résultats que Laplace a obtenus pour les solutions du problème de Kepler [Laplace 1827] ; et il définit un objectif plus large : «*je me suis demandé s'il n'était pas possible de fixer généralement les conditions de convergence de la série de Lagrange et des formules du même genre que j'avais obtenues à l'aide des résidus*» [Cauchy, *Œuvres* (I) 2, p. 30]. Un premier calcul concerne la «*détermination approximative de l'intégrale*

$$S = \int_{x_0}^{x_1} u^n v \, \mathrm{d}x \tag{13}$$

u et v désignant des fonctions réelles ou imaginaires de la variable x et n un nombre très considérable» [*Ibid.*, p. 33]. Ce résultat est appliqué à l'étude de la convergence de la série dont le terme général est défini *a priori* par

$$S_n = \frac{1}{m!} \, \frac{\mathrm{d}^m \left[\varphi(t)[\omega(t)]^n\right]}{\mathrm{d}t^m} \, .$$

La comparaison avec la formule (13) est réalisée en interprétant la dérivée d'ordre m au moyen d'une intégrale prise sur un contour circulaire. La condition de convergence porte sur le module principal de la fonction

$$\frac{\omega(t+x)}{x^{\mu}}.$$

Au total la démonstration est acquise par des transformations de quantités en quantités *sensiblement égales*; des séries sont arrêtées à leurs premiers termes sans majoration précise de l'erreur commise. Certains des instruments utilisés dans les mémoires de Turin — intégrale sur un contour circulaire, module principal — sont présents, mais les résidus ne sont pas employés pour l'expression directe des racines. Par ailleurs, l'ambition affichée est restreinte : même dans le cas où la série est convergente, on ne pose pas la question de savoir si sa somme est bien racine de l'équation dont elle provient.

Considérés ensemble, les deux mémoires publiés en 1829 présentent, en des assemblages encore disparates, plusieurs des matériaux qui vont constituer les mémoires de Turin. Ils font aussi apparaître les spécificités des mémoires de Turin. En 1831, c'est la représentation systématique des racines (ou des fonctions semblables des racines) par des résidus et par des intégrales définies dans le plan complexe qui joue un rôle décisif. Elle permet d'effectuer les calculs sur des racines bien localisées dans des domaines de ce plan, et reliées numériquement aux développements obtenus. Ces développements ont leur origine dans la série géométrique (pour la formule de Taylor) ou dans la série qui représente $\log(1+x)$ (pour la formule de Lagrange). L'utilisation de ces séries particulières évite toute phase formelle ou heuristique dans la détermination des coefficients généraux. Ceux-ci sont le résultat d'un calcul direct fondé sur des égalités numériques. La possibilité de traduire les résultats au moyen d'intégrales donne prise de façon simple aux techniques de majoration déployées dans le cadre du *calcul des limites*. Dans l'étude de convergence, se trouve éliminé tout recours aux *quantités sensiblement égales* que l'on trouvait dans les démonstrations de Lagrange et de Laplace, et encore sous la plume de Cauchy en 1829.

5.3. Le cadre théorique

Les propriétés requises des fonctions développées en série dans les mémoires de Turin sont assez vite l'objet d'une incertitude. Ainsi un des premiers énoncés rencontrés se trouve complété, dans la publication de 1841 par l'adjonction d'une parenthèse : «*la fonction* $f(x)$ *sera* *développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction (ou sa dérivée du premier ordre) cesse d'être finie et continue*» [1841, p. 61]. Cauchy n'est d'ailleurs pas complètement convaincu du bien-fondé de cette adjonction et la classe des fonctions de variable imaginaire sur lesquelles portent ses calculs reste longtemps l'objet d'une hésitation. En 1839, il avait indiqué que cette précaution est sans doute conforme à la rigueur, mais que, dans les faits, le développement en série de la dérivée f' reste soumis aux mêmes conditions que celui de la fonction f [Cauchy, *Œuvres* (I) 4, p. 490].

Les bases sur lesquelles sont utilisés les résidus auront aussi à être remises en question. Dans le premier tome des *Exercices de mathématiques*, en 1826, l'avertissement associe étroitement le nouveau *calcul des résidus* et ces applications possibles à la série de Lagrange [*Œuvres* (II) 6, p. 10]. Le contenu de ce premier tome semble orienté vers la démonstration formelle que nous avons déjà relatée. En cela, il est cohérent avec une définition du résidu comme coefficient de ε^{-1} dans le développement de $f(x+\varepsilon)$. Cauchy reviendra de façon explicite sur cette conception qui présentait une analogie avec la façon dont Lagrange définissait la dérivée première comme le coefficient de ε [Cauchy, *Œuvres* (I) 12, p. 433]. En prenant ce que nous appelons les *fonctions holomorphes* comme objet central de la théorie, il pourra faire dépendre des *intégrales* la définition les résidus.

CONCLUSION

En présentant dans son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* deux démonstrations successives de la formule de Lagrange, Lacroix [1810, p. 286] souligne : «*elle fait époque par rapport aux développements des fonctions en série*». Le mémoire de 1770 utilise les dérivées avant même que le mot soit introduit ; il annonce des systèmes théoriques fondés sur le développement des fonctions en série et sur la dérivation, il est représentatif d'une époque où l'analyse tente de se présenter comme une extension de l'algèbre. D'une façon générale, Lagrange a apporté un « style » et une mise en ordre formelle auxquels il sera ensuite difficile de se soustraire. Tout en réintroduisant les limites dans le cours d'Analyse, Lacroix devra ainsi s'employer à «*donner aux formules cette symétrie* *qui les fait presque deviner, et dont les écrits de Lagrange offrent tant d'exemples*» [*Ibid.*, p. XLVIII].

Lagrange et ses émules immédiats ont-ils produit des *démonstrations*? Leurs calculs sont, le plus souvent, impossibles à transposer dans un cadre théorique acceptable pour un mathématicien du XX^{e} siècle. Ils sont le reflet des méthodes et des exigences de leur temps. Cependant, très tôt, le terme d'*induction* est employé à leur propos. Ayant donné sa propre démonstration, Laplace utilise ce mot pour qualifier la démonstration de 1770. Lacroix lui emboîte le pas : «*M. Laplace a démontré ce théorème qui n'était encore appuyé que sur une sorte d'induction*» [Lacroix 1810, p. XXVII]. Il faut distinguer entre les éléments qui peuvent fonder ce jugement. Il y a, dans la démonstration de 1770, l'usage de séries non nécessairement convergentes. Pour Cauchy, cet usage, d'une façon générale, ne relèvera effectivement que «*d'inductions propres à faire quelquefois pressentir la vérité*» [Cauchy, *Œuvres* (II) 3, p. III], mais l'exigence de Lacroix ou de Laplace ne relève pas de ce domaine. Il y a la décomposition d'une série en produit de facteurs linéaires, qui est effectivement une généralisation non fondée des propriétés des polynômes. Il y a enfin le calcul lui-même, tel qu'il est développé par Lagrange : les séries y sont systématiquement décrites par leurs premiers termes et les résultats ainsi obtenus sont ensuite généralisés à un terme quelconque. De ce point de vue, il semble que, si les calculs de 1770 présentent bien une *forme inductive*, leur *structure complète* (pas seulement les *résultats* tels qu'ils sont traduits par Lagrange) puisse faire l'objet d'une généralisation. Ce type de remarque ne vaut pas uniformément pour toutes les inductions que nous avons rencontrées. Elle ne s'applique pas à la méthode utilisée en 1798 pour démontrer la régularité du produit de deux *séries de Lagrange*. Les travaux examinés ici font apparaître la fin du XVIII^{e} siècle comme une période charnière pendant laquelle des exigences plus fortes se sont affirmées quant au calcul sur les termes généraux des séries ou quant au raisonnement par récurrence. Enfin parler, comme le fait Laplace [*Œuvres* IX, p. 330], du «*beau théorème que M. de la Grange a trouvé par induction*», c'est aussi reconnaître la part d'*invention* que contient la démarche de Lagrange ; l'écriture du résultat final n'est pas celle que Lambert avait obtenue, elle n'est pas non plus la conséquence inéluctable des calculs qui l'ont précédée. C'est le regard propre du mathématicien qui *introduit* lui-même la régularité là où les autres ne l'ont pas vue.

La plupart des démonstrations formelles du *théorème de Lagrange* s'appuient sur la formule de Taylor. C'est avec ce rôle que celle-ci fait son apparition dans le *Supplément* de l'*Encyclopédie.* Objet d'une même révérence pour leur régularité formelle, les deux séries de Taylor et de Lagrange ne se prêtent pas de façon identique aux tentatives de passage au numérique. Lagrange peut envisager dès 1798 l'étude du *reste* de la série de Taylor. Dès 1823 et dans le cas d'une variable réelle, Cauchy peut imposer des conditions pour que cette série représente bien la fonction dont elle est issue. Mais pour la série de Lagrange, les résultats significatifs ne sont obtenus qu'en utilisant les fonctions de variable imaginaire.

En considérant l'analyse combinatoire allemande, le calcul des dérivations d'Arbogast, les travaux de Français et de Servois, on constate que la formule de Lagrange se trouve insérée dans des démarches théoriques qui accordent une attention croissante aux formes du calcul et aux propriétés des opérations. En Angleterre et en Allemagne, ce type de préoccupations alimentera un courant formaliste qui, dans les deux pays, concernera à la fois les mathématiques, la philosophie et l'enseignement[34]. Cauchy est aussi confronté à cet héritage. Il utilise très tôt la formule de Fourier pour traduire sur des *puissances* les propriétés des dérivées[35]. La formule intégrale de Cauchy est aussi utilisée dans ce sens. Dans les mémoires de Turin, les dérivées successives constituant les formules de Taylor ou de Lagrange se trouvent, de fait, en relation avec les puissances qui interviennent dans la série géométrique ou dans le développement de $\log(1+x)$.

Mais on sort là du registre purement formel. Et, dans ces mémoires, l'écriture des racines au moyen d'intégrales sert justement à établir des égalités qui puissent, à chaque pas, garder une traduction *numérique.* Cauchy, en 1831, n'a même pas à utiliser la phase d'heuristique formelle qu'il envisage dans un préambule[36]. Quelque quinze années se sont

[34] Cette évolution est analysée par Friedelmeyer [1994]. Pour l'Angleterre, on peut consulter l'article de M.-J. Durand [1990] et pour l'Allemagne celui de H.-N. Jahnke [1993].

[35] Voir à ce sujet l'article de S.S. Petrova [1993].

[36] Cette étape, pendant laquelle on suspend provisoirement la condition de convergence sera présente seulement dans le mémoire de Prague, quand il s'agira de traiter les solutions des équations différentielles [Cauchy 1835].

écoulées depuis les travaux de Français ou Servois. On mesure l'importance du chemin que Cauchy a parcouru de façon originale[37]. Dans cette évolution nous avons signalé deux étapes extrêmes. D'un côté, il y a une réflexion sur les démonstrations de ses prédécesseurs, avec, le cas échéant, les compléments qu'elles appellent. À l'autre extrémité, les mémoires de 1829 préfigurent peut-être les mémoires de Turin. Mais ces derniers présentent leurs apports propres. En particulier, l'expression des racines par des intégrales ou des résidus du domaine complexe — en se combinant avec les moyens employés dès 1829 — vient jouer un rôle décisif. Une étude plus complète de la genèse des mémoires de Turin devrait prendre en considération les nombreux mémoires que Cauchy a consacrés au calcul des racines à l'aide des intégrales. Intégrales et séries y sont parfois mises au service d'objectifs purement algébriques. Mais finalement, avec les fonctions de variable imaginaire, c'est à l'intérieur d'un système théorique propre à l'analyse que la formule de Lagrange vient prendre place. Elle y trouve une rigueur et une efficacité qui vont occulter pour longtemps un point de vue formel, proche de l'algèbre et dont la fécondité, en 1840, est loin d'être épuisée.

[37] Pour la même période, voisine de 1830, l'originalité de la démarche de Cauchy se révèle aussi par la comparaison avec l'article de Jacobi [1830].

BIBLIOGRAPHIE

ALEMBERT (Jean Le Rond d')

[1748] Recherches sur le calcul intégral, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin 1746* (1748), p. 182–224.

[1754] *Recherches sur différents points importants du système du monde*, Paris : chez David l'aîné, 1754.

[1765a] Parallélogramme, article de l'*Encyclopédie*, t. XI, Neufchatel, 1765.

[1765b] Retour des suites, *Ibid.*, t. XVI, Neufchatel, 1765.

BELHOSTE (Bruno)

[1991] *Augustin-Louis Cauchy — a Biography*, New York : Springer Verlag, 1991.

BOTTAZZINI (Umberto)

[1989] Lagrange et le problème de Kepler, *Revue d'histoire des sciences*, XLII (1989), p. 27–44.

CANTOR (Moritz)

[1908] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (vierter Band), Leipzig : Teubner, 1908.

CAUCHY (Augustin-Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes*, 27 vol. en deux séries, Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974.

[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, 1e partie : Analyse algébrique*, Paris : chez Debure frères, 1821 ; *Œuvres* (II) 3.

[1822] Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles, *Bulletin de la Société Philomatique* (1822), p. 49–54 ; *Œuvres* (II) 2, p. 276–282.

[1823] *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, tome 1er, Paris : chez Debure frères, 1823 ; *Œuvres* (II) 4.

[1824] Sur la résolution analytique des équations de tous les degrés par le moyen des intégrales définies, *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, IV (1819–20), p. XXVI–XXIX ; *Œuvres* (I) 2, p. 9–11.

[1826] Application du calcul des résidus à la sommation de plusieurs suites ; *Œuvres* (II) 6, p. 62–73.

[1829a] Mémoire sur divers points d'analyse, *Ibid.* VIII (1829), p. 101–129, (lu le 3 septembre 1827) ; *Œuvres* (I) 2, p 29–58.

[1829b] Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances de h, ζ étant racine de l'équation $z - x - h\varpi(z) = 0$, *Ibid.*, p. 130–138 ; *Œuvres* (I) 2, p. 59–66.

[1835] Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, *Exercices d'analyse et de physique mathématique* I (1840), p. 327–384 ; *Œuvres* (II) 11, p. 399–465.

[1837] Ie lettre de M. Cauchy sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, IV (1er sem. 1837), p. 773-783 ; *Œuvres* (I) 4, p. 48–60.

[1839] Mémoire sur l'intégration des équations différentielles des mouvements planétaires, *C. R. Acad. sci. Paris*, IX (2e sem. 1839), p. 184–190 ; *Œuvres* (I) 4, p. 483–490.

[1841] Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites (lu à l'Acad. de Turin le 11 oct 1831) ; *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, II (1841), p. 169–183 ; *Œuvres* (II) 12, p. 48–112.

[1844] Sur les séries multiples et sur les séries modulaires, *C. R. Acad. sci. Paris*, XIX (2e sem. 1844), p. 1375–1377 ; *Œuvres* (II) 8, p. 375–378.

[1846] Rapport sur un mémoire qui a été présenté à l'Académie par M. Félix Chio et qui a pour titre : Recherches sur la série de Lagrange, *C. R. Acad. sci. Paris*, XXIII (2e sem. 1846), p. 490–493 ; *Œuvres* (II) 12, p. 110–123

[1852] Rapport sur de nouvelles recherches relatives à la série de Lagrange, et présentées à l'Académie, par M. Félix Chio de Turin, suivi de Notes jointes au rapport et rédigées par le rapporteur, *C. R. Acad. sci. Paris*, XXXIV (1852), p. 304–319 ; *Œuvres* (I) 11, p. 414– 437.

[1857] Théorie nouvelle des résidus, *C. R. Acad. sci. Paris*, XLIV (1857), p. 406–416 ; *Œuvres* (I) 12, p. 433–444.

[1974] Mémoire sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites et sur les avantages qu'offrent ces deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques et transcendantes, *texte lithographié présenté à l'Académie de Turin le 27 novembre 1831* ; *Œuvres* (II) 15, p. 182–261.

Chabert (Jean-Luc) *et al.*

[1993] *Histoire d'algorithmes — du caillou à la puce*, Paris : Belin, 1993.

Chio (Félix)

[1854] Recherches sur la série de Lagrange, *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut impérial de France et imprimés sur son ordre*, t. XII (1854), p. 340–468.

Comtet (Louis)

[1970] *Analyse combinatoire*, 2 vol., Paris : Presses Universitaires de France, 1970.

Condorcet (Jean-Antoine Caritat, Marquis de)

[1776a] Approximation ; article du *Supplément à l'Encyclopédie*, t. I, Amsterdam, 1776.

[1776b] Équation, *Ibid.*, t. II, Amsterdam, 1776.

[1777] Séries, *Ibid.*, t. IV, Amsterdam, 1777.

[1784] Équation, article de l'*Encyclopédie méthodique ou par ordre de matières — Mathématiques*, Paris-Liège, 1784.

Cramer (Gabriel)

[1750] *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève, 1750.

Dieudonné (Jean)

[1986a] *Abrégé d'histoire des mathématiques*, Paris : Hermann, 1986.

[1986b] *Calcul infinitésimal*, Paris : Hermann, 1986.

Gua de Malves (Jean-Paul de)

[1740] *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés et affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.

[1744] Recherches du nombre des racines réelles ou imaginaires, réelles positives ou réelles négatives qui peuvent se trouver dans les équations de tous les degrés, *Mém. Acad. r. sci. 1741* (1744), p. 435–494.

Durand (Marie-José)

[1990] Genèse de l'algèbre symbolique en Angleterre : une influence possible de John Locke, *Rev. hist. sci.*, XLIII/2–3 (1990), p. 129–180.

EULER (Leonhard)
[*Opera*] *Leonardi Euleri Opera omnia*, 1e série, 27 vol., Leipzig : Teubner 1911–1956.
[1760] De seriebus divergentibus, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 5* (1754–55), p. 205–237 ; *Opera* (I) 14, p. 585–617
[1771] Observationes circa radices aequationum, E. 406, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 15* (1770), p. 51–77 ; *Opera* (I) 6 , p. 263–286.
[1783] De serie lambertina plurimisque eius insignibus proprietatibus, E. 532, *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* II (1779), p. 29–51 ; *Opera* (I) 6, p. 350–369.
[1789] Analysis facilis et plana ad eas series maxime abstrusas perducens, quibus omnium aequationum algebraicarum non solum radices ipsae, sed etiam quaevis earum potestates exprimi possunt, E. 631, *Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4 (1786), p. 55–73 ; *Opera* (I) 6, p. 384–424.
[1790] Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem, E. 64, *Ibid.* 6 (1788), p. 16–24 ; *Opera* (I) 6, p. 425–433.
[1801] Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non solum ipsas sed etiam quascumque earum potestates per series concinnas exprimendi, E. 711, *Ibid.* 12 (1794), p. 71–90 ; *Opera* (I) 6, p. 447–464.

FRANCAIS (Jacques-Frédéric)
[1813] Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, III (1812–1813), p. 244–272.
[1815] Du calcul des dérivations, ramené à ses véritables principes, ou théorie du développement des fonctions, et du retour des suites, *Ibid.*, VI (1815), p. 61–111.

FRIEDELMEYER (Jean-Pierre)
[1994] Le calcul des dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du XVIIIe siècle, *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, nouvelle série, n°43, 1994.

GILAIN (Christian)
[1981] *Équations différentielles ordinaires*, cours inédit de Augustin-Louis Cauchy (fragment), introduction de Ch. Gilain, Paris : Études vivantes, 1981.

HOUZEL (Christian) *et al.*
[1976] *Philosophie et calcul de l'infini*, Paris : Maspero, 1976.

ITARD (Jean)
[1984] *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis et publiés par Roshdi Rashed, Paris : Blanchard, 1984.

JACOBI (Carl Gustav Jacob)
[*Werke*] *C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke*, 8 vol., Berlin : Reimer, 1881–1891 ; rééd. New York : Chelsea, 1969.
[1830] De resolutione aequationum per series infinitas, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, VI (1830), p. 257–286 ; *Werke* VI, p. 26–61.

JAHNKE (Hans Niels)
[1993] Algebraic analysis in Germany, 1780–1840 : some mathematical and philosophical issues, *Historia Mathematica*, 20 (1993), p. 265–284.

LACROIX (Sylvestre-François)
[1810] *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (2e éd.), t. 1, Paris : Courcier, 1810.

LAGRANGE (Jean-Louis)

[*Œuvres*] *Œuvres de Lagrange*, J.-A. Serret et G. Darboux éd., 14 vol., Paris : Gauthier–Villars, 1867–1892.

[1754] *Lettera di Luigi De La Grange Tournier Torinese all'illustrissimo Signor Conte Giulio Carlo da Fagnano. etc.*, Torino : Stamperia reale, 1754 ; *Œuvres* VII, p. 583–588.

[1762] Addition aux nouvelles recherches sur la propagation du son, *Mélanges de philosophie et de mathématiques de la Société royale de Turin* 1760–61 (1762), p. 323–336 ; *Œuvres* I, p. 319–332.

[1769] Sur la résolution des équations numériques, *Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1767* (1769), p. 165–310 ; *Œuvres* II, p. 539–578.

[1770a] Addition au mémoire sur la résolution des équations numériques, *Ibid. 1768* (1770), p. 111–180 ; *Œuvres* II, p. 581–652.

[1770b] Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries, *Ibid.*, p. 251–328 ; *Œuvres* III, p. 5–73.

[1771a] Sur le problème de Kepler, *Ibid. 1769* (1771), p. 204–233 ; *Œuvres* III, p. 113–138.

[1771b] Sur l'élimination des inconnues dans les équations, *Ibid.*, p. 303–318 ; *Œuvres* III, p. 141–154.

[1772] Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-lettres de Berlin 1770* (1772), p. 134–215 ; *Œuvres* III, p. 205–304.

[1774a] Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, *Ibid. 1772* (1774), p. 185–221 ; *Œuvres* III, p. 441–476.

[1774b] Sur la forme des racines imaginaires, *Ibid.*, p. 222–258 ; *Œuvres* III, p. 479–516.

[1788] *Mécanique analytique*, Paris 1788 ; *Œuvres* XI et XII (4e éd.).

[1799] Discours sur l'objet de la Théorie des fonctions analytiques, *Journal de l'École Polytechnique*, 6e cahier, t. II, p. 232–235 ; *Œuvres* VII, p. 325–328.

[1813] *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse des quantités finies* 2e éd., 1813, Paris ; *Œuvres* IX, p. 11–421.

LAGRANGE (Jean-Louis) et LEGENDRE (Adrien-Marie)

[1799] Rapport sur deux mémoires d'analyse du professeur Bürmann (nivôse an VII), *Mémoires de l'Institut national des Sciences et Arts* II (fructidor an VII), Paris, p. 13–17.

LAMBERT (Jean-Henri)

[*Opera*] *Johannis Henrici Lamberti Opera Mathematica*, éd. Andreas Speiser, 2 vol., Zürich : Orell Füssli Verlag, 1946–1948.

[1758] Observationes variae in mathesin puram, *Acta helvetica*, 3 (1758), p. 128–168 ; *Opera* I, p. 16–51.

[1772] Observations analytiques, *Nouveaux mémoires de l'Académie … de Berlin 1770* (1772), p. 225–244 ; *Opera* II, p. 270–290.

LAPLACE (Pierre-Simon)

[*Œuvres*] *Œuvres complètes de Laplace*, 14 vol., Paris : Gauthier–Villars, 1878–1912.

[1780] Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites, *Mém. Acad. sci. 1777* (1780), p. 99–122 ; *Œuvres* IX, p. 313–335.

[1799] *Traité de mécanique céleste*, t. I, 1e éd., Paris : chez Duprat 1799 ; *Œuvres* I.
[1820] *Théorie analytique des probabilités*, livre II, 3e éd. ; *Œuvres* VII, p. 196–505.
[1827] Mémoire sur le développement de l'anomalie vraie et du rayon vecteur elliptique en séries ordonnées suivant les puissances de l'excentricité, *Mém. Acad. sci.*, VI (1823), p. 61–80 ; *Œuvres* XII, p. 549–566.

Lexell (Anders Johan)
[1772] Demonstratio theorematis analytici a celeb. Lagrange inventi, *Novi Commentarii Academicae Scientiarum Petropolitanae*, XVI (1771), p. 230–254.

Newton (Isaac)
[*Works*] *The mathematical papers of Isaac Newton*, 7 vol., éd. D.T. Whiteside, Cambridge : University Press, 1967–1976.
[*Correspondence*] *The correspondence of Isaac Newton*, 4 vol., éd. H.W. Turnbull (I,II,III) et J.F. Scott (IV), Cambridge : University Press, 1967–1976.

Oberlé (L.) *et al.*
[1979] *Colloque international et interdisciplinaire Jean-Henri Lambert* (Mulhouse, 26–30 septembre 1977), Paris : éditions Ophrys, 1979.

Petrova (Svetlana S.)
[1993] Cauchy et le calcul symbolique, *Sciences et techniques en perspective*, 26 (1993), p. 148–152.

Pfaff (Johann Friedrich)
[1794a] Analysis einer wichtigen Aufgabe des Herrn de la Grange, *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, I (1794), p. 81–84.
[1794b] Ableitung der Lokalformel für die Reversion der Reihen, aus dem Satze des Herrn de la Grange, *Ibid.*, p. 85–87.

Poinsot (Louis)
[1826] Analyse du traité de la résolution des équations numériques, reproduit (d'après un article de 1808 paru dans le *Magasin encyclopédique*) dans la troisème édition du *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés par Lagrange*, Paris : chez Courcier, 1826.

Rothe (H.A.)
[1795] Lokal- und kombinatorisch analytische Formeln für höhere Differenziale, *Archiv reinen ang. Math.*, II (1795), p. 431–449.

Serret (Joseph-Alfred)
[1866] *Cours d'algèbre supérieure*, 3e éd., Paris : Bachelier, 1866.

Servois (François-Joseph)
[1814a] Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, V (1814), p. 93–140.
[1814b] Réflexions sur les divers systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits, *Ibid.*, p. 141–170.

Sinaceur (Hourya)
[1991] *Corps et modèles*, Paris : Vrin, 1991.

Whittaker (Edmund T.) et Watson (George N.)
[1920] *A course of modern analysis*, Cambridge : 1920 (1e éd. 1902).